МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ

КУРОЧКА К.С., *к.т.н., доцент*
УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь, 246746, г. Гомель, пр. Октября, 48

В работе представлена математическая модель вязкоупругопластического деформирования неоднородного грунтового основания. Предложен алгоритм, на основании которого разработано программное обеспечение для численного моделирования методом конечных элементов вязкоупругопластических деформаций неоднородных грунтовых оснований. С помощью созданного программного обеспечения проведено исследование разработанной математической модели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вязкоупругопластическое неоднородное грунтовое основание, МКЭ, численное моделирование, осадка плитного фундамента.

Как показывают исследования [1, 2], для грунтовых оснований характерно изменение во времени напряжённо-деформированного состояния при постоянных напряжениях. Причём, величина деформаций, вызываемых этими изменениями, может быть сопоставима с величиной мгновенных деформаций. Особое значение принимают данные деформации при исследовании грунтовых оснований зданий и сооружений в предельно-напряжённом состоянии. Т.к. вследствие неравномерной осадки грунтового основания во времени происходит перераспределение усилий между отдельными элементами сооружения, в результате чего в протяжённых в плане сооружениях иногда появляются трещины, а в наиболее неблагоприятных условиях наблюдается их разрушение. Для грунтовых оснований характерна неоднородность свойств, как в плане, так и по глубине. Кроме того, одним из реологических свойств скелета грунтового основания является вязкоупругопластичность, вызываемая консолидационными свойствами [1, 2], поэтому для получения наиболее адекватного решения указанной задачи необходимо совместно учитывать как неоднородные, так и вязкоупругопластические свойства дисперсных твёрдых тел. Одним из методов решения данной задачи может быть математическое моделирование на основе метода конечных элементов [3, 4, 5], т. к. это позволит учесть неоднородность грунтового основания, посредством указания различных свойств конечным элементам.

В настоящей работе рассматривается задача моделирования вязкоупругопластического напряжённо-деформированного состояния неоднородных дисперсных тел на примере грунтовых оснований зданий и сооружений.

Принимаемые гипотезы и методы решения

1. Рассматривается задача определения осадок плитного фундамента размером 20м на 30м и толщиной 0.4м на неоднородном грунтовом основании под действием равномерно распределённой нагрузки. Глубина активной зоны деформаций согласно экспериментальных данных не будет превышать 2м [3]. Тогда, в силу разного порядка размеров активной зоны грунтового основания и плитного фундамента, последний можно рассматривать по отношению к грунтовому основанию как полу бесконечный. Таким образом, не сужая общности рассуждений, можно рассматривать только вертикальное сечение исследуемой системы. Следовательно, приходим к плоской задаче теории вязкоупругопластичности.

2. Предположим, что в рассматриваемой системе любой элемент имеет хотя бы одну общую границу с другим элементом, т.е. рассматриваемая система

будет определена в *n*-связанной области, на границах которой будут заданы либо перемещения, либо усилия.

3. После приложения нагрузки граница между плитным фундаментом и грунтовым основанием останется строго общей, т.е. не появится пустот. Следовательно, плитный фундамент будет деформироваться как упругопластическое тело [6].

4. В силу того, что отношения линейных в плане размеров плитного фундамента к толщине составляет 50, то для определения его напряжённо- деформированного состояния воспользуемся гипотезами Кирхгофа [5, 6].

5. Под действием вертикальной нагрузки мгновенные деформации грунтового основания будут описываться теорией малых упругопластических деформаций [6]. При постоянных напряжениях за счёт консолидации грунтовое основание с течением времени будет изменять своё напряжённо-деформированное состояние. Таким образом, для описания процесса вязкоупругопластического деформирования грунтового основания воспользуемся нелинейной теорией наследственной ползучести [6, 7].

Для дискретизации указанной системы конечными элементами использован подход, описанный в [4, 5].

