

Численные методы расчета конструкций

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ВЕТВЯЩИМСЯ МЕРИДИАНОМ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Ю.В. КЛОЧКОВ, доктор техн. наук, профессор
А.П. НИКОЛАЕВ, доктор техн. наук, профессор
А.Ш. ДЖАБРАИЛОВ, канд. техн. наук, доцент
Волгоградский государственный аграрный университет
400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26.

В настоящей работе излагается алгоритм расчета осесимметрично нагруженных оболочек вращения с ветвящимся меридианом на основе теории малых упругопластических деформаций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оболочка вращения, матрица жесткости, конечный элемент, ветвящийся меридиан.

Оболочки вращения сложной геометрии, в том числе с ветвящимся меридианом, находят широкое применение в строительной, авиакосмической, нефтяной и других отраслях современного машиностроения [1, 2, 3]. В зонах ветвления меридиана возникают концентрации напряжений, вследствие чего, именно в этих областях материал оболочки переходит в пластическую стадию работы. Поэтому при расчете подобного рода конструкций необходимо обязательно учитывать физическую нелинейность применяемого материала. [4, 5].

1. **Конечный элемент и интерполяция перемещений.** В качестве элемента дискретизации выбирается фрагмент меридиана с узлами i и j , выделенный двумя плоскостями, перпендикулярными оси вращения, который для удобства численного интегрирования отображается на прямоугольный отрезок с локальной координатой $-1 \leq \eta \leq 1$. Связь между глобальной S (длина дуги меридиана) и локальной координатами осуществляется выражением:

$$S = \frac{1-\eta}{2} S^i + \frac{1+\eta}{2} S^j, \quad (1)$$

где S^i и S^j - координаты узлов конечного элемента в глобальной системе координат.

При использовании векторной интерполяции перемещений [6], в сочетании с шаговой процедурой нагружения, матрицы-строки векторных узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат выбираются в виде:

$$\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\eta} \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \Delta \vec{V}^i \Delta \vec{V}^j \Delta \vec{V}_{,\eta}^i \Delta \vec{V}_{,\eta}^j \right\}, \quad \left\{ \Delta \vec{V}_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \Delta \vec{V}^i \Delta \vec{V}^j \Delta \vec{V}_{,S}^i \Delta \vec{V}_{,S}^j \right\}, \quad (2)$$

На основании (1) можно сформировать матричное соотношение между $\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\eta} \right\}$ и $\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\Gamma} \right\}$:

$$\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\eta} \right\}_{4 \times 1} = [L] \left\{ \Delta \vec{V}_y^{\Gamma} \right\}_{4 \times 1}, \quad (3)$$

Входящие в структуру $\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\Gamma} \right\}$ приращения векторов перемещений узлов конечного элемента и приращения их производных можно представить в локальном узловом базисе:

$$\Delta \vec{V}^m = \Delta u^m \bar{a}_1^{0m} + \Delta w^m \bar{a}^{0m}; \Delta \vec{V}_{,s}^m = l_{,s}^{1m} \bar{a}_1^{0m} + l_{,s}^m \bar{a}^{0m}, \quad (4)$$

где Δu^m и Δw^m - приращения меридиональной и нормальной компонент вектора перемещения узлов конечного элемента (КЭ); $l_{,s}^{1m}, l_{,s}^m, l_{,s}^{11m}, l_{,s}^{11m}$ - многочлены, содержащие приращения $\Delta u^m, \Delta w^m$, а также их первые производные по дуге меридиана S ; верхний индекс m обозначает узлы КЭ. На основании (4) столбец $\{\Delta \vec{V}_y^{\Gamma}\}$ можно представить матричным произведением:

$$\left\{ \Delta \vec{V}_y^{\Gamma} \right\}_{4 \times 1} = \left[\bar{A} \right]_{4 \times 8} \left\{ n_y \right\}_{8 \times 1}, \quad (5)$$

где $\left\{ n_y \right\}^T = \left\{ \Delta u^i \Delta w^i \Delta u^j \Delta w^j l_{,s}^{1i} l_{,s}^i l_{,s}^{1j} l_{,s}^j \right\}$

