

Геометрия срединных поверхностей оболочек

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СИСТЕМОЙ ПЛОСКИХ КООРДИНАТНЫХ ЛИНИЙ

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; (495)955-08-21; ivanov.v.n@stream.ru

Исследуется геометрия поверхностей с системой плоских координатных линий. Получено общее векторное уравнение поверхностей. На основе которого получены формулы основных квадратичных форм. Получено условие, при выполнении которого система плоских координатных линий будет системой главных линий кривизны. Изучен подкласс нормальных поверхностей – поверхностей с системой плоских координатных линий в нормальных плоскостях направляющих линий. В качестве примера на основе общих формул получено уравнение резных поверхностей Монжа. Приведены рисунки поверхностей Монжа с различными плоскими и пространственными направляющими кривыми.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: поверхности с системой плоских координатных линий, векторное уравнение, коэффициенты квадратичных форм, линии главных кривизн, нормальные поверхности, резные поверхности Монжа.

Для расчета и конструирования оболочек необходимо предварительное изучение геометрии поверхностей, по которым очерчены оболочки. Общие вопросы геометрии поверхностей рассматриваются в курсах дифференциальной геометрии [1-4]. Большинство монографий и учебников, посвященных методам расчета тонкостенных конструкций, предваряются кратким изложением общей теории поверхностей. Из частных видов поверхностей в существующей литературе наиболее подробно изучены поверхности вращения, линейчатые поверхности и некоторые другие частные виды поверхностей. Однако, при разработке методов расчета конкретных классов оболочек появляется необходимость более детального изучения геометрии специальных класса поверхностей. Разнообразие геометрических форм практически бесконечно. Перед исследователем встает дилемма: изучать отдельные, частные виды поверхностей, или отдать предпочтение исследованию более широких классов поверхностей. Как показывают практические исследования необходимо сочетать оба направления. Исследования класса поверхностей позволяет получить наиболее общие формулы и свойства, которые затем могут использоваться для изучения более узких классов и групп поверхностей. В то же время изучение конкретных поверхностей, позволяет выявить некоторые свойства, которые затем могут быть обобщены и распространены на более широкий класс объектов.

Одним из широких классов поверхностей являются поверхности с семейством плоских координатных линий. К этому классу относятся большинство используемых на практике поверхностей: поверхности вращения, поверхности переноса, линейчатые поверхности. Априори, по определению, к этому классу поверхностей относятся поверхности, образуемые движением плоской линии: циклические поверхности, резные поверхности Монжа, поверхности Иоахимстала, циклиды Дюпена. Практически любую поверхность можно представить как последовательное положение семейства плоских кривых. Поверхность вращения можно представить как движение окружности переменного радиуса, движущейся вдоль прямой линии центров, или как последовательное положение плоской образующей линии, вращающейся вокруг оси. Эти представления естественны. Однако пытаться описать ту же поверхность вращения на основе плоских кривых, получаемых поступательным движением плоскости парал-

лельной линии центров, нецелесообразно. Аналитические уравнения получаемых таким образом координатных линий будут чрезвычайно сложны, а сама поверхность на основе этих линий трудно воспроизводимой.

Поверхности с семейством плоских координатных линий можно разбить на два подкласса:

1. Поверхности, образуемые движением некоторой плоской кривой (образующей), по какому либо выбранному закону в пространстве. При этом, при своем движении образующая кривая также трансформируется по некоторому закону.

2. Поверхности, образуемые плоской кривой, концы которой перемещаются по двум направляющим кривым. Между направляющими кривыми устанавливается некоторый закон соответствия координат направляющих кривых, через которые проходит образующая кривая. В общем случае образующая кривая может трансформироваться по некоторому закону по некоторому закону.

Примером поверхностей 2-го подкласса могут служить торсовые поверхности, образуемые движением прямой линии по двум направляющим кривым. Условием соответствия координатных точек направляющих кривых, через которые проходит образующая прямая, является условие, что касательные к направляющим кривым в опорных точках образующей кривой лежат в общей плоскости, являющейся касательной плоскостью торсовой поверхности [5]. К подклассу поверхностей 2-го типа относятся также поверхности Кунса [6], верароидальные поверхности [7] и др. В данной статье рассматриваются подкласс поверхностей с системой плоских координатных линий 1-го типа.

Поверхность, получаемая движением в пространстве трансформирующейся в процессе перемещения плоской линией (рис. 1.) может быть описана следующим образом. Пусть задана некоторая пространственная или плоская направляющая кривая $r \in \mathbb{R}^3$. Кривая сопровождается трехгранником Френе (τ, ν, β – векторы касательной, нормали и бинормали). Зададим в каждой точке направляющей кривой секущую плоскость, положение которой определяем с помощью вектора единичной нормали $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$ (рис. 1).

Вектор нормали может быть представлен, например, в виде разложения по трехграннику Френе направляющей кривой

$$\bar{n} \in \mathbb{R}^3 = \alpha \tau + \beta \nu + \gamma \beta. \quad (1)$$

Для описания уравнения образующей кривой в секущей плоскости задаются орты прямоугонльной системы координат $e_0(u)$ и $g_0 \in \mathbb{R}^3$ с центром на направляющей кривой. Вместе с вектором единичной нормали к секущей плоскости $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$ эти вектора составляют подвижный ортогональный репер на направляющей кривой. Очевидно, независимыми являются лишь две вектор-функции $\bar{n} \in \mathbb{R}^3$ и $e_0(u)$. При этом, выбирая направление вектора $e_0(u)$ в секущей плоскости, можно получать наиболее удобную поверхностную систему координат, например, требуя ортогональности получаемой поверхностной координатной системы. Третья вектор-функция определяется из условия ортогональности, как векторное произведение $g_0 \in \mathbb{R}^3 = \bar{n} \in \mathbb{R}^3 \times e_0 \in \mathbb{R}^3$.