Вязкоупругопластическое напряжённо-деформированное состояние грунтового основания

Для описания процесса вязкоупругопластического деформирования воспользуемся нелинейной теорией наследственной ползучести, согласно которой для вязкоупругопластических тел имеют место соотношения [6]:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\text{x}}(t)=2G(t)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(t))(1-\Gamma_{\text{c}})(\varepsilon_{\text{x}}(t)-\varepsilon_{\text{ср}}(t))+3K(t)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(t))(1-\Gamma_{\text{o}})\varepsilon_{\text{ср}}(t),\\
\sigma_{\text{y}}(t)=2G(t)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(t))(1-\Gamma_{\text{c}})(\varepsilon_{\text{y}}(t)-\varepsilon_{\text{ср}}(t))+3K(t)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(t))(1-\Gamma_{\text{o}})\varepsilon_{\text{ср}}(t),\\
\tau_{\text{xy}}(t)=G(t)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(t))(1-\Gamma_{\text{c}})\gamma_{\text{xy}}(t),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\sigma_x(t)$, $\sigma_y(t)$ – нормальные напряжения; $\tau_{xy}(t)$ – касательные напряжения, $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ – линейные деформации; $\gamma_{xy}(t)$ – сдвиговые деформации; $K(t)$ – модуль объёмной деформации; $\varepsilon_{\text{ср}}(t) = [\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(t)]/2$; $G(t)$ – модуль сдвига; Γ_o – оператор объёмной релаксации; Γ_c – оператор сдвиговой релаксации, $\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))$ – функция, описывающая физическую нелинейность материала. В случае если величина интенсивности деформаций $\varepsilon_{\text{и}}(\text{t})$ не превышает некоторого порогового для данного материала значения $\varepsilon_{\text{п}}$, при котором наступает явление пластичности:

$$\varepsilon_{\text{и}}(\text{t})\le\varepsilon_{\text{п}}, \tag{2}$$

то функция $\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))=1$, а соотношения (1) будут совпадать с аналогичными соотношениями линейной теорией наследственной ползучести Больцмана (*Boltzmann L.*) – Вольтерра (*Volterra V.*) [5, 6].

Предположим, что при вязкоупругом деформировании объёмные деформации будут упругими, тогда $K(t)(1-\Gamma_o)\equiv K(t)$. Выразим модуль сдвига $G(t)$ и модуль объёмной деформации $K(t)$ через модуль Юнга (*Young T.*) $E(t)$ и коэффициент Пуассона (*Poisson S. D.*) $\mu\ (t)$, тогда выражение (1) с учётом принятой гипотезы об упругости объёмных деформаций можно записать в виде:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\text{x}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))(\varepsilon_{\text{x}}(t)+\mu(t)\varepsilon_{\text{y}}(t))-\frac{E(t)}{2(1+\mu(t))}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\Gamma_{\text{c}}(\varepsilon_{\text{x}}(t)-\varepsilon_{\text{y}}(t)),\\
\sigma_{\text{y}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))(\mu(t)\varepsilon_{\text{x}}(t)+\varepsilon_{\text{y}}(t))-\frac{E(t)}{2(1+\mu(t))}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\Gamma_{\text{c}}(-\varepsilon_{\text{x}}(t)+\varepsilon_{\text{y}}(t)),\\
\tau_{\text{xy}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\frac{1-\mu(t)}{2}\gamma_{\text{xy}}(t)-\frac{E(t)}{2(1+\mu(t))}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\Gamma_{\text{c}}\gamma_{\text{xy}}(t).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

В скалярной форме выражение (3) будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{x}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\left(\varepsilon_{\text{x}}(t)+\mu(t)\varepsilon_{\text{y}}(t)\right)-\left(\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{x}}(\xi)d\xi-\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{y}}(\xi)d\xi\right),$$

$$\sigma_{\text{y}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\left(\mu(t)\varepsilon_{\text{x}}(t)+\varepsilon_{\text{y}}(t)\right)-\left(-\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{x}}(\xi)d\xi+\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{y}}(\xi)d\xi\right), \quad (4)$$

$$\tau_{\text{xy}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\frac{1-\mu(t)}{2}\gamma_{\text{xy}}(t)-\frac{E(t)}{2(1+\mu(t))}\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\gamma_{\text{xy}}(\xi)d\xi,$$

где $\Gamma_c(t,\xi)$ – ядро сдвиговой релаксации.

