

**ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК**

И.Н. СЕРПИК\*, д-р техн. наук, профессор

С.Е. УДАЛОВ\*\*, инженер

Л.Г. СЕРПИК\*, канд. техн. наук, доцент

\* Брянская государственная инженерно-технологическая академия;

\*\* Брянский государственный технический университет;

241037, г. Брянск, пр. Станке Димитрова, 3, E-mail: iserpik@online.debryansk.ru

*Предложен плоский треугольный конечный элемент для расчета тонких оболочек, в котором аппроксимация мембранных и изгибных деформаций осуществляется с помощью предельной трактовки конечно-элементного анализа. Увеличение степени согласованности по углам поворота между конечными элементами достигается на основе штрафных функций. Высокая точность рассматриваемой схемы дискретизации оболочек проиллюстрирована на примерах расчета цилиндрической панели и оболочки в виде гиперболического параболоида.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** оболочки, треугольный конечный элемент, сходимость, мембранные деформации, изгибные деформации.

**Введение**

В последнее время продолжает уделяться большое внимание вопросу разработки эффективных конечных элементов для расчета оболочек [1-3]. Особый интерес при этом представляют плоские конечные элементы, так как они могут быть наиболее просто встроены в пакеты прикладных программ конечно-элементного анализа. В то же время при использовании широко распространенной схемы формирования метода конечных элементов (МКЭ) на основе функционала Лагранжа (или метода перемещений) еще остаются проблемы достижения сходимости результатов к точным решениям по мере сгущения сеток [2]. В работах [4, 5] рассмотрена процедура получения в рамках метода перемещений треугольного плоского конечного элемента, в котором изгибные деформации оболочки описываются с помощью предельной схемы МКЭ, предусматривающей выполнение аппроксимации перемещений по отдельным отрезкам на границах и внутри области элемента, а мембранные – на основе классического подхода с учетом угловых степеней свободы по схеме Аллмана. Такой конечный элемент проявил достаточно высокую работоспособность при расчетах тонких оболочек различных типов. В настоящей работе точность этих конечно-элементных моделей повышается путем введения аппроксимации с помощью предельной схемы МКЭ мембранных перемещений, а также задания штрафных функций, обеспечивающих большую согласованность изгибных и мембранных перемещений.

**Формирование конечного элемента для описания плоского напряженного состояния**

Введем в треугольном конечном элементе угловые узлы 1, 2, 3, вспомогательные узлы 4, 5, 6 в серединах сторон треугольника и внутренние узлы 7, 8, 9, расположенные по серединам отрезков 4-5, 5-6 и 6-4 (рис. 1). В узлах 1, 2, 3 учитываем по два линейных перемещения  $U_i$  и  $V_i$  в направлениях осей декартовой системы координат  $Oxy$  и фиктивные углы поворота  $\Theta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) [6]. Перемещения узлов 4, 5, 6 будем выражать через перемещения узлов 1, 2, 3, выполняя в рамках предельной схемы МКЭ аппроксимацию перемещений, на-

правленных вдоль отрезков 1-2, 2-3 и 3-1, по линейному закону, а перпендикулярных этим отрезкам, – с помощью полиномов третьей степени. В каждом из узлов  $i = 7, 8, 9$  рассматриваем по одному перемещению  $U_{kl}^{(i)}$ , направленному вдоль отрезка  $k-l$ , на котором он расположен (см. рис. 1). Перемещения вдоль такого отрезка будем аппроксимировать с помощью полинома второй степени на основании перемещений узлов  $k, i$  и  $l$ . Условие постоянства деформаций [6], необходимое для обеспечения сходимости МКЭ, в данном случае выполняется при задании нулевых значений  $\Theta_i$  и реализации линейной аппроксимации перемещений вдоль отрезков 4-5, 5-6 и 6-4.