В секущей плоскости задается уравнение плоской образующей кривой $R \in \mathbb{R}^2, v$, трансформирующейся по определенному закону при движении плоскости вдоль направляющей кривой. Для записи уравнения образующей кривой, в частности, может использоваться полярная система координат, для чего в секущей плоскости вводится векторное уравнение окружности единичного радиуса

$$e \in \mathbb{R}^2, v = e_0 \in \mathbb{R}^2 \cos v + g_0 \in \mathbb{R}^2 \sin v, \quad (2)$$

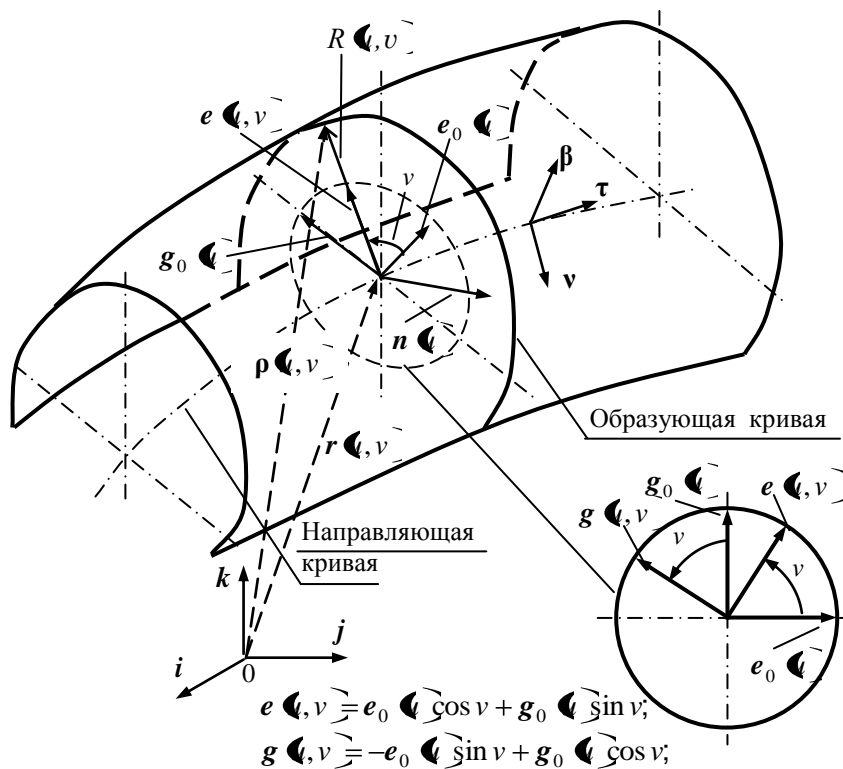


Рис. 1. Поверхность с системой плоских координатных линий

где v – полярный угол, отсчитываемый в секущей плоскости от орта $e_0(u)$ в направлении орта $g_0(u)$. Вектор $g(u, v) = -e_0(u) \sin v + g_0(u) \cos v$, ортогональный вектору $e(u, v)$, тоже лежит в секущей плоскости и также является уравнением окружности единичного радиуса. Вектора $e(u, v)$, $g(u, v)$ вращаясь вокруг вектора нормали $n(u)$, составляют вместе с вектором нормали подвижный репер на направляющей кривой $r(u)$. Как и вектор нормали, они могут быть представлены в виде разложения по трехграннику Френе:

$$e(u, v) = \tau \bar{e} + \bar{v} \bar{g} + \beta \bar{n}; \quad g(u, v) = \tau \bar{g} + \bar{v} \bar{e} + \beta \bar{n}, \quad (3)$$

как и наоборот, вектора $\bar{\tau}$, \bar{v} , $\bar{\beta}$ могут быть представлены в виде разложения по реперу e, g, n .

При дифференцировании по аргументу v , вектор-функции $e(u, v)$, $g(u, v)$ взаимно переходят друг в друга:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = -e_0 \sin v + g_0 \cos v = g; \quad \frac{\partial g}{\partial v} = -e; \quad (4)$$

С учетом введенных обозначений уравнение поверхности с системой плоских координатных линий (рис. 1) в векторной форме может быть записано в виде

$$\bar{\rho}(u, v) = r(u) + R(u, v) \bar{e}(u, v), \quad (5)$$

где $\bar{\rho}(u, v)$ – радиус-вектор поверхности;

Отметим свойства вектор-функций $\bar{e}(u, v)$, $\bar{g}(u, v)$, $\bar{n}(u)$. Так как эти вектор-функции являются взаимно ортогональными векторами единичной длины, то:

$$\bar{e} \cdot \bar{g} = \bar{e} \cdot \bar{n} = \bar{g} \cdot \bar{n} = 0; \quad \bar{e} \cdot \bar{e} = \bar{g} \cdot \bar{g} = \bar{n} \cdot \bar{n} = 1; \quad \bar{e} \times \bar{g} = \bar{e}; \quad \bar{g} \times \bar{e} = -\bar{g}; \quad \bar{e} \times \bar{n} = \bar{g}; \quad \bar{g} \times \bar{n} = \bar{e}; \quad (6)$$

$$\bar{e}' \cdot \bar{e} = \bar{g}' \cdot \bar{g} = \bar{n}' \cdot \bar{n} = 0; \quad \bar{e}' \cdot \bar{g} = -\bar{g}' \cdot \bar{e}; \quad \bar{e}' \cdot \bar{n} = -\bar{g}' \cdot \bar{n}; \quad \bar{g}' \cdot \bar{n} = -\bar{e}' \cdot \bar{n}; \quad (7)$$

Здесь и далее для удобства записи будем использовать обозначения частных производных по аргументам u, v : $\partial f / \partial u = f_u = f'$ и $\partial f / \partial v = f_v = \dot{f}$.