Решение задач вязкоупругопластичности в полной постановке является сложной математической задачей, которая в аналитическом виде может быть решена только в некоторых частных случаях. Для её решения воспользуемся подходом на основе метода последовательных приближений Ильюшина [6]. Заменим задачу теории вязкоупругопластичности итерационной последовательностью линейно-вязкоупругих задач.

Определим функцию $\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))$ в виде

$$\varphi(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))=1-\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t})), \quad (5)$$

где $\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))$ – для фиксированного момента времени будет представлять собой функцию Ильюшина [6], причём $\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))=0$ при $\varepsilon_{\text{и}}(\text{t})\le\varepsilon_{\text{п}}$.

Подставим выражение (5) в первое соотношение (4), получаем

$$\sigma_{\text{x}}(t)=\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\left(\varepsilon_{\text{x}}(t)+\mu(t)\varepsilon_{\text{y}}(t)\right)-\left(\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varepsilon_{\text{x}}(\xi)d\xi-\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\varepsilon_{\text{y}}(\xi)d\xi\right)-$$
$$-\left(\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{y}}(\xi)d\xi-\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon_{\text{x}}(\xi)d\xi\right)-\frac{E(t)}{1-\mu(t)^2}\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\text{t}))\left(\varepsilon_{\text{x}}(t)+\mu(t)\varepsilon_{\text{y}}(t)\right) \quad (6)$$

Рассмотрим из выражения (6) интеграл вида

$$I_1=\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon(\xi)d\xi .$$

Временной отрезок $[0,t]$ разделим на n интервалов, тогда

$$I_1=\int_0^t \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon(\xi)d\xi=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \Gamma_{\text{c}}(t,\xi)\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\xi))\varepsilon(\xi)d\xi .$$

По теореме о среднем, получим:

$$I_1=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\omega(\varepsilon_{\text{и}}(\eta))\varepsilon(\eta)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Gamma_{\text{c}}(t,\xi)d\xi\right], \text{ где } \eta\in[t_i;t_{i+1}].$$

В качестве точки η приближённо возьмём одну из границ отрезка, например, t_i, тогда

$$I_1=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\omega(\varepsilon_{\text{и}}(t_i))\varepsilon(t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Gamma_{\text{c}}(t,\xi)d\xi\right].$$

Ядро релаксации примем в виде [1]

$$\Gamma(t,\xi)=\delta G\exp(-\delta_1(t-\xi)), \quad (7)$$

где δ и δ_1 - параметры релаксации.

Подставляя (7) в предыдущее выражение и интегрируя, получаем

$$I_1\approx\frac{\delta}{\delta_1}G\sum_{i=0}^{n-1}\left[\omega(\varepsilon_{\text{и}}(t_i))\varepsilon(t_i)(\exp(-\delta_1(t-t_{i+1}))-\exp(-\delta_1(t-t_i)))\right]. \quad (8)$$

В случае другого ядра релаксации (7) [1] интегрирование в (8) может быть проведено численно. Аналогичным образом, рассматривая интеграл вида

$$I_2 = \int_0^t \Gamma_{\text{с}}(t,\xi)\varepsilon(\xi)d\xi \ ,$$

несложно получить $$I_2 \approx \frac{\delta}{\delta_1} G \sum_{i=0}^{n-1} \left[\varepsilon(t_i)(\exp(-\delta_1(t-t_{i+1})) - \exp(-\delta_1(t-t_i)))\right]. \quad (9)$$