В структуру матрицы $\left[\bar{A} \right]$ входят узловые векторы локального базиса $\bar{a}_1^{0m}, \bar{a}^{0m}$, которые могут быть представлены в локальном базисе внутренней точки КЭ:

$$\bar{a}_1^{0m} = d_{11}^m \bar{a}_1^0 + d_{12}^m \bar{a}^0; \quad \bar{a}^{0m} = d_{21}^m \bar{a}_1^0 + d_{22}^m \bar{a}^0. \quad (6)$$

Приращение вектора перемещения внутренней точки КЭ на $(j+1)$ -м шаге нагружения интерполируются через столбец (2):

$$\Delta \vec{V} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \Delta \vec{V}_y^j \right\}_{4 \times 1}, \quad (7)$$

где $\left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_4 \right\}$ - матрица строка, содержащая полиномы Эрмита 3-й степени. Входящие в (7) приращение вектора перемещения внутренней точки КЭ и его производные по глобальной координате S запишутся в виде

$$\Delta \vec{V} = \Delta u \bar{a}_1^0 + \Delta w \bar{a}^0; \quad \Delta \vec{V}_{,s} = l_1^1 \bar{a}_1^0 + l_1 \bar{a}^0; \quad \Delta \vec{V}_{,ss} = l_{11}^1 \bar{a}_1^0 + l_{11} \bar{a}^0, \quad (8)$$

где $l_1^1 = \Delta u_{,s} - k \Delta w$; $l_1 = \Delta u k + \Delta w_{,s}$; $l_{11}^1 = \Delta u_{,ss} - k(\Delta u k + 2 \Delta w_{,s}) - \Delta w k_{,s}$,

$$l_{11} = \Delta w_{,ss} + k(2 \Delta u_{,s} - \Delta w k) + \Delta u k_{,s}.$$

С учетом (3), (5) интерполяционное выражение (7) запишется следующим образом:

$$\Delta \vec{V} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left[L \right]_{4 \times 4} \left[\bar{A} \right]_{4 \times 8} \left\{ n_y \right\}_{8 \times 1} = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 4}^T \left[\bar{A} \right]_{4 \times 8} \left[G \right]_{8 \times 8} \left\{ n_y \right\}_{8 \times 1}. \quad (9)$$

Входящую в выражение (9) матрицу $\left[\bar{A} \right]$ с учетом (6) можно представить матричной суммой:

$$\left[\bar{A} \right]_{4 \times 8} = \bar{a}_1^0 \left[A_1 \right]_{4 \times 8} + \bar{a}^0 \left[A_2 \right]_{4 \times 8}. \quad (10)$$

Принимая во внимание (8) и (10), соотношение (9) запишем следующим образом:

$$\Delta u \bar{a}_1^0 + \Delta w \bar{a}^0 = \left\{ \varphi \right\}^T \left(\bar{a}_1^0 \left[A_1 \right] + \bar{a}^0 \left[A_2 \right] \right) \left[G \right] \left\{ n_y \right\}. \quad (11)$$

Путем приравнивания соответствующих выражений при ортах \bar{a}_1^0 и \bar{a}^0 , стоящих в левой и правой частях (11), можно записать следующие интерполяционные зависимости для приращений компонент вектора перемещения на $(j+1)$ -м шаге нагружения:

$$\Delta u = \{\varphi\}^T [A_1][G]\{n_y\}; \Delta w = \{\varphi\}^T [A_2][G]\{n_y\}. \quad (12)$$

Дифференцируя (7) по дуге меридиана S , можно получить производную приращения вектора перемещения:

$$\Delta \vec{v}_{,s} = \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} \{\Delta \vec{V}_y^s\}. \quad (13)$$

С учетом (4) и (5)...(10), соотношение (13) можно записать в виде:

$$l_1^1 \bar{a}_1^0 + l_1 \bar{a}^0 = \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} (\bar{a}_1^0 [A_1] + \bar{a}^0 [A_2])[G]\{n_y\}. \quad (14)$$

Из (14) можно получить интерполяционные зависимости следующего вида:

$$l_{,1}^1 = \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} [A_1][G]\{n_y\}, \quad l_{,1} = \{\varphi, \eta\}^T \frac{\partial \eta}{\partial S} [A][G]\{n_y\} \quad (15)$$

Аналогично выводятся соотношения для $l_{,11}^1$ и $l_{,11}$:

$$l_{,11}^1 = \{\varphi, \eta \eta\}^T \left(\frac{\partial \eta}{\partial S} \right)^2 [A_1][G]\{n_y\}, \quad l_{,11} = \{\varphi, \eta \eta\}^T \left(\frac{\partial \eta}{\partial S} \right)^2 [A][G]\{n_y\} \quad (16)$$