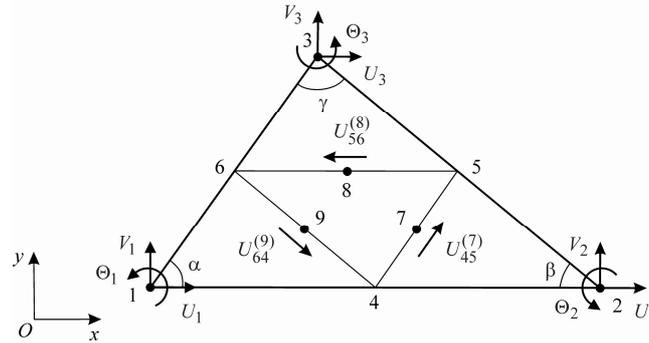


Рис. 1. Обобщенные перемещения узлов для плоского напряженного состояния

При получении результирующей матрицы жесткости конечного элемента, описывающего плоское напряженное состояние, перемещения внутренних узлов 7, 8, 9 исключаем по схеме метода суперэлементов. В итоге такой конечный элемент будет иметь 9 степеней свободы, связанных только с узлами 1, 2, 3. Согласно принятому подходу к аппроксимации перемещений, для точки 4 линейные относительные деформации в направлениях отрезков 1-2, 4-5 и 6-4 будут определяться следующими зависимостями:

$$\varepsilon_{12}^{(4)} = \frac{U_2 - U_1}{l_{12}}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{45}^{(4)} = \frac{8U_{45}^{(7)} - 3U_1 \cos \alpha - 3V_1 \sin \alpha - 4U_2 \cos \alpha - 4V_2 \sin \alpha - U_3 \cos \alpha - V_3 \sin \alpha - \frac{3}{4}\Theta_1 l_{12} \sin \alpha + \frac{1}{4}\Theta_2 (3l_{12} \sin \alpha + l_{23} \sin \gamma) - \frac{1}{4}\Theta_3 l_{23} \sin \gamma}{l_{13}}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{64}^{(4)} = \frac{-8U_{64}^{(9)} + 4U_1 \cos \beta - 4V_1 \sin \beta + 3U_2 \cos \beta - 3V_2 \sin \beta + U_3 \cos \beta - V_3 \sin \beta - \frac{1}{4}\Theta_1 (3l_{12} \sin \beta + l_{13} \sin \gamma) + \frac{3}{4}\Theta_2 l_{12} \sin \beta + \frac{1}{4}\Theta_3 l_{31} \sin \gamma}{l_{23}}, \quad (3)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы треугольника;  $l_{ij}$  – расстояние между узлами  $i$  и  $j$ .

Для точек 5 и 6 соответствующие деформации можно найти с помощью выражений

$$\varepsilon_{23}^{(5)} = \frac{(V_3 - V_2) \sin \beta - (U_3 - U_2) \cos \beta}{l_{23}}; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{56}^{(5)} = \frac{8U_{56}^{(8)} + U_1 + 3U_2 + 4U_3 + -\frac{1}{4}\Theta_1 l_{13} \sin \alpha - \frac{3}{4}\Theta_2 l_{23} \sin \beta + \frac{1}{4}\Theta_3 (3l_{23} \sin \beta + l_{13} \sin \alpha)}{l_{12}}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{45}^{(5)} = \frac{-8U_{45}^{(7)} + U_1 \cos \alpha + V_1 \sin \alpha + 4U_2 \cos \alpha + 4V_2 \sin \alpha + 3U_3 \cos \alpha + 3V_3 \sin \alpha + \frac{1}{4}\Theta_1 l_{12} \sin \alpha - \frac{1}{4}\Theta_2 (3l_{23} \sin \gamma + l_{12} \sin \alpha) + \frac{3}{4}\Theta_3 l_{23} \sin \gamma}{l_{23}}; \quad (6)$$

