

О РАСЧЕТЕ СОСТАВНЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С ДВУМЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПОСТЕЛИ

В.В. ФИЛАТОВ, канд. техн. наук, доцент

Московский государственный строительный университет, fofo@mail.ru

Рассматривается применение теории составных стержней и пластинок А.Р. Ржаницына к расчету составных балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели. Для построения численного алгоритма используется разностная форма метода последовательных аппроксимаций. Приведен пример расчета составной балки на упругом основании, иллюстрирующий простоту и быструю сходимость решения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упругое основание, стержень, пластинка, метод последовательных аппроксимаций

Обобщая теорию составных стержней А.Р. Ржаницына [1] на случай расчета составных балок, контактирующих с упругим основанием, дифференциальное уравнение равновесия балки запишем в виде

$$d^2 M^0 / dx^2 = -q - r, \quad (1)$$

где M^0 – изгибающий момент, воспринимаемый сечением составной балки; q – интенсивность поперечной нагрузки, изменяющейся по произвольному закону; r – отпор основания. В случае основания с двумя коэффициентами постели [2]:

$$r = k \cdot y - 2 \cdot t \cdot y'', \quad (2)$$

где y – прогибы балки, равные осадкам основания; $y'' = d^2 y / dx^2$; по [2]:

$$k = \frac{E_0 \cdot \delta}{\bar{H}(1 - \nu_0^2)}; \quad t = \frac{E_0 \cdot \delta \cdot \bar{H}}{12 \cdot (1 + \nu_0)}; \quad (3)$$

E_0, ν_0 – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала основания; δ, \bar{H} – толщина, высота сжимаемого под конструкцией слоя грунта.

Подставляя (2) в (1), запишем дифференциальное уравнение (1) с учетом (3) в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 m}{d\psi^2} + c_1 \cdot \frac{d^2 w}{d\psi^2} = -q - c_2 \cdot w, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi = \frac{x}{L}; \quad m = \frac{M_0 L}{EI}; \quad w = \frac{y}{L}; \quad p = \frac{qL^3}{EI}; \\ c_1 = \frac{1 - \nu_0}{6} \cdot \frac{\bar{H}}{L}; \quad c_2 = \frac{L}{\bar{H}}; \quad L = \sqrt[3]{\frac{EI(1 - \nu_0^2)}{E_0 \delta}}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

EI – жесткость на изгиб монолитной балки с размерами поперечного сечения рассматриваемой балки. Ниже для наглядности рассмотрим балку, составленную из двух одинаковых ветвей с размерами поперечного сечения $b \times H$. Дифференциальные уравнения для определения прогибов y и сдвигающей силы T в шве рассматриваемой балки по [1] записываются так:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2E_g I_g} (M^0 - T \cdot c); \quad (6)$$

$$\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{c}{2E_g I_g} \cdot M^0 + \left(\frac{2}{E_g F_g} + \frac{c^2}{2E_g I_g} \right) \cdot T. \quad (7)$$

В этих уравнениях: $E_g I_g = EbH^3/12$; $E_g F_g = EbH$; c – расстояние между центрами сечений ветвей (в случае нулевой толщины шва для рассматриваемой

балки $c = H$); ξ – коэффициент жесткости шва.

С учетом (5) и $EI = b(2H)^3/12$ запишем дифференциальные уравнения (6) и (7) в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 w}{d\psi^2} = -\left(4m - \frac{1}{2} \cdot \tilde{t}\right); \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \tilde{t}}{d\psi^2} = -\eta^2 \cdot (m - \tilde{t}), \quad (9)$$

$$\text{где} \quad \tilde{t} = \frac{T \cdot c \cdot L}{E_s I_s}; \quad \eta^2 = 8 \frac{\xi \cdot L^2}{E_s F_s}. \quad (10)$$

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (4), (8), (9) используем обладающие высокой точностью разностные уравнения метода последовательных аппроксимаций (МПА). Следуя методике [3] разностные аппроксимации по МПА указанных дифференциальных уравнений для внутренней точки j равномерной сетки с шагом τ при отсутствии разрывов m , w , \tilde{t} , m' , w' , \tilde{t}' и $p = const$ запишем в виде:

$$m_{j-1} - 2m_j + m_{j+1} + \left(c_1 - \frac{\tau^2}{12} c_2\right) \cdot w_{j-1} - 2\left(c_1 + \frac{5}{12} \tau^2 c_2\right) \cdot w_j + \left(c_1 - \frac{\tau^2}{12} c_2\right) \cdot w_{j+1} = -\tau^2 p; \quad (11)$$

$$w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1} = -\frac{\tau^2}{12} \left[4\left(m_{j-1} + 10m_j + m_{j+1}\right) - \frac{1}{2}\left(m_{j-1} + 10\tilde{t}_j + \tilde{t}_{j+1}\right)\right]; \quad (12)$$

$$\left(1 - \frac{\tau^2}{12} \eta^2\right) \cdot \tilde{t}_{j-1} - 2\left(1 + \frac{5}{12} \tau^2 \eta^2\right) \cdot \tilde{t}_j + \left(1 - \frac{\tau^2}{12} \eta^2\right) \cdot \tilde{t}_{j+1} = -\tau^2 \eta^2 \left(m_{j-1} + 10m_j + m_{j+1}\right). \quad (13)$$