Используя выражения (8) и (9), соотношения (6) для момента времени t_{i+1} можно переписать в виде

$$\sigma_{\text{x}}(t_{i+1}) = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t_{i+1})^2}\left(\varepsilon_{\text{x}}(t_{i+1}) + \mu(t)\varepsilon_{\text{y}}(t_{i+1})\right) - \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t_{i+1})^2}\omega(\varepsilon_{\text{и}}(t_{i+1}))\left(\varepsilon_{\text{x}}(t_{i+1}) + \mu(t_{i+1})\varepsilon_{\text{y}}(t_{i+1})\right) -$$
$$- \frac{\delta}{\delta_1} G \sum_{j=0}^{i} \left[\left(1-\omega\left(\varepsilon_{\text{и}}\left(t_j\right)\right)\right)\left(\varepsilon_{\text{x}}(t_j) - \varepsilon_{\text{y}}(t_j)\right)\left(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j))\right)\right] \quad (10)$$

Аналогично рассуждая, можно найти соответствующие выражения для $\sigma_{\text{y}}(t_{i+1})$ и $\tau_{\text{xy}}(t_{i+1})$.

Математическая модель напряжённо деформированного состояния вязкоупругопластического грунтового основания

На основании изложенного выше соотношения между напряжениями и деформациями для вязкоупругопластического грунтового основания можно записать в виде

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1}\{\varepsilon\}_{i+1} - \omega_{i+1}[E]_{i+1}\{\varepsilon\}_{i+1} - \frac{\delta}{\delta_1} G \sum_{j=0}^{i} \left[(1-\omega_j)[Q]_{ji}\{\varepsilon\}_j\right], \quad (11)$$

где $\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma_{\text{x}}(t_{i+1}) \;\; \sigma_{\text{y}}(t_{i+1}) \;\; \tau_{\text{xy}}(t_{i+1})\}^{\text{T}}$, $\{\varepsilon\}_{i+1} = \{\varepsilon_{\text{x}}(t_{i+1}) \;\; \varepsilon_{\text{y}}(t_{i+1}) \;\; \gamma_{\text{xy}}(t_{i+1})\}^{\text{T}}$,

$$\omega_i = \omega\left(\varepsilon_{\text{и}}\left(t_i\right)\right), \quad [E]_{i+1} = \frac{E(t_{i+1})}{1-\mu(t)^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu(t) & 0 \\ \mu(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu(t)}{2} \end{bmatrix},$$

$$[Q]_{ji} = (\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения вязкоупругогопластического напряжённо-деформированного состояния грунтового основания необходимо знать всю предысторию деформирования, т. е. деформации $\{\varepsilon\}_0$, $\{\varepsilon\}_1$, $\{\varepsilon\}_2$… В начальный момент времени деформации $\{\varepsilon\}_0$ могут быть найдены из решения упругой задачи. Предположим, что в любой произвольный фиксированный момент времени плотность энергии деформации будет выражаться площадью диаграммы деформирования материала:

$$U^0(t_{i+1}) = \int_0^{\varepsilon_{\text{и}}(t_{i+1})} \sigma_{\text{и}} d\varepsilon_{\text{и}} \ .$$

Для одного конечного элемента энергия деформации будет равна:

$$U_{i+1} = \iint_S U^0(t_{i+1})dS \ ,$$ где S – площадь конечного элемента.

Тогда, согласно принятой гипотезе, в соответствии с принципом возможных перемещений для момента времени t_{i+1} будем иметь [4, 6]:

$$\{\tilde{\delta}\}_{i+1}^{T}\{R\} = \iint\limits_{S} \{\tilde{\varepsilon}\}_{i+1}^{T}\{\sigma\}_{i+1}\, dS\,, \tag{12}$$

где $\{\delta\}_{i+1}$ – вектор узловых перемещений в $i+1^{\text{ый}}$ момент времени, символ "$\sim$" означает вариацию, $\{R\}$ – вектор узловых усилий.