Используя формулы (4), (6), (7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' \mathbf{g} &= \mathbf{e}'_0 \cos v + \mathbf{g}_0 \sin v; \quad \mathbf{e}_0 \sin v + \mathbf{g}_0 \cos v \\ &= \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \cos^2 v - \mathbf{e}_0 \mathbf{g}'_0 \sin^2 v = \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

Именно свойства, описываемые формулами (4), (6) – (8), показывают целесообразность введения вектор-функцией $\mathbf{e}(u, v)$, $\mathbf{g}(u, v)$.

Впервые уравнение вектор-функции единичной окружности в произвольной плоскости было использовано при исследовании геометрии циклических поверхностей [8, 9]. Вектор-функции окружности единичного радиуса обычно использовались в горизонтальной плоскости для поверхностей вращения. Введение вектор-функций окружностей единичного радиуса в произвольной плоскости позволило исследовать геометрию циклических поверхностей в общем виде. Попытки ряда авторов провести аналогичные исследования в скалярной форме приводят к громоздким формулам и не позволяют эффективно проанализировать полученные результаты. Обобщение исследований по геометрии циклических позволило перейти к изучению геометрии поверхностей с семейством плоских координатных линий общего вида [10-16].

Формулы (6), (7) позволяют получить разложение производных вектор функций $\mathbf{e}(u, v)$, $\mathbf{g}(u, v)$ по аргументу u на репер $\mathbf{e}(u, v)$, $\mathbf{g}(u, v)$, $\mathbf{n}(u, v)$, используя производные только исходных (задаваемых) функций $\mathbf{n}(u, v)$ и $\mathbf{e}_0(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \mathbf{e}' \mathbf{g} \mathbf{g} + \mathbf{e}' \mathbf{n} \mathbf{n} = \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g} - \mathbf{e}' \mathbf{n} \mathbf{n}; \\ \mathbf{g}' &= \mathbf{e}' \mathbf{g}' \mathbf{g} + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n} = -\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' - \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n}; \quad \mathbf{n}' = \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g} + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n}; \\ \mathbf{e}'' &= -\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' - \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n}' + 2 \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n} + \\ &\quad + \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}'_0 \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' - \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' \mathbf{g}; \\ \mathbf{g}'' &= -\mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}'_0 \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' \mathbf{g} - \\ &\quad - \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{g} - \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' + 2 \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n}; \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференцируя векторное уравнение поверхности (2) по аргументам u, v , разлагая вектора \mathbf{r} , \mathbf{v} на репере $\mathbf{e}, \mathbf{g}, \mathbf{n}$ и, используя формулы (9), получим

$$\begin{aligned} \rho_u &= T_{11} \mathbf{e} + T_{12} \mathbf{g} + T_{13} \mathbf{n}; \quad \rho_v = T_{21} \mathbf{e} + T_{22} \mathbf{g} + T_{23} \mathbf{n}; \\ \rho_{uu} &= T_{31} \mathbf{e} + T_{32} \mathbf{g} + T_{33} \mathbf{n}; \quad \rho_{uv} = T_{41} \mathbf{e} + T_{42} \mathbf{g} + T_{43} \mathbf{n}; \quad \rho_{vv} = T_{51} \mathbf{e} + T_{52} \mathbf{g} + T_{53} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $T_{11} = s' \mathbf{e}' \mathbf{e} + R'$; $T_{12} = s' \mathbf{e}' \mathbf{g} + R \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0$; $T_{13} = s' \mathbf{e}' \mathbf{n} + R \mathbf{e}' \mathbf{n}'$;

$$T_{21} = \dot{R}; \quad T_{22} = R; \quad T_{23} = 0; \quad T_{31} = s'' \mathbf{e}' \mathbf{e} + s' k_s \mathbf{e}' \mathbf{v} + R \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' + R'';$$

$$T_{32} = s'' \mathbf{e}' \mathbf{g} + s' k_s \mathbf{e}' \mathbf{v} + 2R' \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + R \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}' + \mathbf{e}'_0 \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' - \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' \mathbf{n}' \mathbf{g};$$

$$T_{33} = s'' \mathbf{e}' \mathbf{n} + s' k_s \mathbf{e}' \mathbf{v} + 2R' \mathbf{e}' \mathbf{n}' + R \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' + 2 \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n};$$

$$T_{41} = \dot{R}' - R \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}'; \quad T_{42} = R' + \dot{R} \cdot \mathbf{e}'_0 \mathbf{g}_0 \mathbf{g}';$$

$$T_{43} = -\mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{g}' + \dot{R} \mathbf{e}' \mathbf{n}' \mathbf{n}; \quad T_{51} = \ddot{R} - R; \quad T_{52} = 2\dot{R}; \quad T_{53} = 0. \quad (11)$$

$$s' = |r'| = |dr/du|; \quad k_s = s' k; \quad k - \text{кривизна направляющей кривой } r(u, v).$$

На основе формул дифференциальной геометрии с учетом формул (10) получаем коэффициенты квадратичных форм поверхности.