$$\varepsilon_{13}^{(6)} = \frac{-U_1 \cos \alpha - V_1 \sin \alpha + U_3 \cos \alpha + V_3 \sin \alpha \cos \alpha}{l_{13}}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{64}^{(6)} = \frac{8U_{46}^{(9)} - 4U_1 \cos \beta + 4V_1 \sin \beta - U_2 \cos \beta + V_2 \sin \beta - 3U_3 \cos \beta + 3V_3 \sin \beta + \frac{1}{4}\Theta_1 (3l_{13} \sin \gamma + l_{12} \sin \beta) - \frac{1}{4}\Theta_2 l_{12} \sin \beta - \frac{3}{4}\Theta_3 l_{13} \sin \gamma}{l_{23}}; \quad (8)$$

$$\varepsilon_{56}^{(6)} = \frac{-8U_{56}^{(8)} - 3U_1 - U_2 - 4U_3 + \frac{3}{4}\Theta_1 l_{13} \sin \alpha + \frac{1}{4}\Theta_2 l_{23} \sin \beta - \frac{1}{4}\Theta_3 (3l_{13} \sin \alpha + l_{23} \sin \beta)}{l_{12}}. \quad (9)$$

Применительно к каждой из точек  $i = 4, 5, 6$  на основании известных зависимостей теории упругости можно записать выражение

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ai} = T_i \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad (10)$$

где векторы деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ai}, \boldsymbol{\varepsilon}_i$  имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{a4} = \left\{ \varepsilon_{12}^{(4)} \quad \varepsilon_{45}^{(4)} \quad \varepsilon_{64}^{(4)} \right\}^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{a5} = \left\{ \varepsilon_{23}^{(5)} \quad \varepsilon_{56}^{(5)} \quad \varepsilon_{45}^{(5)} \right\}^T; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{a6} = \left\{ \varepsilon_{31}^{(6)} \quad \varepsilon_{64}^{(6)} \quad \varepsilon_{56}^{(6)} \right\}^T; \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \left\{ \varepsilon_{xi} \quad \varepsilon_{yi} \quad \gamma_{xyi} \right\}^T; \quad (12)$$

$\varepsilon_{xi}; \varepsilon_{yi}; \gamma_{xyi}$  – относительные деформации для точки  $i$  в системе осей  $Oxy$ ;

матрицы 
$$T_4 = \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \\ T_c \end{bmatrix}; \quad T_5 = \begin{bmatrix} T_c \\ T_a \\ T_b \end{bmatrix}; \quad T_6 = \begin{bmatrix} T_b \\ T_c \\ T_a \end{bmatrix}; \quad (13)$$

матрицы-строки

$$T_a = [1 \ 0 \ 0]; \quad T_b = \left[ \cos^2 \alpha \quad \sin^2 \alpha \quad \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]; \quad T_c = \left[ \cos^2 \beta \quad \sin^2 \beta \quad -\frac{\sin 2\beta}{2} \right]. \quad (14)$$

Введем вектор обобщенных узловых перемещений конечного элемента для расчета плоского напряженного состояния:

$$\delta_p = \begin{Bmatrix} \delta_{p1} \\ \delta_{p2} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где  $\delta_{p1} = \{U_1 \ V_1 \ \Theta_1 \ U_2 \ V_2 \ \Theta_2 \ U_3 \ V_3 \ \Theta_3\}^T$ ;  $\delta_{p2} = \{U_{45}^{(7)} \ U_{56}^{(8)} \ U_{64}^{(9)}\}^T$ . (16)

Рассматриваем точки  $i = 4, 5, 6$  как точки интегрирования. Тогда, учитывая равенство (10) получим с помощью метода численного интегрирования Хаммера [6] следующее выражение для вычисления матрицы жесткости данного конечного элемента:

$$K_p = \frac{V}{3} \sum_{i=4}^6 B_i^T (T_i^{-1})^T D_p T_i^{-1} B_i, \quad (17)$$

где  $V$  – объем конечного элемента;  $B_i$  – матрица деформаций конечного элемента для  $i$ -й точки, соответствующая выражениям (1-9), (11), (15), (16);  $D_p$  – матрица упругости конечного элемента для плоского напряженного состояния в системе осей  $Oxy$ .