Рассмотрим треугольный конечный элемент [4]. Каждый узел такого конечного элемента в любой момент времени будет иметь две степени свободы:

$$\{\delta\}_i^{T} = \begin{bmatrix} u(t_i) & \vartheta(t_i) \end{bmatrix}.$$

Для аппроксимации перемещений внутри конечного элемента воспользуемся линейными полиномами:

$$\begin{aligned} u(t_i) &= \alpha_1(t_i) + \alpha_2(t_i)x + \alpha_3(t_i)y, \\ \vartheta(t_i) &= \alpha_4(t_i) + \alpha_5(t_i)x + \alpha_6(t_i)y, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha_1(t_i)\ldots\alpha_6(t_i)$ – параметры линеаризации, постоянные для элемента в фиксированный момент времени.

Таким образом, компоненты перемещений $u(t_i)$ и $\vartheta(t_i)$ треугольного элемента в произвольный фиксированный момент времени, узлы которого имеют 6 степеней свободы, можно выразить как произведение матрицы декартовых координат узловых точек на матрицу-столбец параметров поля деформаций:

$$\{\delta\}_i = [A]\{\alpha\}_i \tag{14}$$

где $\{\delta\}_i^{T} = \begin{bmatrix} u_l(t_i) & u_j(t_i) & u_k(t_i) & \vartheta_l(t_i) & \vartheta_j(t_i) & \vartheta_k(t_i) \end{bmatrix}$ – вектор узловых перемещений, $\{\alpha\}^{T} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{bmatrix}$ – вектор параметров,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$$ – координатная матрица,

x_l, y_l, x_j, y_j, x_k, y_k – координаты узлов.

Из уравнений (14) могут быть найдены неизвестные параметры:

$$\{\alpha\}_i = [A]^{-1}\{\delta\}_i. \tag{15}$$

Деформации определяются из уравнений Коши (*Cauchy A. L.*), которые будут иметь вид [4, 6]:

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(t_i) \\ \varepsilon_y(t_i) \\ \gamma_{xy}(t_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u(t_i)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(t_i)}{\partial y} + \dfrac{\partial \vartheta(t_i)}{\partial x} \end{Bmatrix}. \tag{16}$$

Подставляя в уравнения (16) равенства (13) и производя дифференцирование, получим:

$$\{\varepsilon\}_i = \begin{Bmatrix} \alpha_2(t_i) \\ \alpha_6(t_i) \\ \alpha_3(t_i) + \alpha_5(t_i) \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Выражение (16) можно переписать в виде:

$$\{\varepsilon\}_i = [B]\{g\}_i \tag{18}$$

где
$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (15) в (18), получим выражения, связывающие три составляющих деформаций с перемещениями:

$$\{\varepsilon\}_i = [B][A]^{-1}\{q\}_i. \tag{19}$$

Подставляя далее уравнения (19) в (11), для произвольного момента времени будем иметь:

$$\{\sigma\}_{i+1} = [E]_{i+1}[B][A]^{-1}\{q\}_{i+1} - \omega_{i+1}[E]_{i+1}[B][A]^{-1}\{q\}_{i+1} - \frac{\delta}{\delta_1} G \sum_{j=0}^{i} \left[(1-\omega_j)\Phi_{ji}[B][A]^{-1}\{q\}_j\right]. \tag{20}$$

Подставляя соотношения (19) и (20) в (12), учитывая, что матрицы $[A]$, $[B]$ и вектор $\{q\}_{i+1}$ не зависят от координат, то их можно вынести за знак интеграла в (12), тогда, проинтегрировав, будем иметь

$$\{R^{ф}\}_{i+1} = [K]_{i+1}\{q\}_{i+1}, \tag{21}$$

где $\{R^{ф}\}_{i+1} = \{R\} + \{R^{пл}\}_i + \{R^{вязк}\}_i$ – вектор фактических узловых усилий в момент времени t_{i+1},

$$\{R^{вязк}\}_i = S\frac{\delta}{\delta_1}\sum_{j=0}^{i}\left(G(t_j)(\exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_{j+1})) - \exp(-\delta_1(t_{i+1}-t_j)))\left[[A]^{-1}\right]^T[B]^T\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}[B][A]^{-1}\{q\}_j\right) -$$