A. Коэффициенты 1-й квадратичной формы:

$$E = \mathbf{e}'_u \rho_u = T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2; \quad G = \mathbf{e}'_v \rho_v = T_{21}^2 + T_{22}^2 = R^2 + \dot{R}^2;$$

$$F = \mathbf{e}'_u \rho_v = T_{11} \cdot T_{21} + T_{12} \cdot T_{22}. \quad (12)$$

Б. Дискриминант поверхности:

$$\Sigma^2 = EG - F^2 = |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|^2 = G \cdot T_{13}^2 + d_{12}^2; \quad d_{12} = T_{11} \cdot T_{22} - T_{12} \cdot T_{21}; \quad (13)$$

В. Вектор единичной нормали к поверхности:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} = \frac{\mathbf{e} T_{22} + \mathbf{g} T_{21}}{\Sigma} T_{13} + d_{12} \mathbf{n}. \quad (14)$$

Г. Коэффициенты 2-й квадратичной формы:

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{uu} = \frac{\mathbf{e} T_{21} T_{32} - T_{22} T_{31}}{\Sigma} T_{13} + d_{12} T_{33}; \\ M &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{uv} = \frac{\mathbf{e} T_{21} T_{42} - T_{22} T_{41}}{\Sigma} T_{13} + d_{12} T_{43} = \frac{\mathbf{e}' g_0 - \phi_2}{\Sigma} T_{13} + d_{12} T_{43}; \\ N &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}_{vv} = \frac{\mathbf{e} T_{21} T_{52} - T_{22} T_{51}}{\Sigma} T_{13} = \frac{\mathbf{e} - \phi_1}{\Sigma} T_{13}, \\ \phi_1 &= \mathbf{e} \ddot{R} - \dot{R}^2; \quad \phi_2 = R \dot{R}' - \dot{R} R'. \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (12)-(15) представляют геометрические характеристики поверхностей с семейством плоских координатных линий самого общего типа. Это чрезвычайно широкий класс поверхностей. Из формул (12), (15) видно, что, в общем случае, коэффициенты F , M не равны нулю, и, следовательно, получаемая система координат поверхности не является ни ортогональной, ни сопряженной, и семейства координатных линий $u = const$, $v = const$ не являются в общем случае линиями главных кривизн поверхности.

Приравнивая нулю формулы коэффициентов F или M можно получить соотношения для параметров поверхности, при которых система координат поверхности будет соответственно ортогональной или сопряженной.

Важным подклассом исследуемых поверхностей – подкласс поверхностей с системой плоских образующих координатных линий, являющихся линиями главных кривизн. Система уравнений тонких оболочек, записанная для линий кривизны, имеет наиболее простой вид. При использовании численных методов расчета ортогональная поверхностная система координат также является наиболее удобной.

Чтобы образующие кривые – семейство координатных линий $u = const$ являлись линиями главных кривизн поверхности, должно выполняться соотношение между коэффициентами квадратичных форм

$$M G - N F = 0. \quad (16)$$

Сокращая в соотношении (16) общий знаменатель (дискриминант Σ) с учетом формул коэффициентов (12), (15), получим

$$\mathbf{e}' g_0 - \phi_2 \bar{G} - \mathbf{e} - \phi_1 \bar{F} T_{13} + G d_{12} T_{43} = 0. \quad (17)$$

Подставляя в соотношение (17) формулы коэффициентов T_{ij} и вводя ряд обозначений, имеем

$$\begin{aligned} F &= T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} = \dot{R} \mathbf{e}' + R \mathbf{e} g_0 = F_1 + F_2; \\ F_1 &= \dot{R}^2 \mathbf{e}' g_0 + \dot{R} R'; \quad F_2 = s' \mathbf{e}' + R \mathbf{e} g_0; \\ d_{12} &= T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} = R \mathbf{e}' + R' - \dot{R} \mathbf{e}' g_0 = d_1 + d_2; \\ d_1 &= R \mathbf{e}' - \dot{R} \mathbf{e}' g_0; \quad d_2 = s' \mathbf{e}' - \dot{R} \mathbf{e} g_0; \\ f &= \mathbf{e}' g_0 - \phi_2 \bar{G} - \mathbf{e} - \phi_1 \bar{F} = \\ &= \mathbf{e}' g_0 - \mathbf{e} \ddot{R} - \dot{R} R' - \phi_2 \bar{G} - \mathbf{e} - \phi_1 \dot{R}^2 \mathbf{e}' g_0 + \dot{R} R' = \\ &= \mathbf{e}' g_0 - R^2 \mathbf{e}' \ddot{R} - \dot{R}^2 \mathbf{e}' g_0 - G R R' + \phi_1 \dot{R} R' = \mathbf{e}'^4 + R^3 \ddot{R} \mathbf{e}' g_0 - G R R' + \dot{R} R' \phi_1. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, условие (17) запишем в виде:

$$\Psi_1 \cdot \underline{\mathbf{e}n'} + \Psi_2 \cdot \underline{\mathbf{e}n'} + \Psi_3 \cdot s' \cdot \underline{\mathbf{e}n} = 0, \quad (18)$$

