

## УЧЕТ СМЕЩЕНИЯ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА КАК ЖЕСТКОГО ЦЕЛОГО В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ МКЭ

Н.А. ГУРЕЕВА, канд. техн. наук, доцент

Ю.В. КЛОЧКОВ, д-р техн. наук, профессор

А.П. НИКОЛАЕВ, д-р техн. наук, профессор

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия,  
400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26.

*Для расчета оболочек вращения разработан объемный конечный элемент в форме шестигранника с узловыми неизвестными в виде компонент вектора перемещений и компонент тензора напряжений. Для выражения компонент вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и компонент ее тензора напряжений через узловые неизвестные использовался способ интерполяции векторных и тензорных полей трilinearными функциями формы, что позволило в неявном виде учесть смещение конечного элемента как жесткого целого. Для формирования матрицы деформирования шестигранника использовался вариационный принцип в смешанной формулировке.*

*На примере показана эффективность предложенного способа аппроксимации искомых величин как векторных и тензорных полей по сравнению с традиционным способом аппроксимации искомых величин как скалярных полей.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: метод конечного элемента, оболочка, изотропная среда.

Основные уравнения метода конечных элементов (МКЭ) могут быть получены на основе различных формулировок. Самыми распространенными являются формулировки в форме метода перемещений [1,2]. Используется также формулировка в форме метода сил [3] и, более широко, в смешанной форме [3,4] при аппроксимации перемещений и напряжений как скалярных величин.

При реализации МКЭ в форме метода перемещений общеизвестной является проблема учета смещения элемента как жесткого целого [1]. Учет смещения элемента как твердого тела является проблемой и при реализации МКЭ в смешанной формулировке. В настоящей работе предлагается решение этой проблемы в смешанной формулировке МКЭ на основе аппроксимации перемещений и напряжений как векторных и тензорных полей при формировании матрицы деформирования шестигранного объемного КЭ. На примерах показана эффективность предложенной аппроксимации искомых неизвестных.

**1. Геометрия оболочки.** Радиус – вектор произвольной точки срединной поверхности оболочки (рис. 1, а) определяется выражением

$$\vec{R} = x\vec{i} + r \sin \theta \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орты декартовой системы координат;  $x$  – осевая координата;  $\theta$  – угловая координата;  $r$  – радиус вращения произвольной точки.

---

Данная работа выполнена при финансовой поддержке администрации Волгоградской области, предоставившей государственный научный грант победителям конкурса в соответствии с Законом Волгоградской области от 4 марта 2005 г. № 1020-ОД "О государственных научных грантах Волгоградской области", постановлением Волгоградской областной Думы от 9 октября 2008 г. № 8/653 "О выделении государственных научных грантов Волгоградской области", согласно договору от 27 октября 2008г.

Дифференцированием (1.1) определяются базисные векторы в произвольной точке срединной поверхности, касательные к ней

$$\vec{a}_1 = \vec{R}_{,s} = x_{,s} \vec{i} + r_{,s} \sin \theta \vec{j} + r_{,s} \cos \theta \vec{k}; \quad (1.2)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{R}_{,\theta} = x_{,\theta} \vec{i} + r \cos \theta \vec{j} - r \sin \theta \vec{k}, \quad (1.3)$$

где  $s$  – меридиональная координата.

Вектор, нормальный к срединной

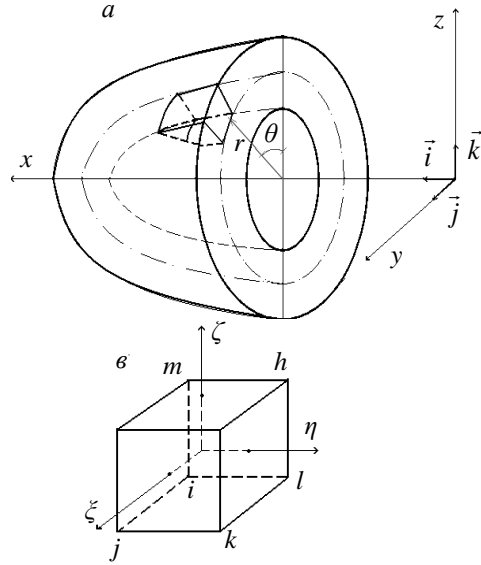


Рис. 1

поверхности, определяется векторным произведением

$$\vec{A} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = -r_{,s} r \vec{i} + r x_{,s} \sin \theta \vec{j} + r x_{,s} \cos \theta \vec{k}. \quad (1.4)$$