Входящий в структуру (15), (16) столбец $\{n_y\}$ может быть выражен через стандартный столбец узловых варьируемых параметров:

$$\{n_y\} = [T]\{\Delta U_y^T\}, \quad (17)$$

где $\{\Delta U_y^T\} = \left\{ \{\Delta u_y^T\}^T, \{\Delta w_y^T\}^T \right\}$; $\{\Delta q_y^T\}^T = \{\Delta q^i \Delta q^j \Delta q_{,s}^i \Delta q_{,s}^j\}$

Здесь под Δq понимается приращение меридиональной Δu или нормальной Δw компонент вектора перемещения на $(i+j)$ -м шаге нагружения.

2. Матрица жесткости и столбец узловых нагрузок на $(i+j)$ -м шаге нагружения. Равенство работ внешних и внутренних сил на $(i+1)$ -м шаге нагружения можно записать в следующем виде:

$$\int_V \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}^T \left(\{\sigma^{\alpha\beta}\} + \{\Delta \sigma^{\alpha\beta}\} \right) dV = \int_F \{\Delta U_y\}^T (\{P\} + \{\Delta P\}) dF, \quad (18)$$

где $\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}^T = \left\{ \Delta \varepsilon_{11}^{\xi} \Delta \varepsilon_{22}^{\xi} \right\}$ - приращения деформаций в произвольном слое оболочки; $\{\sigma^{\alpha\beta}\}, \{\Delta \sigma^{\alpha\beta}\}^T = \{\Delta \sigma^{11} \Delta \sigma^{22}\}$ - напряжения и их приращения на $(j+1)$ -м шаге нагружения; $\{\Delta U\}^T = \{\Delta u \Delta w\}$ - приращения компонент вектора перемещения на $(j+1)$ -м шаге нагружения; $\{P\}, \{\Delta P\}$ - столбец внешней поверхностной нагрузки и её приращение на $(j+1)$ -м шаге нагружения.

Входящие в структуру функционала (18) приращения напряжений на $(j+1)$ -м шаге нагружения $\{\Delta \sigma^{\alpha\beta}\}$ могут быть выражены через приращения деформаций $\{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi}\}$:

$$\{\Delta \sigma^{\alpha\beta}\} = [C_{II}] \{\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi}\} \quad (19)$$

Входящая в (19) матрица пластичности $[C_{II}]$ на шаге нагружения формируется на основе деформационной теории пластичности [7] путем дифференцирования компонент тензора напряжений по компонентам тензора деформаций [8].

Приращения деформаций в произвольном слое оболочки могут быть выражены через приращения деформаций срединной поверхности:

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{2 \times 1} = [G] \left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\}_{4 \times 1}, \quad (20)$$

где $[G] =$

| | | | |
|---|---|-------|-------|
| 1 | 0 | ξ | 0 |
| 0 | 1 | 0 | ξ |

Входящий в (20) столбец приращений деформаций в точке срединной поверхности на основании соотношений теории тонких оболочек [9] может быть выражен через столбец узловых варьируемых параметров $\left\{ \Delta U_y^G \right\}$:

$$\left\{ \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} \right\} = [B] \left\{ \Delta U_y^G \right\} \quad (21)$$

Столбец $\left\{ \Delta U \right\}$ с учетом (12), (17) может быть представлен матричным произведением:

$$\left\{ \Delta U \right\} = [N] \left\{ \Delta U_y^G \right\} \quad (22)$$

где $[N] =$

$$\begin{bmatrix} \{\varphi\}^T [A_1] [G] [T] \\ \{\varphi\}^T [A_2] [G] [T] \end{bmatrix}.$$

С учетом (19)...(22) функционал (18) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta U_y^G \right\}^T \int_V [T]^T \int [B]^T [G]^T [C_{II}] [G] [B] dV [T] \left\{ \Delta U_y^G \right\} = \\ & \left\{ \Delta U_y^G \right\}^T \left(\int_F [N]^T \left\{ \Delta P \right\} dF + \int_F [N]^T \left\{ P \right\} dF - \int_V [B]^T [G]^T [G] dV \right). \end{aligned} \quad (23)$$