где $\Psi_1 = -\underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{G}} - \phi_1 \underline{\mathbf{F}}_2 + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{Q}}_1 + d_2 \right]$; $\Psi_2 = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} d_{12}$; $\Psi_3 = s' \left[\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{G}} - \phi_1 \underline{\mathbf{F}}_2 \right]$;
 $\psi_{1,1} = -\underline{\mathbf{R}} f - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} d_1 = -\underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{R}}^4 + \underline{\mathbf{R}}^3 \underline{\mathbf{R}} \right] \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 - \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' \phi_1 - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} \left[\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right]$;
 $= \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{G}} - \left(\underline{\mathbf{R}}^4 + \underline{\mathbf{R}}^3 \underline{\mathbf{R}} \right) \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] + \left[\underline{\mathbf{F}} \left(\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' \right) - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' \phi_1 \right]$;
 $= \underline{\mathbf{R}} \left[\phi_2 - \left[\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] \phi_1 \right]$;
 $\psi_{1,2} = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} - \phi_1 \underline{\mathbf{F}}_2 - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} d_2 = \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{F}} - \phi_1 \underline{\mathbf{F}}_2 \right] \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} s' \left[\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \right] - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} - \left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] \underline{\mathbf{R}} \phi_1 + s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{G}}^2$;
 $\Psi_1 = \psi_{1,1} + \psi_{1,2} = \underline{\mathbf{R}} \left[\phi_2 - \left[\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] \phi_1 \right] \left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] \underline{\mathbf{R}} \phi_1 + s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{G}}^2 =$
 $= -\underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] \left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] \phi_1 + \underline{\mathbf{G}} \left[\phi_2 + s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \right] \underline{\mathbf{G}}$;
 $\Psi_2 = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} d_{12} = -\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{G}} \left[\underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] - \left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] \right]$;
 $\Psi_3 = \left[\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{G}} - \phi_1 \underline{\mathbf{F}}_2 \right] = \underline{\mathbf{R}}^4 + \underline{\mathbf{R}}^3 \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] - \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' \phi_1 - \left[\underline{\mathbf{F}} - \phi_1 \right] \left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right]$;
 $\phi_1 = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}^2 = \underline{\mathbf{R}}^2 \cdot \left(\underline{\mathbf{R}} / \underline{\mathbf{R}} \right)$; $\phi_2 = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' = \underline{\mathbf{R}}^2 \cdot \left(\underline{\mathbf{R}}' / \underline{\mathbf{R}} \right) = \underline{\mathbf{R}}^2 \cdot \left(\underline{\mathbf{R}}' / \underline{\mathbf{R}} \right)$;
 $\left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] = s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{R}} + s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{R}}$; $\left[\underline{\mathbf{R}} s' \underline{\mathbf{e}} \right] = -s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{R}} + s' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{R}}$. (19)

Условие (18) представляет собой довольно сложное соотношение, трудно анализируемое в общем виде. Но оно может использоваться при исследовании различных подклассов поверхностей.

Рассмотрим подкласс нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий. *Нормальными поверхностями* будем называть поверхности, система плоских образующих координатных линий которых лежит в нормальных плоскостях направляющей линии. К этому классу поверхностей относятся, например, поверхности вращения и резные поверхности Монжа. Для таких поверхностей нормаль секущей плоскости совпадает с касательной направляющей линии $\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{t}}$ и, следовательно,

$$\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{g}} = 0; \quad \underline{\mathbf{n}}' = \underline{\mathbf{t}}' = s' k \underline{\mathbf{v}} = k_s \underline{\mathbf{v}}; \quad \underline{\mathbf{n}}'' = \underline{\mathbf{e}}_s \underline{\mathbf{v}} = -s' k_s \underline{\mathbf{t}} + k'_s \underline{\mathbf{v}} + k_s \chi_s \underline{\mathbf{\beta}};$$

$$\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{n}}' = k_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}}; \quad \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{n}}'' = k_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}}; \quad \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{n}}''' = k'_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} + k_s \chi_s \underline{\mathbf{\beta}}. \quad (20)$$

Здесь k, χ – кривизна и кручение направляющей кривой, $k_s = s' k$; $\chi_s = s' \chi$.

Введение параметров k_s, χ_s целесообразно, так как эти сочетания обычно более просты, чем отдельно кривизна и кручение, и, следовательно, их введение упрощает дальнейшие преобразования. Система коэффициентов T_{ij} для нормальных поверхностей запишется в виде:

$$T_{11} = \underline{\mathbf{R}}'; \quad T_{12} = \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0; \quad T_{13} = s' - \underline{\mathbf{R}} k_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}}; \quad T_{21} = \underline{\mathbf{R}}; \quad T_{22} = \underline{\mathbf{R}}; \quad T_{23} = 0;$$

$$T_{31} = s' k_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] + k_s^2 \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{R}}'';$$

$$T_{32} = s' k_s \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} + 2 \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}''_0 \underline{\mathbf{g}}_0 + k_s^2 \left[\underline{\mathbf{e}}_0 \underline{\mathbf{v}} \underline{\mathbf{e}}_0 \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} \right];$$

$$T_{33} = s'' - 2 k_s \underline{\mathbf{R}}' \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{e}}' \underline{\mathbf{v}} \right] + k_s \square \underline{\mathbf{\beta}} + 2 k_s \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}};$$

$$T_{41} = \underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0; \quad T_{42} = \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0; \quad T_{43} = -k_s \left[\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} \right] + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}};$$

$$T_{51} = \underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{R}}; \quad T_{52} = 2 \underline{\mathbf{R}}; \quad T_{53} = 0. \quad (21)$$

Условие (2.1.3) (плоские образующие кривые являются линиями кривизны поверхности) для нормальных поверхностей принимает вид:

$$k_s \underline{\mathbf{R}} \left[\underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] \phi_1 + \underline{\mathbf{G}} \phi_2 \left[\underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} \right] - k_s \underline{\mathbf{R}}^2 \underline{\mathbf{G}} \left[\underline{\mathbf{R}}' - \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 \right] \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{v}} +$$

$$+ s' \left[\underline{\mathbf{R}}^4 + \underline{\mathbf{R}}^3 \underline{\mathbf{R}} \right] \underline{\mathbf{e}}'_0 \underline{\mathbf{g}}_0 - \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' + \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{R}}' \phi_1 = 0. \quad (22)$$

Полученное условие существенно зависит от видов направляющей и образующей кривых и характера изменения образующей кривой при движении вдоль направляющей кривой. Очевидно, условие (22) может существенно упроститься, если характер изменения образующих кривых будет зависеть только от одного параметра u или v .