Нормаль к срединной поверхности определяется выражением

$$\vec{a} = \vec{A} / r = -\vec{i} r_{,s} + \vec{j} x_{,s} \sin \theta + \vec{k} x_{,s} \cos \theta. \quad (1.5)$$

Базис векторов произвольной точки срединной поверхности  $\{\vec{a}\}^T = \{\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}\}$  можно представить в матричном виде

$$\{\vec{a}\} = [M] \{\vec{i}\}, \quad (1.6)$$

где  $\{\vec{i}\} = \{\vec{i} \ \vec{j} \ \vec{k}\}$  – строка ортов декартовой системы координат;  $[M]$  – матрица коэффициентов.

Определим в матричном виде производные базисных векторов произвольной точки срединной поверхности дифференцированием (1.2), (1.3) и (1.5)

$$\{\vec{a}_{1,s}\} = [N_1] \{\vec{i}\}; \{\vec{a}_{,\theta}\} = [N_2] \{\vec{i}\}, \quad (1.7)$$

где  $\{\vec{a}_{,s}\} = \{\vec{a}_{1,s} \ \vec{a}_{2,s} \ \vec{a}_{,s}\}$  – вектор–строка производных базисных векторов по координате  $s$ ;  $\{\vec{a}_{,\theta}\} = \{\vec{a}_{1,\theta} \ \vec{a}_{2,\theta} \ \vec{a}_{,\theta}\}$  – вектор–строка производных базисных векторов по координате  $\theta$ ;  $[N_1]$ ,  $[N_2]$  – матрицы коэффициентов.

С учетом (1.6) выразим производные базисных векторов (1.7) через векторы этого же базиса

$$\{\vec{a}_{,s}\} = [N_1][M]^{-1} \{\vec{a}\} = [m] \{\vec{a}\}; \{\vec{a}_{,\theta}\} = [N_2][M]^{-1} \{\vec{a}\} = [n] \{\vec{a}\}. \quad (1.8)$$

**2. Перемещения и деформации.** Вектор перемещения произвольной точки срединной поверхности представим компонентами в локальном базисе  $\{\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}\}$  в виде

$$\vec{V} = v^1 \vec{a}_1 + v^2 \vec{a}_2 + v \vec{a}. \quad (2.1)$$

Производные вектора перемещения по координатам  $s$ ,  $\theta$ ,  $t$  с учетом (1.8) представим выражениями

$$\begin{aligned} \vec{V}_{,s} &= (v_{,s}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v m_{31}) \vec{a}_1 + (v^1 m_{12} + v_{,s}^2 + v^2 m_{22} + v m_{32}) \vec{a}_2 + \\ &+ (v^1 m_{13} + v^2 m_{23} + v_{,s} v + v m_{33}) \vec{a} = f_1^1 \vec{a}_1 + f_1^2 \vec{a}_2 + f_1^3 \vec{a}; \quad (2.2) \\ \vec{V}_{,\theta} &= (v_{,\theta}^1 + v^1 n_{11} + v^2 n_{21} + v n_{31}) \vec{a}_1 + (v^1 n_{12} + v_{,\theta}^2 + v^2 n_{22} + v n_{32}) \vec{a}_2 + \\ &+ (v^1 n_{13} + v^2 n_{23} + v_{,\theta} v + v n_{33}) \vec{a} = f_2^1 \vec{a}_1 + f_2^2 \vec{a}_2 + f_2^3 \vec{a}; \quad \vec{V}_{,t} = v_{,t}^1 \vec{a}_1 + v_{,t}^2 \vec{a}_2 + v_{,t} v. \end{aligned}$$

Радиус-вектор точки  $M^t$ , отстоящей на расстоянии  $t$  от срединной поверхности оболочки, определяется выражением

$$\vec{R}^t = \vec{R} + t\vec{a}, \quad (2.3)$$

а радиус – вектор этой точки в деформированном состоянии оболочки можно представить в виде

$$\vec{R}^{*t} = \vec{R}^t + \vec{V}. \quad (2.4)$$

Векторы, касательные к произвольной поверхности в исходном и деформированном состояниях, определяются дифференцированием (2.3), (2.4)

$$\vec{g}_i = \vec{R}_{,i} = \vec{a}_i + t\vec{a}_{,i}; \quad \vec{g}_i^* = \vec{R}_{,i}^{*t} = \vec{g}_i + \vec{V}_{,i}. \quad (2.5)$$

где под символом  $i$  понимаются координаты  $s, \theta, t$ .