Представим матрицу  $K_p$  с учетом равенств (15), (16) в блочной форме:

$$K_p = \begin{bmatrix} K_{p11} & K_{p12} \\ K_{p21} & K_{p22} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Исключив перемещения внутренних узлов, получим редуцированную матрицу жесткости конечного элемента для плоского напряженного состояния:

$$K_p^R = K_{p11} - K_{p12} K_{p22}^{-1} K_{p21}. \quad (19)$$

### Конечный элемент для расчета оболочек

Считаем, что изгибные деформации в конечном элементе аппроксимируются в соответствии с методикой работ [4, 5], а мембранные – на основе равенств (1)-(9). Будем рассматривать в каждом  $i$ -м угловом узле конечного элемента  $e$  по 9 степеней свободы, показанных на рис. 2, где  $W_i^{(e)}$  – проекция вектора перемещения на ось  $Oz$ ;  $\theta_{xi}^{(e)}$ ,  $\theta_{yi}^{(e)}$  – углы поворота относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;  $\varphi_{xi}^{(e)}$ ,  $\varphi_{yi}^{(e)}$ ,  $\theta_{zi}^{(e)}$  – углы поворота, принимаемые во внимание в связи с необходимостью анализа в глобальных осях координат. Введем штрафные функции, обеспечивающие повышение согласованности между углами  $\varphi_{xi}^{(e)}$  и  $\theta_{xi}^{(e)}$ ,  $\varphi_{yi}^{(e)}$  и  $\theta_{yi}^{(e)}$ ,  $\Theta_i^{(e)}$  и  $\theta_{zi}^{(e)}$ . Для этого представим модифицированную потенциальную энергию деформации дискретизированного объекта в виде

$$\tilde{U} = U + \alpha \sum_{e=1}^{e_0} \left( \frac{E_e h_e^5}{A_e} \sum_{i=1}^3 \left( \left( \varphi_{xi}^{(e)} - \theta_{xi}^{(e)} \right)^2 + \left( \varphi_{yi}^{(e)} - \theta_{yi}^{(e)} \right)^2 + \left( \Theta_i^{(e)} - \theta_{zi}^{(e)} \right)^2 \right) \right), \quad (20)$$

где  $U$  – суммарная энергия деформации конечных элементов для плоского напряженного состояния и изгиба;  $\alpha$  – малое число, которое можно принимать равным 0,01;  $e_0$  – число конечных элементов;  $E_e$ ,  $h_e$ ,  $A_e$  – модуль упругости материала, толщина листа и площадь треугольника для конечного элемента  $e$ .

Фактически мы вводим фиктивные жесткости, которые начинают играть существенную роль по мере уменьшения размеров конечного элемента. При этом как достигается высокая степень согласованности конечно-элементных

моделей для мелких сеток, так и практически устраняется негативный фактор повышенной жесткости для относительно грубых дискретизаций. В то же время сохраняется необходимость использования в конечных элементах малых фиктивных жесткостей по углам поворота

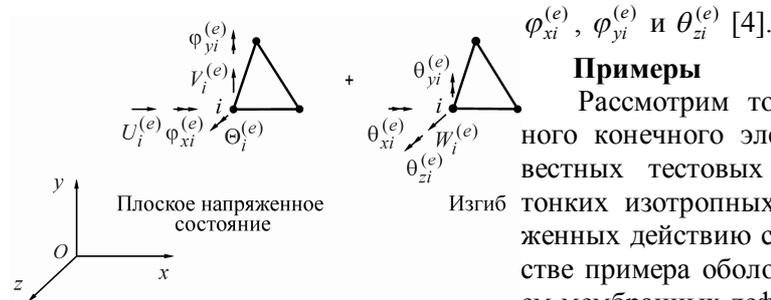


Рис. 2. Обобщенные перемещения для узла  $i$  конечного элемента

тонких изотропных оболочек, подверженных действию сил тяжести. В качестве примера оболочки с преобладанием мембранных деформаций принимался цилиндрический свод [7], изгибных деформаций – гиперболический параболоид [8]. В исходных данных для этих примеров используются безразмерные величины, а дискретизация выполняется с помощью равномерных последовательно сгущающихся сеток конечных элементов.