В качестве примера использования полученных выше результатов рассмотрим резные поверхности Монжа. Г. Монж ввел в рассмотрение поверхности, образованные движением плоской кривой, лежащей в касательной плоскости некоторой развертывающейся поверхности, которая катится без скольжения по развертывающейся поверхности [16]. Поверхности названы *резными поверхностями*. В литературе часто используется название *резные поверхности Монжа*. Любая точка, лежащая в касательной плоскости развертывающейся поверхности, совершает при качении плоскости движение ортогональное положению касательной плоскости в каждый момент движения. Следовательно, плоская образующая кривая лежит в нормальной плоскости кривой, описываемой любой точкой, лежащей в той же касательной плоскости что и образующая кривая. Следовательно, резная поверхность Монжа является *нормальной поверхностью*. Так как образующая кривая резной поверхности не изменяется в процессе движения вдоль направляющей кривой, то

$$R = R(\underline{e}_0), \quad R' = R'' = \dot{R}' = 0, \quad \phi_2 = 0.$$

Рассмотрим условие, при выполнении которого образующие кривые поверхности будут линиями главных кривизн поверхности. Используя формулу (22), получим

$$\left[\left(\underline{e}_0^4 + R^3 \ddot{R} \right) - k_s R^3 \phi_1(\underline{e}_0 \underline{v}) + k_s R^2 \dot{R} G(\underline{e}_0 \underline{v}) \right] \underline{e}_0' g_0 = 0. \quad (23)$$

Очевидно, чтобы выполнялось (23), достаточно приравнять нулю множитель $\underline{e}_0' g_0$. Так как вектор e_0 лежит в нормальной плоскости направляющей кривой, то

$$\begin{aligned} \underline{e}_0 &= \underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} + \underline{e}_0 \underline{\beta} \underline{\beta}; & \underline{e}_0 \underline{\beta} &= -\underline{e}_0 \underline{v}; & \underline{e}_0 \underline{v} &= \underline{e}_0 \underline{\beta}; \\ \underline{e}_0 \underline{v} + \underline{e}_0 \underline{\beta} &= 1; & \underline{e}_0 \underline{\beta} &= -\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} \underline{e}_0 \underline{\beta}. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \underline{e}_0' g_0 &= \left[\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} + \underline{e}_0 \underline{\beta} \underline{\beta} \right] g_0 + \left[\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v}' + \underline{e}_0 \underline{\beta} \underline{\beta}' \right] g_0 = \\ &= \underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} \left[\underline{v} - \frac{\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v}}{\underline{e}_0 \underline{\beta}} \right] g_0 + \chi_s \left[\underline{e}_0 \underline{v} \underline{\beta} - \underline{e}_0 \underline{\beta} \underline{v} \right] g_0 = \frac{\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v}}{\sqrt{1 - \underline{e}_0 \underline{v} \underline{v}}} + \chi_s = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее соотношение, получим

$$\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} = \cos \theta, \quad (24)$$

где $\theta(\underline{e}_0 \underline{v} \underline{v}) = -\int \chi_s du + \theta_0$, θ_0 – начальный угол ($u = 0$) между вектором e_0 и вектором нормали \underline{v} направляющей кривой (константа интегрирования).

Таким образом, при движении плоской образующей кривой вдоль пространственной направляющей кривой резной поверхности Монжа угол между нормалью направляющей кривой и координатной системой e_0, g_0 образующей кривой изменяется. В случае плоской направляющей кривой ($\chi_s = 0$) этот угол остается постоянным $\theta = \theta_0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \underline{n} &= \underline{\tau}; \quad \underline{n}' = k_s \underline{v}; \quad \underline{n}'' = -k_s^2 \underline{\tau} + k_s' \underline{v} + k_s \chi_s \underline{\beta}; \quad \underline{e}_0 \underline{\tau} = \underline{e}_0 \underline{\tau} = 0; \\ \underline{e}_0' &= -\underline{e}_0 \underline{n}' \underline{n} = -k_s \underline{e}_0 \underline{v} \underline{\tau}; \quad \underline{e}_0' g_0 = -k_s^2 \underline{e}_0 \underline{v} \underline{e}_0 \underline{v}; \\ \underline{e}_0 \underline{v} &= \underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} \sin v + \underline{e}_0 \underline{v} \underline{v} \sin v = \cos \theta \cos v - \sin \theta \sin v = \cos \omega; \\ \underline{e}_0 \underline{\beta} &= \sin \omega; \quad \underline{e}_0 \underline{v} = -\sin \omega; \quad \underline{e}_0 \underline{\beta} = \cos \omega; \quad \omega = v + \theta. \end{aligned}$$

И с учетом формул (21) получим

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{12} = 0; \quad T_{13} = s' - Rk_s \cdot \cos \omega; \quad T_{21} = \dot{R}; \quad T_{22} = R; \quad T_{23} = 0; \\ T_{31} = T_{13}k_s \cos \omega; \quad T_{32} = -T_{13}k_s \sin \omega; \quad T_{33} = s'' - Rk'_s \cos \omega - Rk_s \chi_s \sin \omega; \\ T_{41} = T_{42} = 0; \quad T_{43} = -k_s \left[R \cos \omega \right]; \quad T_{51} = \ddot{R} - R; \quad T_{52} = 2\dot{R}. \end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициенты квадратичных форм:

$$\begin{aligned} A = \sqrt{E} = s' - k_s R \cos \omega; \quad B = \sqrt{G} = \sqrt{R^2 + \dot{R}^2} = s'_0; \quad F = 0; \quad \Sigma = AB; \\ \bar{m} = \frac{-Re + \dot{R}g}{B}; \quad L = - \left[R \cos \omega \right] k_s \frac{A}{B}; \quad M = 0; \quad N = \frac{R(\ddot{R} - R) + 2\dot{R}^2}{B}. \end{aligned} \quad (26)$$

Главные кривизны:

$$k_1 = \frac{R \cos \omega + \dot{R} \sin \omega}{AB} k_s; \quad k_2 = \frac{R(\ddot{R} - R) + 2\dot{R}^2}{B^3} = k_0. \quad (27)$$

Здесь, s'_0, k_0 – дифференциал и кривизна образующей кривой. То, что кривизна k_2 резной поверхности равна кривизне образующей кривой, показывает, что образующие резной поверхности Монжа являются геодезическими линиями этой поверхности.