Аналогично записываются разностные аппроксимации (4), (8), (9) для крайних точек сетки. В частности, разностное уравнение, соответствующее (4), для точки j левого края сетки имеет вид:

$$m'_j + m_j - m_{j+1} + \tau \left(c_1 + \frac{\tau^2}{12} c_2\right) \cdot w'_j + \left(c_1 + \frac{5}{12} \tau^2 c_2\right) \cdot w_j - \left(c_1 - \frac{\tau^2}{12} c_2\right) \cdot w_{j+1} = \frac{\tau^2}{2} p. \quad (14)$$

Если рассматривать составную балку, свободно лежащую на основании с двумя коэффициентами постели, согласно [2] в точке j левого края балки имеют граничные условия:

$$w_j^{\bar{o}} = w_j^o = w_j; \quad S_j^{\bar{o}} = S_j^o, \quad (15)$$

где $w_j^{\bar{o}}$, $S_j^{\bar{o}}$ – соответственно прогиб и обобщенная поперечная сила в сечении j балки; w_j^o , S_j^o – осадка основания и обобщенная поперечная сила основания в точке j .

Выражение для безразмерной обобщенной поперечной силы в сечении j балки по [2] можно привести к виду:

$$s_j^{\bar{o}} = m'_j + c_1 \cdot w'_j. \quad (16)$$

Исключая из (14) m'_j с использованием (16), w'_j – по параболической аппроксимации w , запишем полученное выражение, меняя знак $s_j^{\bar{o}}$ на обратный, для точки n правого края балки:

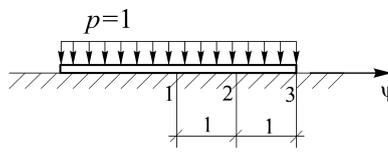


Рис. 1

$$-\tau \cdot s_n^{\delta} - m_{n-1} + m_n - \frac{\tau^2}{24} c_2 w_{n-2} - \left(c_1 - \frac{\tau^2}{4} c_2 \right) \cdot w_{n-1} + \left(c_1 + \frac{7}{24} \tau^2 c_2 \right) \cdot w_n = \frac{\tau^2}{2} p. \quad (17)$$

Для правого края балки по [2]: $S_n^o = -2t\sqrt{(k/2t)} \cdot y_n^o, \quad (18)$

где k, t определяются по (3). Умножая (18) на $L^2/(EI)$, перейдем к безразмерному значению $s_n^o = S_n^o \frac{L^2}{EI}$: $s_n^o = -2t\sqrt{\frac{k}{2t}} \cdot \frac{L^3}{EI} \cdot w_n^o. \quad (19)$

Учитывая условие (15) и формулы (3), (5), из (19) получим при $v_o = 0$:

$$s_n^{\delta} = -\sqrt{6}w_n/6 = -0,4082 \cdot w_n. \quad (20)$$

Рассмотрим в качестве примера двухслойную балку с нулевой толщиной шва по рис. 1. Пусть полупролет балки $2L$; тогда $\tau = 1$. В силу симметрии рассматриваем правую половину балки с началом координат в точке 1.

Краевые условия в точке 3: $m_3 = 0$; если положить, что возможны на торце свободные сдвиги, то по [1] $\tilde{t}_3 = 0$. Кроме того, для точки 3 справедливо выражение (20), которое получено с учетом условий (15). Учитывая (20), записываем уравнение (17) при $n = 3$; $\tau = 1$; $c_1 = 1/3$; $c_2 = 1/2$; $p = 1$; $m_3 = 0$:

$$-m_2 - 0,02083 \cdot w_1 - 0,2083 \cdot w_2 + 0,8874 \cdot w_3 = 0,5. \quad (21)$$

Дальнейший расчет балки на рисунке 1 сводится к записи уравнений (11)-(13) для точек 1, 2 с учетом краевых условий, симметрии, указанных выше параметров и $\eta = 0,5$. Из решения этих шести уравнений совместно с (21) находим: $m_1, m_2, w_1, w_2, w_3, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2$. В частности, $w_1 = w_{\max} = 1,77 > 1,67$, где 1,67 – максимальный прогиб монолитной балки с такими же размерами, что и составная, при прочих равных условиях. Отметим, что результаты численного и аналитического решений для монолитной балки практически совпадают.

В таблице приводятся основные результаты расчета рассматриваемой выше составной балки, полученные при $\tau < 1$.

Таблица

Величины \ τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
w_{\max}	1,7772	1,7773	1,7773	1,7773
m_{\max}	0,11408	0,11400	0,11399	0,11399
\tilde{t}_{\max}	0,22805	0,22801	0,22800	0,22800

Результаты расчета свидетельствуют о быстрой сходимости численного решения по МПА. Разработанный алгоритм расчета составных балок на двухпараметрическом основании может быть использован в инженерной практике.

Литература

1. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М.:Стройиздат, 1986. - 316 с.
2. Леонтьев Н.Н., Леонтьев А.Н., Соболев Д.Н., Анохин Н.Н. Основы теории балок и плит на деформируемом основании// М., МИСИ, 1982. - 119 с.
3. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2008 г. - 280 с.

ON THE CALCULATION OF COMPOSITE BEAMS ON TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATIONS

V. V. Filatov

This article describes application of the composite bar and plate theory developed by A.R. Rzhantsyn for calculating composite beams on two-parameter elastic foundations. Difference form of SUPROX method is used to generate some numerical algorithm. The calculation of composite beam on elastic foundations illustrates a simple and fast-convergence solution.