Ковариантные компоненты тензора деформаций в произвольной точке определяются как разности компонент метрических тензоров деформированного и исходного состояния соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \vec{g}_1 \cdot \vec{V}_{,1}; \quad \varepsilon_{22} = \vec{g}_2 \cdot \vec{V}_{,2}; \quad \varepsilon_{33} = \vec{g}_3 \cdot \vec{V}_{,3}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\vec{g}_1 \cdot \vec{V}_{,2} + \vec{g}_2 \cdot \vec{V}_{,1}); \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(\vec{g}_1 \cdot \vec{V}_{,3} + \vec{g}_3 \cdot \vec{V}_{,1}); \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(\vec{g}_2 \cdot \vec{V}_{,3} + \vec{g}_3 \cdot \vec{V}_{,2}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\vec{g}_1 = (1 + tm_{31})\vec{a}_1 + tm_{32}\vec{a}_2 + tm_{33}\vec{a}$ ;  $\vec{g}_2 = tm_{31}\vec{a}_1 + (1 + tm_{32})\vec{a}_2 + tm_{33}\vec{a}$ ;  $\vec{g}_3 = \vec{a}$ .

Учитывая (2.2), деформации (2.6) можно представить в матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [L]\{\nu\}, \quad (2.7)$$

где  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{12} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{23}\}$  – вектор–строка деформаций точки  $M^t$ ;  $\{\nu\}^T = \{\nu^1 \ \nu^2 \ \nu\}$  – вектор–строка контравариантных компонент перемещений точки  $M^t$ ;  $[L]$  – матрица дифференциальных операторов.

**3. Соотношения между деформациями и напряжениями.** Закон Гука для изотропной среды имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = -\frac{\mu}{E}g_{11}(\sigma^{11}g_{11} + \sigma^{22}g_{22} + \sigma^{33}g_{33}) + \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{11}g_{11}\sigma^{11}; \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\mu}{E}g_{22}(\sigma^{11}g_{11} + \sigma^{22}g_{22} + \sigma^{33}g_{33}) + \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{22}g_{22}\sigma^{22}; \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E}g_{33}(\sigma^{11}g_{11} + \sigma^{22}g_{22} + \sigma^{33}g_{33}) + \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{33}g_{33}\sigma^{33}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{11}g_{22}\sigma^{12}; \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{11}g_{33}\sigma^{13}; \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \left(\frac{1}{E} + \frac{\mu}{E}\right)g_{22}g_{33}\sigma^{23}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или матричной форме

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}, \quad (3.2)$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \ \sigma^{22} \ \sigma^{33} \ \sigma^{12} \ \sigma^{13} \ \sigma^{23}\}$  – вектор – строка контравариантных компонент тензора напряжений в произвольной точке срединной поверхности;  $[D]$  – матрица податливости материала.

Функционал Рейснера для оболочки вращения имеет вид [2]

$$\Pi_R = \int_V \{\sigma\}^T [L]\{\nu\} dV - \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T [D]\{\sigma\} dV - \iint_F \{\nu\}^T \{q\} dF, \quad (3.3)$$

$V$  – объем оболочки;  $F$  – поверхность оболочки с заданными внешними силами.

**4. Матрица деформирования конечного элемента.** Конечный элемент выбран в форме шестигранника с узлами  $i, j, k, l, m, n, p, h$  (рис. 1, б). Для выполнения численного интегрирования глобальные координаты  $s, \theta, t$  аппроксимировались через локальные координаты куба  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  (рис.1, в) трилинейными соотношениями

$$\lambda = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\lambda_v\}, \quad (4.1)$$

где  $\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$  – вектор–строка узловых значений величины  $\lambda$ . Под символом  $\lambda$  понимаются координаты  $s, \theta, t$ .

Производные глобальных координат в локальной системе  $s, \zeta, s, \eta, s, \zeta, \theta, \zeta, \theta, \eta, \zeta, t, \zeta, t, \eta, t, \zeta$  и локальные координаты в глобальной системе  $\xi, s, \xi, \theta, \xi, t, \eta, s, \eta, \theta, \eta, t, \zeta, s, \zeta, \theta, \zeta, t$  определяются дифференцированием (4.1).