вектор дополнительных узловых сил, действующих на конечный элемент, учитывающий вязкоупругие свойства материала к моменту времени t_{i+1},

$\{R^{пл}\}_i = S\omega_i \left[[A]^{-1}\right]^T[B]^T[E]_i[B][A]^{-1}\{q\}_i$ – вектор дополнительных узловых сил, действующих на конечный элемент, учитывающий упругопластические свойства материала к моменту времени t_{i+1}, $[K] = S\left[[A]^{-1}\right]^T[B]^T[E]_{i+1}[B][A]^{-1}$ – матрица жёсткости конечного элемента в момент времени t_{i+1}.

Система линейных алгебраических уравнений (21) представляет собой основное уравнение метода конечных элементов [3, 4, 5]. Глобальная матрица жёсткости для всей системы строится согласно алгоритма, описанного в [5]. В итоге будет получена система линейных алгебраических уравнений вида (21), многократное решение которой, после учёта граничных условий позволит определить НДС вязкоупругопластического грунтового основания.

Алгоритм компьютерного моделирования вязкоупругопластиченских деформаций грунтового основания

1. Задаём исходные данные: физические характеристики (модуль упругости, коэффициента Пуассона, параметры ядра релаксации и закона упругопластического деформирования) плитного фундамента и слоёв грунтового основания, граничные условия и действующие внешние силы.
2. Согласно изложенному в [5] алгоритму формируется матрица жесткости [$К^{гл}$] и вектор узловых усилий **R**.
3. Задаем номер шага итерационного процесса $i = 0$ и временной отрезок $t \in [t_0; t_N]$, на котором исследуется напряженно-деформированное состояние вязкоупругопластического грунтового основания.

4. Учитываются граничные условия, для этого осуществляется корректировка матрицы [$К^{гл}$] и вектора $\{\mathbf{R}\}$. Результатом корректировки матрицы [$К^{гл}$] является понижение ее размерности за счет исключения граничных значений перемещений, при этом не нарушается ленточная и симметричная структура матрицы. В итоге будут получены: новая матрица жесткости [$К^{гл}$]$_i$, новый вектор узловых усилий $\{\mathbf{R}^{ф}\}_i$ (причём на нулевом шаге итерационного процесса полагаем $\{\mathbf{R}^{ф}\}_i = \{\mathbf{R}\}$), вектор неизвестных узловых перемещений и моментов $\{\mathbf{g}\}_i$, вектор известных граничных перемещений и моментов $\{\mathbf{g}^{р}\}$ и вектор номеров граничных узлов.

5. Выполняется предобусловливание Холеского (*Andre-Louis Cholesky*) для матрицы $[К^{гл}]_i$ [8].

6. Осуществляется решение системы линейных алгебраических уравнений вида (21) с предобусловленной матрицей $[К^{гл}]_i$ методом сопряженных градиентов [8].

7. Для каждого конечного элемента по формулам (21) осуществляется вычисление векторов $\{\mathbf{R}^{вязк}\}_i$ и $\{\mathbf{R}^{пл}\}_i$, а затем находится очередной вектор $\{\mathbf{R}^{ф}\}_{i+1}$. При этом для конечных элементов, содержащих граничные узловые точки, учитываются известные перемещения $\{\mathbf{g}^{р}\}$.

8. Сохраняется найденный вектор узловых перемещений $\{\mathbf{g}\}_i$.

9. Увеличиваем номер шага итерации на единицу $i = i + 1$.

10. Если текущее модельное время находится внутри рассматриваемого временного отрезка $t_{i+1} \in [0; t_N]$, то осуществляется переход на шаг 6, иначе – на шаг 11.

11. Выполняется визуализация и сохранение результатов моделирования.

Моделирование напряжённо-деформированного состояния исследуемой системы

На плитный фундамент размером 20 м на 30 м и толщиной 0.4 м действует равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q = 114$ кПа. Модуль упругости плиты Е = 27000 МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.29$.