Если направляющей плоской кривой является окружность $r = a = const$, то резная поверхность является поверхностью вращения. При этом получим: $s' = a$; $k = 1/a$; $k_s = 1$; $\theta = \theta_0$. С учетом этих соотношений коэффициенты квадратичных форм и главные кривизны вычисляются по формулам (26), (27).

Если радиус направляющей окружности стремится к нулю ($s' = 0$), то получаем поверхность вращения в сферической системе координат.

Если уравнение образующей плоской кривой резной поверхности задано в параметрической форме в прямоугольной системе координат:

$$X = X(\varphi); \quad Y = Y(\varphi), \quad (28)$$

то уравнение резной поверхности получим в виде

$$\rho(\varphi, v) = r(\varphi) + X e_0(\varphi, \theta) + Y g_0(\varphi, \theta), \quad (29)$$

где $e_0(\varphi, \theta) = v \cos \theta + \beta \sin \theta$, $g_0(\varphi, \theta) = -v \sin \theta + \beta \cos \theta$ – орты прямоугольной системы координат в нормальной плоскости направляющей линии $\vec{r}(\varphi)$; $\theta = \theta(\varphi) = -\int \chi_s du + \theta_0$ – угол, образуемый ортами e_0, g_0 с нормалью \mathbf{v} и бинормалью β пространственной направляющей кривой. Для плоской направляющей кривой принимается $\theta = \theta_0 = const$, в частности $\theta_0 = 0$.

Примеры резных поверхностей выполненных в системе Mathcad приведены на рис.2. Использовались уравнения поверхностей в линиях кривизны.

Резные поверхности с направляющим эллипсом $x = 2,5 \cos u$; $y = \sin u$ и образующими: (рис. 2, а) – парабола $z = 0,1v^2$ ($0 \leq v \leq 1$); (рис. 2, б) – синусоида $\tilde{z} = 0,5 \sin(\varphi v)$ ($0 \leq v \leq \pi, p = 6$) с осью повернутой к плоскости эллипса на 30° .

На рис. 2, в направляющая кривая – парабола $x = u, y = u^2$ ($-1 \leq u \leq 1$), образующая – синусоида $z = 2 \sin(\varphi v)$, $0 \leq v \leq \pi, p = 4$. На рис. 2, г направляющая – эвольвента круга $x = 0,5(\cos u + u \sin u)$, $y = 0,5(\sin u - u \cos u)$ ($\pi/2 \leq u \leq 4\pi$), образующая – гипербола $x = 0,5chv$; $y = 0,8shv$, $-1,5 \leq v \leq 1,5$.

На рис. 2, д, е направляющая – коническая плоская спираль $x = 5e^{0,08u} \cos u$, $y = 5e^{0,08u} \sin u$ ($0 \leq u \leq 4\pi$), образующая – циклоида $\tilde{x} = a(v - \sin v)$, $\tilde{y} = a(1 - \cos v)$: д) $a = -2$, е) $a = -2$, ($-\pi \leq v \leq 3\pi$).

На рис. 2, *ж* направляющая – прямая линия (ось z), образующая – парабола $z = v^2$ с углом наклона к направляющей 30° (поверхность вращения).

Резные поверхности с направляющей винтовой линией $x = 8\cos u$, $y = 8\sin u$, $z = 2u$ и образующими; парабола (рис. 2, *з*), эллипс (рис. 2, *и*), синусоида (рис. 2, *к*) и прямая (рис. 2, *л*).