Векторные поля перемещений и тензорные поля напряжений внутренней точки конечного элемента аппроксимируются через узловые неизвестные так же трilinearными соотношениями

$$\vec{V} = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\vec{V}_y\}; \quad \bar{\sigma} = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\bar{\sigma}_y\}, \quad (4.2)$$

где  $\vec{V} = v^1 \vec{a}_1 + v^2 \vec{a}_2 + v \vec{a}$  – вектор перемещения внутренней точки конечного элемента;  $\{\vec{V}_y\} = \{\vec{V}^i \vec{V}^j \vec{V}^k \vec{V}^l \vec{V}^m \vec{V}^n \vec{V}^p \vec{V}^h\}$  – строка узловых векторов перемещений;  $\bar{\sigma} = \sigma^{11} \vec{a}_1 \vec{a}_1 + \sigma^{22} \vec{a}_2 \vec{a}_2 + \sigma^{33} \vec{a} \vec{a} + 2\sigma^{12} \vec{a}_1 \vec{a}_2 + 2\sigma^{13} \vec{a}_1 \vec{a} + 2\sigma^{23} \vec{a}_2 \vec{a}$  – тензор напряжений внутренней точки конечного элемента;  $\{\bar{\sigma}_y\}^T = \{\bar{\sigma}^i \bar{\sigma}^j \bar{\sigma}^k \bar{\sigma}^l \bar{\sigma}^m \bar{\sigma}^n \bar{\sigma}^p \bar{\sigma}^h\}$  – строка узловых тензоров напряжений.

С учетом (1.6) выразим базисные векторы узловых точек через базисные векторы произвольной внутренней точки конечного элемента в виде

$$\{\vec{a}^\omega\} = \underset{3 \times 1}{[M^\omega]} \underset{3 \times 3}{[M]}^{-1} \{\vec{a}\} = \underset{3 \times 3}{[N^\omega]} \underset{3 \times 1}{\{\vec{a}\}}, (\omega = i, j, k, l, m, n, p, h), \quad (4.3)$$

где  $\{\vec{a}^\omega\}^T = \{\vec{a}_1^\omega \vec{a}_2^\omega \vec{a}^\omega\}$  – базисные векторы узловой точки.

Выразим диадные произведения базисных векторов узловой точки

$$\{\vec{\vec{a}}^\omega\}^T = \{\vec{a}_1^\omega \vec{a}_1^\omega \vec{a}_2^\omega \vec{a}_2^\omega \vec{a}^\omega \vec{a}^\omega 2\vec{a}_1^\omega \vec{a}_2^\omega 2\vec{a}_1^\omega \vec{a}^\omega 2\vec{a}_2^\omega \vec{a}^\omega\}$$

через диадные произведения произвольной точки конечного элемента

$$\{\vec{\vec{a}}\}^T = \{\vec{a}_1 \vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_2 \vec{a} \vec{a} 2\vec{a}_1 \vec{a}_2 2\vec{a}_1 \vec{a} 2\vec{a}_2 \vec{a}\}$$

в матричной форме, используя соотношения (4.3),

$$\{\vec{\vec{a}}^\omega\} = \underset{6 \times 1}{[G^\omega]} \underset{6 \times 6}{\{\vec{\vec{a}}\}}; (\omega = i, j, k, l, m, n, p, h), \quad (4.4)$$

где  $\underset{6 \times 6}{[G^\omega]}$  – матрица коэффициентов, получаемая на основе (4.3).

Выражения тензоров напряжений внутренней и узловых точек конечного элемента в их базисах имеют вид [1]

$$\bar{\sigma} = \underset{1 \times 6}{\{\vec{\vec{a}}\}^T} \underset{6 \times 1}{\{\sigma\}}; \quad \bar{\sigma}^\omega = \underset{1 \times 6}{\{\vec{\vec{a}}^\omega\}^T} \underset{6 \times 1}{\{\sigma^\omega\}}, (\omega = i, j, k, l, m, n, p, h). \quad (4.5)$$

Столбец узловых векторов перемещений можно представить в матричном виде

$$\{\vec{V}_y\} = \underset{8 \times 1}{\{\vec{G}\}} \underset{8 \times 24}{\{V_y\}}, \quad (4.6)$$