Грунтовое основание представляет собой слой мергеля мощностью 6.5 м. Ядро релаксации имеет вид (7), где $\delta = 0.05$ $сут^{-1}$, $\delta_1 = 0.02\,сут^{-1}$, E = 9 МПа, $\mu = 0.45$. Функция Ильюшина была принята в виде

$$\omega(\varepsilon_и(t)) = \begin{cases} 0, \varepsilon_и(t) < \varepsilon_п \\ A\left(1 - \dfrac{\varepsilon_п}{\varepsilon_и(t)}\right)^m, \varepsilon_п \le \varepsilon_и(t) \end{cases},$$ где A, m – постоянные величины.

При решении задачи методом конечных элементов рассматриваемая область дискретизировалась 7200 конечными элементами в форме треугольников. Временной шаг выбирался равный 0.5 суткам. Время нахождения решения на отрезке от 0 до 1000 суток составило менее 30 секунд. Стабилизационная осадка 5.55 см приходится на точку 395 суток.

Выводы

1. Согласно результатам верификации предлагаемая математическая модель, алгоритм и программное обеспечение могут быть использованы для исследования вязкоупругопластического деформирования тонких плит со сквоз-

ными вертикальными отверстиями. Относительная погрешность найденных решений не превысила 12%, что делает возможным применять предлагаемую математическую модель для решения практических задач.

2. Достоинством предлагаемой математической модели и методики её исследования является возможность рассматривать напряжённо деформируемое состояние неоднородных в плане или со сквозными вертикальными отверстиями тонких пластинок из вязкоупругопластических материалов со сложной геометрией и с различными граничными условиями, посредством задания различных свойств каждому конечному элементу, дискретизирующему пластинку.

3. В случае принятия гипотезы о постоянстве во времени коэффициента Пуассона μ и модуля упругости E глобальная матрица жёсткости на каждом шаге итерационного процесса будет оставаться неизменной. Следовательно, на нулевом шаге итерационного процесса можно обратить матрицу жёсткости или разложить её на произведение треугольных матриц, а на последующих этапах итерационного процесса уже использовать преобразованную матрицу. Т. о. время, затрачиваемое на нахождение деформаций на каком-либо шаге итерационного процесса, оказалось значительно меньше времени, требуемого для выполнения нулевой итерации, т. е. нахождения мгновенных деформаций.

Литература

1. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. М: Стройиздат, 1982. – 264 с.
2. *Сеськов В.Е.* Биогенные грунты Белоруссии и использование их в качестве оснований зданий и сооружений. – Минск, БелНИИНТИ, 1989. – 48с.
3. *Быховцев В. Е., Сеськов В. Е., Курочка К. С.* Интегральный метод построения математической модели и алгоритма исследования вязкоупругих деформаций грунтовых оснований. – Вестник БНТУ, 2008г., №4, с.17-24
4. *Зенкевич. О.* Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
5. *Курочка К.С.* Построение математической модели сложной системы неоднородных вязкоупругих дисперсных и сплошных твёрдых тел. – Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2007, №4, с. 18-31
6. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
7. *Курочка К.С.* Моделирование осадок водонасыщенного неоднородного грунтового основания под действием вертикальной нагрузки. – Инженерные системы – 2008: Всероссийская научно-практическая конференция: тезисы докладов. Москва, 7-11 апреля 2008 года. – М., РУДН, 2008, с. 46
8. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.

NUMERICAL MODELING OF DEFORMATIONS OF THE INHOMOGENEOUS VISCOELASTOPLASTIC SOIL FOUNDATION

K. Kurachka

The paper is dedicated to the creation of the mathematical model of deformations of the inhomogeneous viscoelastoplastic soil foundation.

The algorithm, which based on the finite elements method, and the software is developed for numerical modeling viscoelastoplastic deformations of inhomogeneous ground bases. By means of the developed software research of presented mathematical model is carried out.

KEY WORDS: deformations, inhomogeneous ground bases, numerical modeling, final elements method, viscoelastoplastic.