В результате минимизации функционала (23) по $\left\{ \Delta U_y^G \right\}^T$ можно записать следующее матричное соотношение:

$$[K] \left\{ \Delta U_y^G \right\} = \left\{ f \right\} + \left\{ R \right\}, \quad (24)$$

где $[K] = \int_V [T]^T \int [B]^T [G]^T [C_{II}] [G] [B] dV$; $\left\{ f \right\} = \int_F [N]^T \left\{ \Delta P \right\} dF$ - матрица жесткости и столбец узловых нагрузок КЭ на $(j + 1)$ -м шаге нагружения;

$$\left\{ R \right\} = \left(\int_F [N]^T \left\{ P \right\} dF - \int_V [B]^T [G]^T [G] dV \right) - \text{поправка Ньютона-Рафсона.}$$

3. Условия сопряжения в узле ветвления меридиана. При выводе условий сопряжения оболочек в узле ветвления меридиана столбец узловых неизвестных одной из них принимается за основной. Столбцы узловых варьируемых параметров остальных $(n - 1)$ оболочек должны быть выражены через столбец узловых неизвестных основной оболочки, исходя из кинематических условий сопряжения [10]. Одним из таких условий является инвариантность приращений векторов перемещений на $(j + 1)$ -м шаге нагружения:

$$\Delta \vec{V}_{(1)} = \Delta \vec{V}_{(2)} = \dots = \Delta \vec{V}_{(i)} = \dots = \Delta \vec{V}_{(n)}, \quad (25)$$

где $\Delta \vec{V}_{(i)} = \Delta u_{(i)} \vec{v}_{(i)} + \Delta w_{(i)} \vec{a}_{(i)}^0$; $\vec{v}_{(i)}$ - орт i -ой оболочки, касательный к меридиану и направленный к узлу ветвления; $\vec{a}_{(i)}^0$ - орт нормали.

Базисные орты $\vec{v}_{(i)}$ и $\vec{a}_{(i)}^0$ можно выразить через базисные векторы декартовой системы координат:

$$\{\vec{v}\}_{(i)} = [m]_{(i)} \{\vec{i}\}, \quad \text{где} \quad \{\vec{v}\}_{(i)}^T = \{\vec{v}_{(i)}, \vec{a}_{(i)}^0\}, \quad \{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}, \vec{k}\} \quad (26)$$

Принимая, например, первую оболочку за основную можно, с использованием (26) сформировать матричную зависимость между базисными ортами i -й и основной оболочек:

$$\{\vec{v}\}_{(i)} = [y_i] \{\vec{v}\}_{(1)}, \quad \text{где} \quad [y_i] = [m]_{(i)} [m]_{(1)}^{-1}. \quad (27)$$

Из (25) с учетом (27) можно получить выражения для приращений компонент вектора перемещения i -й оболочки через приращения компонент основной оболочки:

$$\Delta u_{(i)} = f_1(\Delta u_{(1)}, \Delta w_{(1)}); \quad \Delta w_{(i)} = f_2(\Delta u_{(1)}, \Delta w_{(1)}). \quad (28)$$

При жестком соединении n оболочек в качестве условия сопряжения можно использовать предположение о том, что углы поворота нормалей в узле ветвления в процессе деформирования остаются равными для всех оболочек:

$$\frac{\Delta \vec{V}_{(1)}}{\partial S_{v(1)}} \vec{a}_{(1)}^0 = \frac{\Delta \vec{V}_{(2)}}{\partial S_{v(2)}} \vec{a}_{(2)}^0 = \dots = \frac{\Delta \vec{V}_{(i)}}{\partial S_{v(i)}} \vec{a}_{(i)}^0 = \dots = \frac{\Delta \vec{V}_{(n)}}{\partial S_{v(n)}} \vec{a}_{(n)}^0. \quad (28)$$

Из (28) можно получить выражения для приращения производной компоненты вектора перемещения i -й оболочки через узловые неизвестные основной оболочки:

$$\Delta w_{,Sv(i)} = f_3(\Delta w_{,Sv(1)}, \Delta u_{(1)}) \quad (29)$$

Компоненты $\Delta u_{,S(i)}$ ($i = 1..n$), всех сопрягаемых оболочек остаются свободно варьируемыми. В результате столбец узловых неизвестных основной оболочки в узле сопряжения примет вид:

$$\{\Delta U_y^T\}_{(1)} = \{\Delta u_{(1)}, \Delta u_{,S(1)}, \Delta w_{(1)}, \Delta w_{,S(1)}, \Delta u_{,S(2)}, \Delta u_{,S(3)}, \dots, \Delta u_{,S(n)}\} \quad (30)$$