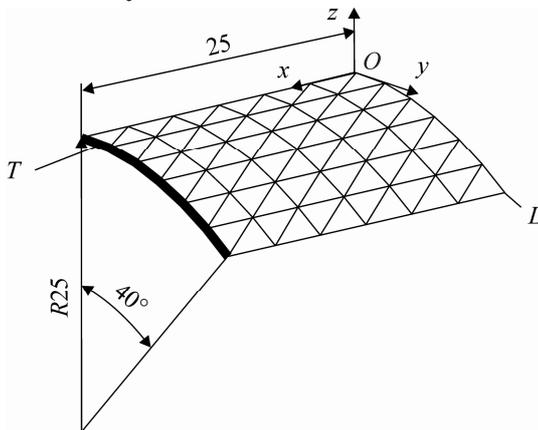


Рис. 3. Четвертая часть цилиндрического свода (сетка  $6 \times 6$ ):  $T$  – диафрагма.

представлены относительные результаты расчета вертикального перемещения  $\delta_L$  точки  $L$ , полученные на основе предельной схемы МКЭ с помощью конечных элементов работы [4] (ПС1) и настоящей работы (ПС2), а также приведенные в работах [9-11] (соответственно графики 1-3), где  $\tilde{\delta}_L = 0,3024$  – точное значение для этого перемещения [9];  $n$  – число полос конечных элементов вдоль линий главных кривизн оболочки.

Для гиперболического параболоида выполнялся расчет половины объекта, симметричного относительно плоскости  $Oyz$  (рис. 5). Срединная поверхность оболочки определяется уравнением  $z=y^2-x^2$  ( $x, y \in [-0,5; 0,5]$ ). Система жестко закреплена по кромке  $H$  и свободна по остальным кромкам. Задавалось:  $E=2 \cdot 10^{11}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\gamma = 8000$ . Принимались во внимание значения  $t$ , равные 0,01 и 0,001. При этом для  $t = 0,001$  результаты расчетов для конечных элементов ПС1 и ПС2 практически совпали.

На рис. 6 отражены погрешности решения данной задачи по рассматриваемой в литературе энергии деформации  $E_D$  всей оболочки. Здесь  $\tilde{E}_D$  – энергии

$\varphi_{xi}^{(e)}$ ,  $\varphi_{yi}^{(e)}$  и  $\theta_{zi}^{(e)}$  [4].

### Примеры

Рассмотрим точность разработанного конечного элемента на двух известных тестовых примерах расчета тонких изотропных оболочек, подверженных действию сил тяжести. В качестве примера оболочки с преобладанием мембранных деформаций принимался цилиндрический свод [7], изгибных деформаций – гиперболический параболоид [8].

Свод представляет собой панель пологой цилиндрической оболочки, опертой по криволинейным границам на жесткие диафрагмы. Рассчитывалась четвертая часть конструкции, имеющей плоскости симметрии  $Oxz$  и  $Oyz$  (рис. 3). Для данной оболочки модуль упругости материала  $E = 4,32 \cdot 10^8$ , коэффициент Пуассона –  $\nu = 0$ . Толщина оболочки  $t = 0,25$ . Интенсивность сил тяжести на единицу объема  $\gamma = 360$ . Анализировалось вертикальное перемещение середины  $L$  свободной кромки. На рис. 4 пред-

деформации по данным работы [8], где найдены результаты, близкие к точным значениям: для  $t = 0,01 - \tilde{E}_D = 1,679 \cdot 10^{-3}$ ,  $t = 0,001 - \tilde{E}_D = 1,1013 \cdot 10^{-2}$ .