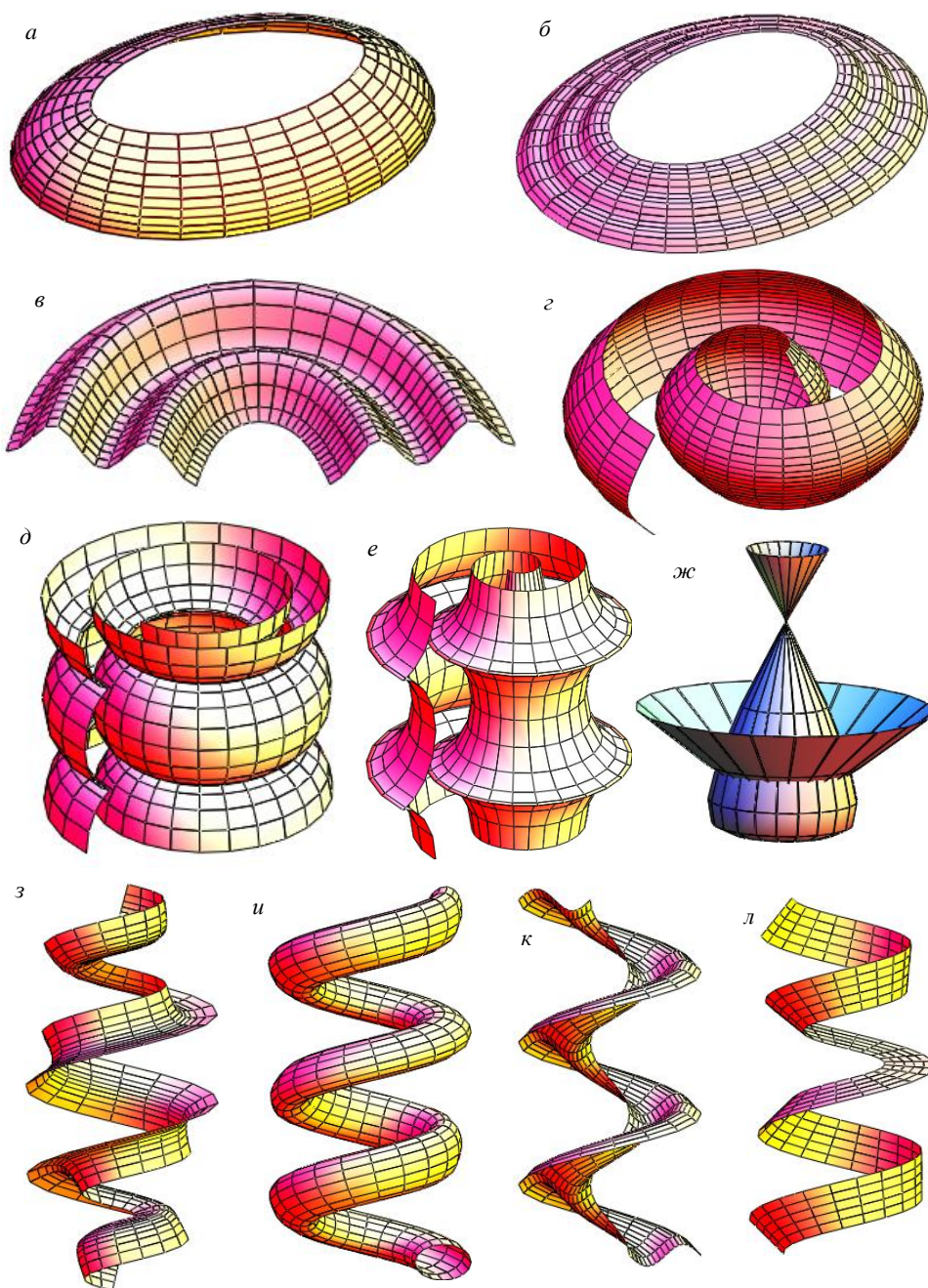


Рис. 2. Резные поверхности

Л и т е р а т у р а

1. *Выгодский М.Я.* Дифференциальная геометрия. – М., Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
2. *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей. – М., Л.: ОГИЗ, 1947, т. 1. – 512 с.; 1948, т. 2. – 408 с.
3. *Милнский В.И.* Дифференциальная геометрия. – Л.: Изд-во «Кубуч», 1934. – 332 с.

4. *Раевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М., Л.: ГИТТЛ, 2004. – 428 с.
5. *Кривошапко С.Н.* Торсовые поверхности и оболочки: Справочник. – М.: Изд-во УДН, 1991. – 288 с.
6. *Иванов В.Н.* Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.– 2007.– № 4.– С. 5-10.
7. *Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л.* Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 9-12.
8. *Иванов В.Н.* Геометрия циклических поверхностей// Сб. научных трудов аспирантов инженерного факультета. – Вып. VIII. – М.: УДН, 1971. – С. 137-142.
9. *Иванов В.Н.* Теория расчета оболочек в форме циклических поверхностей// Доклады научно-технической конференции инженерного факультета. – М.: УДН, 1971. – С. 27-29.
10. *Иванов В.Н.* Некоторые вопросы теории поверхностей с семейством плоских координатных линий// Расчет оболочек строительных конструкций. – М.: УДН, 1977. – С. 37-48.
11. *Иванов В.Н., Ризван Мухаммад.* Геометрия резных поверхностей Монжа и конструирование оболочек// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сб. научных трудов, вып. 11. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – С. 27-36.
12. *Иванов В.Н., Наср Юнес Аббуши.* Архитектура и конструирование оболочек в форме волнистых, зонтичных и каналовых поверхностей Иоахимсталя// Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2002. – № . – С. 21-24.
13. *Иванов В.Н.* Геометрия и конструирование оболочек на основе поверхностей с системой координатных линий в плоскостях пучка// Пространственные конструкции зданий и сооружений/ Сб. научных трудов МОО «Пространственные конструкции». – Вып. 9. – М.: «Девятка ПРИНТ», 2004. – С. 26-35.
14. *Иванов В.Н.* Сферические кривые и геометрия поверхностей на опорной сфере// Современные проблемы геометрического моделирования/ Материалы Україно-Российской научно-практической конференции, Харьков, 19-22 апреля 2005 г. – Харьков: 2005. – С. 114-120
15. *Иванов В.Н.* Конструирование оболочек на основе параболо-синусоидальных поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 2. – 2005. – С. 15-25.
16. *Монж. Г.* Приложение анализа к геометрии. – М.: ОНТИ, 1936.

SOME ASPECTS OF THE GEOMETRY OF THE SURFACES WITH THE SYSTEM OF PLANE COORDINATE LINES

V.N. Ivanov

In the article, the geometry of the surfaces with the system of the plane coordinate lines is investigated. The common vector formula of these surfaces is received.

The formulas of the coefficients of the quadratic forms are presented too. The conditions, when of the plane coordinate lines are lines of the principle curvatures of the surface, are received.

The subclass of the surfaces with the system of the plane coordinate lines in the normal plane of the directrix curve is investigated. The formula of the Monge's ruled surfaces is received on the base of the common formula.

The drawings of the Monge's ruled surfaces made in MathCad system are shown.

KEY WORDS: surfaces with the system of plane coordinate lines, a vector equation, quadratic forms, lines of principle curvatures, normal surfaces, ruled Monge's surfaces.