где  $\underset{1 \times 24}{\{V_y\}^T} = \{v^{1i} v^{2i} v^i v^{1j} v^{2j} v^j \dots v^{1h} v^{2h} v^h\}$  – строка скалярных узловых неизвестных;  $[G]$  – матрица, элементами которой являются базисные векторы узловых точек  $\{\vec{\vec{a}}^\omega\}$ . После замены векторов  $\{\vec{\vec{a}}^\omega\}$  в матрице  $[G]$  по (4.3) вектор перемещения внутренней точки конечного элемента и его производные по координатам  $s, \theta, t$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \{\bar{a}\}_{1 \times 3}^T \left[ f_1(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} N^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} N^j \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \quad \dots \quad f_8(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} N^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} V_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix}; \\ \bar{V}_{,\lambda} &= \{\bar{a}\}_{1 \times 3}^T \left[ f_{1,\lambda} \begin{bmatrix} N^i \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \quad f_{2,\lambda} \begin{bmatrix} N^j \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \quad \dots \quad f_{8,\lambda} \begin{bmatrix} N^h \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} V_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix},\end{aligned}\quad (4.7)$$

где  $f_i$  – функции являющиеся элементами аппроксимирующей матрицы  $\{f(\xi, \eta, \zeta)\}^T$ .

С учетом (2.1) и (2.2) из соотношений (4.7) получаются матричные выражения для аппроксимации компонент вектора перемещений внутренней точки конечного элемента и их производных:

$$\begin{aligned}\{v\} &= [A] \{V_y\}; \quad v_{,s}^1 = [l_1]^T \{V_y\}; \quad v_{,s}^2 = [l_2]^T \{V_y\}; \quad v_{,s} = [l_3]^T \{V_y\}; \\ v_{,\theta}^1 &= [l_4]^T \{V_y\}; \quad v_{,\theta}^2 = [l_5]^T \{V_y\}; \quad v_{,\theta} = [l_6]^T \{V_y\}; \quad v_{,\tau}^1 = [l_7]^T \{V_y\}; \\ v_{,\tau}^2 &= [l_8]^T \{V_y\}; \quad v_{,\tau} = [l_9]^T \{V_y\}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Узловые тензоры напряжений, используя (4.5) представим в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 8 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ 8 \times 48 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix},\quad (4.9)$$

где  $\begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 1 \times 48 \end{Bmatrix}^T = \left\{ \begin{Bmatrix} \sigma^i \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma^j \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T \dots \begin{Bmatrix} \sigma^h \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T \right\}$  – строка узловых неизвестных напряжений;

$\begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ 8 \times 48 \end{bmatrix}$  – матрица, элементами которой являются строки диадных произведений  $\begin{Bmatrix} a \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T$ . После замены строк  $\begin{Bmatrix} a \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T$  по (4.4) в матрице  $\begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ 8 \times 48 \end{bmatrix}$  (4.8) тензор напряжений (4.2) внутренней точки конечного элемента можно представить соотношением

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 8 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ 1 \times 6 \end{Bmatrix}^T \left[ f_1(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} G^i \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} G^j \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \quad \dots \quad f_8(\xi, \eta, \zeta) \begin{bmatrix} G^h \\ 6 \times 6 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix}.\quad (4.10)$$

Учитывая диадное представление (4.5) тензора  $\begin{Bmatrix} \sigma \\ 8 \times 1 \end{Bmatrix}$ , компоненты тензора напряжений внутренней точки конечного элемента на основании (4.9) представим в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 6 \times 1 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 6 \times 48 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix}.\quad (4.11)$$

Принимая во внимание соотношения (4.11) и (4.8), запишем функционал (3.3) в виде

$$\begin{aligned}\Pi_R &= \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 1 \times 48 \end{Bmatrix}^T \int_V [S]^T [B] dV \begin{Bmatrix} v_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 1 \times 48 \end{Bmatrix}^T \int_V [S]^T [D] [S] dV \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix} - \\ &\quad - \begin{Bmatrix} v_y \\ 1 \times 24 \end{Bmatrix}^T \int_s [A]^T [q] ds.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Дифференцируя функционал (4.12) по узловым неизвестным  $\begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix}^T$  и  $\begin{Bmatrix} v_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix}^T$  и приравнявая производные нулю, получим систему уравнений

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix}^T} = [Q] \begin{Bmatrix} v_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix} - [H] \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_R}{\partial \begin{Bmatrix} v_y \\ 24 \times 1 \end{Bmatrix}^T} = [Q]^T \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ 48 \times 1 \end{Bmatrix} - \{f_s\} = 0,\quad (4.13)$$

где  $[Q] = \int_V [S]^T [B] dV$ ;  $[H] = \int_V [S]^T [D] [S] dV$ ;  $\{f_s\} = \int_s [A]^T [q] ds$ .