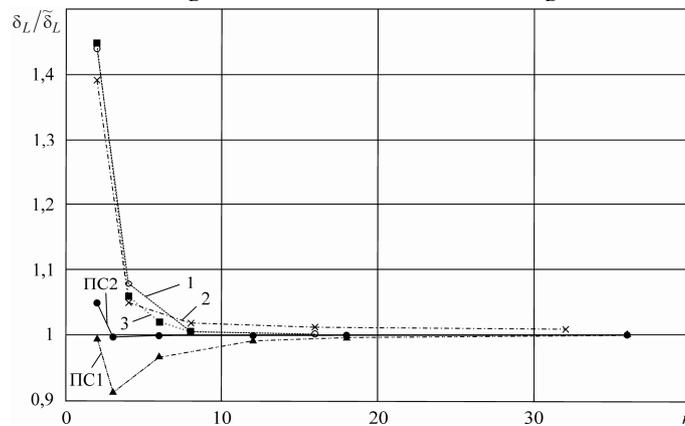


Рис. 4. Сходимость по вертикальному перемещению середины свободной кромки цилиндрического свода

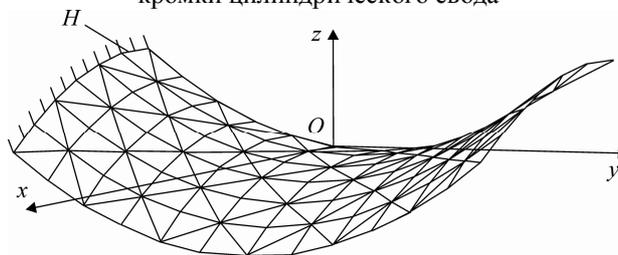


Рис. 5. Половина симметричной схемы гиперболического параболоида (сетка  $12 \times 12$  для оболочки в целом)

Графиками 1, 2, 3 отражены решения, полученные соответственно в работах [8, 10, 12].

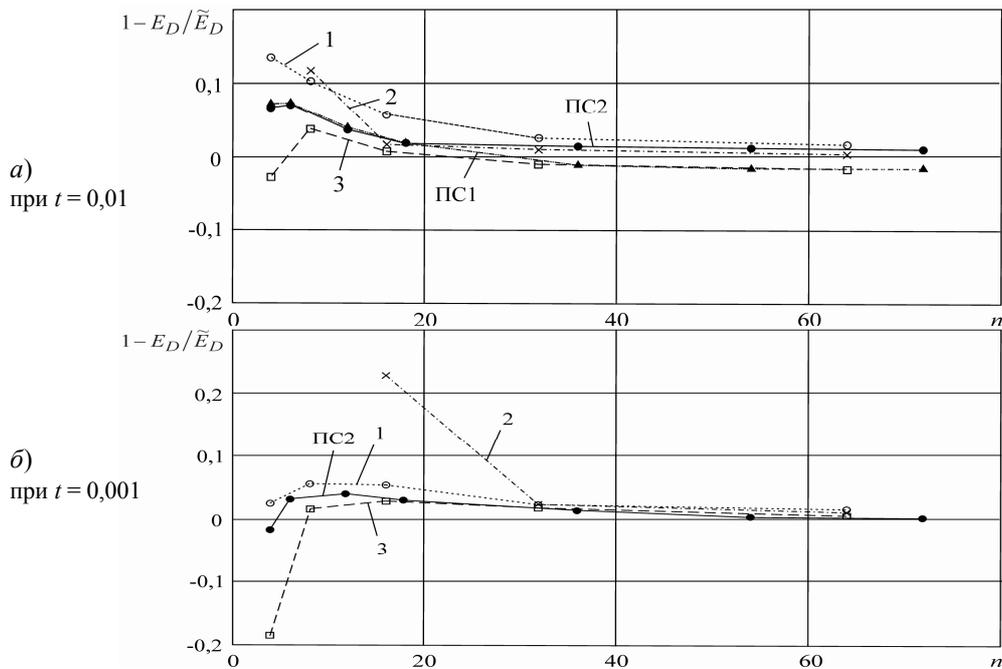


Рис. 6. Сходимость по энергии деформации для гиперболического параболоида

Из рис. 4, 6 видно, что предлагаемый в настоящей работе конечный элемент обеспечивает для рассматриваемых объектов сходимость результатов к точным решениям по мере сгущения сеток. При этом в целом получается большая точность расчетов по сравнению с конечными элементами работ [4, 8-12].