Представим систему (4.13) в традиционной для МКЭ форме

$$[k] \begin{Bmatrix} Z_y^R \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y^R \\ \end{Bmatrix}, \text{ где } [k] = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{matrix} 48 \times 48 & 48 \times 24 \\ 24 \times 48 & 24 \times 24 \end{matrix} - \text{ матрица деформирования конечного}$$

элемента;  $\begin{Bmatrix} Z_y^R \\ \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \{\sigma_y\}^T \\ \{\nu_y\}^T \end{Bmatrix}$  – вектор узловых неизвестных конечного эле-

мента;  $\begin{Bmatrix} f_y^R \\ \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} \{0\}^T \\ \{f_s\}^T \end{Bmatrix}$  – вектор узловых усилий конечного элемента.

Для формирования матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].

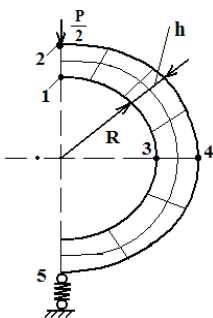


Рис. 2

*Пример 1.* Определено напряженно-деформированное состояние кольца, нагруженного сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в верхней точке вертикального диаметра, при расположении напружиненной опоры в нижней точке диаметра. Ввиду симметрии конструкции рассматривалась половина кольца (рис. 2) при следующих исходных данных:

$$R = 30 \text{ см}; \quad h = 0,5 \text{ см}; \quad P = 2 \text{ Н}; \quad \mu = 0,3; \quad E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2.$$

Рассматриваемая часть кольца разбивалась на 60 элементов вдоль дуги и на два элемента вдоль ее толщины. При изменении жесткости опорной пружины точка 5 получала различные перемещения  $\nu_{II}$  (см). В таблице приведены кольцевые физические напряжения в точках 1, 2, 3, 4 (рис. 2) при различных жесткостях опорной пружины и получаемых соответственно смещениях  $\nu_{II}$  кольца как жесткого целого. В числителе приведены значения напряжений при использовании тензорно-векторной аппроксимации искомых величин, а в знаменателе – при их аппроксимации как скалярных величин.

Анализ результатов, представленных в табл. 1, показывает, что напряжения  $\sigma_{cp}^{22}$  (в числителе) меняются незначительно даже при смещении кольца как жесткого целого на 111,7 см. Результаты, представленные в знаменателе, оказываются неприемлемыми уже при смещении кольца как жесткого целого на величину 1 см.

Таблица

$\nu_{II}$ (см)	0,0	0,1	1,0	2,0	10,1	111,7
№ точки	Напряжения $\sigma_{cp}^{22}$ (Н/см <sup>2</sup> )					
1	228,46	228,46	228,43	228,40	228,16	225,15
	229,48	222,99	164,53	99,43	-427,15	-7001,6
2	-225,97	-225,97	-225,94	-225,90	-225,61	-222,14
	-228,27	-221,45	-160,07	-91,72	461,15	7363,9
3	-133,69	-133,69	-133,66	-133,62	-133,32	-129,99
	-137,62	-137,23	-169,72	-205,90	-498,580	-4152,8
4	130,29	130,29	130,26	130,22	129,91	126,46
	130,87	134,5	162,66	194,53	452,31	3670,7

Таким образом, предложенная аппроксимация векторных и тензорных полей искомых величин внутренней точки конечного элемента позволяет учесть смещения элемента как жесткого целого.

Конечный элемент на основе разработанного способа аппроксимации векторов перемещений и тензоров напряжений может найти применение в про-

граммных комплексах для расчета прочности оболочек произвольной толщины в трехмерной постановке.

#### Л и т е р а т у р а

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 391с.
2. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344с.
3. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
4. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинанте, 1988. – 284с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

#### **THE ACCOUNT OF DISPLACEMENT OF THE FINAL ELEMENT AS RIGID WHOLE IN MIXED FORMULATION FEM**

Gureeva N.A., Klochkov J.V., Nikolaev A.P.

The volume finite element is developed for calculation of covers of rotation in shape hexahedron with central unknown persons in a kind a component of a vector of moving and a component tensor strains. For expression the component of a vector of moving of an internal point of a finite element and its component tensor strains through central unknown persons was used a way of interpolation vector and tensor fields three linear by form functions that has allowed to consider implicitly displacement of a finite element as the rigid whole. For formation of a matrix of deformation hexahedron the variation principle in the mixed formulation was used.

On an example efficiency of the offered way of approximation of required sizes as vector and tensor fields in comparison with traditional way of approximation of required sizes as scalar fields is shown.

KEY WORDS: finite element method, shell.