#### **Заключение**

Предложен усовершенствованный вариант плоского треугольного конечно-го элемента для исследования в рамках концепции предельной схемы МКЭ деформаций тонких оболочек. На классических тестовых примерах показана высокая точность предлагаемой процедуры аппроксимации перемещений и обеспечение с ее помощью быстрой сходимости получаемых результатов к точным решениям задач при последовательном сгущении сеток.

#### **Л и т е р а т у р а**

1. Гуреева, Н.А. Расчет произвольных оболочек на основе МКЭ в смешанной формулировке с использованием аппроксимации тензорных полей / Н.А. Гуреева, Ю.В. Клочков, А.П. Николаев // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2010. – № 1. – С. 36а-42.
2. Chapelle, D. The finite element analysis of shells: Fundamentals / D. Chapelle, K.J. Bathe. – New York, NY: Springer, 2011. – 410 p.
3. Bathe, K.J. Measuring the convergence behavior of shell analysis schemes / K.J. Bathe, P.S. Lee // *Comput. Struct.* – 2011. – Vol. 89. – P. 285-301.
4. Serpik, I.N. Development of a new finite element for plate and shell analysis by application of generalized approach to patch test / I.N. Serpik // *Fin. Elem. Anal. Design.* – 2010. – Vol. 46, N. 11. – P. 1017-1030.
5. Серпик, И.Н. Треугольная дискретизация тонких оболочек на основе модифицированного подхода к кусочному тестированию в методе конечных элементов / И.Н. Серпик // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2010. – № 1. – С. 27–33.
6. Zienkiewicz, O.C. The finite element method for solid and structural mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. – 631 pp.
7. MacNeal, R.H. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy / R.H. MacNeal, R.L. Harder // *Finite Elem. Anal. Design.* – 1985. – N. 1/ – P. 1-20.
8. Bathe, K.J. An evaluation of the MITC shell elements / K.J. Bathe, A. Iosilevich, D. Chapelle // *Comput. Struct.*, 2000. – Vol. 75. – P. 1-30.
9. Simo, J.C. On a stress resultant geometrically exact shell model / J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1989. – Vol. 73. – P. 53-92.
10. Areias, P.M.A. Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element / P.M.A. Areias, S.J.M.A. Cesar, C.A.C. Antonio, A.A. Fernandes // *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2003. – Vol. 58. – P. 1637-1682.
11. Chen, Y-I. Extrapolated fields in the formulation of the assumed strain elements. Part II: Three-dimensional problems / Y-I. Chen, H.K. Stolarski // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1998. – Vol. 154. – P. 1-29.
12. Cesar, S.J.M.A. Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation / S.J.M.A. Cesar, R.M.N. Jorge, R.A.F. Valente, P.M.A. Areias // *Int. J. Num. Meth. Eng.* – 2002. – Vol. 53. – P. 1721-1750.

#### **CONSTRUCTION OF A TRIANGULAR FINITE ELEMENT FOR THIN SHELL CALCULATION ON THE BASE OF THE LIMIT SCHEME OF FINITE ELEMENT ANALYSIS**

I.N. Serpik\*, S.E. Udalov\*\*, L.G. Serpik\*

\*Bryansk State Engineering and Technological Academy”, \*\*OOO “Liga Bryansk”

A flat triangular finite element is proposed for thin shells, in which the approximations of membrane and bending deformations are implemented with help of the limit tractability of finite element analysis. Increasing the degree of coincidence between the rotation angles of finite elements is achieved with the penalty functions. The high accuracy of this discretization scheme is illustrated on the samples of cylindrical panel and shell in the form of a hyper.

KEY WORDS: shells, triangular finite element, convergence, membrane strains, bending strains.