На основании (28)...(30) формируются матричные соотношения:

$$\{\Delta U_y^T\}_{(i)} = [P_R]_{(i)} \{\Delta U_y^T\}_{(1)}. \quad (31)$$

Матрицы жесткостей и столбцы узловых нагрузок элементов дискретизации ($n - 1$) оболочек, непосредственно примыкающих к узлу ветвления меридиана умножаются на входящую в (34) матрицу $[P_R]$:

$$[P_R]^T [K] [P_R]; \quad [P_R]^T (\{f\} + \{R\}). \quad (32)$$

Пример расчета. Была решена задача по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечной конструкции, состоящей из цилиндра и примыкающих к нему двух конусов, загруженной внутренним давлением интенсивности q (Рис 1.). Были приняты следующие исходные данные: модуль упругости $E = 7,5 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$, $R_q = 90 \text{ см}$, $t = 1 \text{ см}$, $q = 0,5 \text{ МПа}$, $l_1 = 80 \text{ см}$, $l_2 = 100 \text{ см}$, $l_3 = 60 \text{ см}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

В расчете использовалась прямая упрочнений (рис. 2), которая была получена с помощью формулы:

$$\sigma_i = k(\varepsilon_i - \varepsilon_0) + \sigma_0, \quad (33)$$

где $k = 14444,4 \text{ МПа}$; $\varepsilon_0 = 0,002$ $\sigma_0 = 200 \text{ МПа}$.

Результаты расчетов представлены в таблице 1, в которой приведены численные значения меридиональных (σ_m) и кольцевых (σ_k) напряжений на внешней и внутренней поверхностях цилиндра в опорном сечении I, в узле ветвления меридиана II, а также в сечениях конусов III и IV, отстоящих от узла

Строительная механика строительных конструкций и сооружений, 2013, № 3
ветвления на 1÷2 толщины оболочки. Каждая сопрягаемая оболочка при этом
разбивалась на 50 конечных элементов.

Таблица 1

| Сечение | Напряжения, МПа | Число шагов нагружения | | |
|---------|--------------------|------------------------|----------|----------|
| | | 90 | 110 | 130 |
| I | σ_m^e | 3,97 | 3,97 | 3,97 |
| | σ_m^H | 3,95 | 3,95 | 3,95 |
| | σ_k^e | 45,0 | 45,0 | 45,0 |
| | σ_k^H | 45,0 | 45,0 | 45,0 |
| II | σ_m^e | 208,801 | 208,801 | 208,801 |
| | σ_m^H | -222,060 | -222,059 | -222,059 |
| | σ_k^e | 35,477 | 35,474 | 35,471 |
| | σ_k^H | -135,461 | -135,469 | -135,474 |
| III | σ_m^e | 476,26 | 476,264 | 476,969 |
| | σ_m^H | -471,62 | -471,624 | -472,323 |
| | σ_k^e | 201,64 | 201,640 | 201,990 |
| | σ_k^H | -222,77 | -222,775 | -223,092 |
| IV | σ_m^e | 708,05 | 708,057 | 709,148 |
| | σ_m^H | -720,2 | -720,203 | -721,291 |
| | σ_k^e | 309,31 | 309,31 | 309,828 |
| | σ_k^H | -343,77 | -343,770 | -344,275 |

Анализ табличного материала показывает устойчивую сходимость вычислительного процесса с увеличением числа шагов нагружения. Максимальных значений напряжения достигают, как и следовало ожидать, в зонах, близких к узлу ветвления меридиана. Расчетная схема позволяет вычислить меридиональное напряжение на срединной поверхности цилиндра в опорном сечении, исходя из условия равновесия конструкции.

Давление, действующее на нижний конус, вызывает появление растягивающих напряжений (σ_p), а на нижний конус – сжимающих (σ_c):

$$\sigma_p = \frac{\pi(R_u^2 - r_1^2)}{2\pi R_u} \cdot \frac{q}{t} = 21,46 \text{ МПа} \quad \sigma_c = \frac{\pi(r_2^2 - R_u^2)}{2\pi R_u} \cdot \frac{q}{t} = 17,5 \text{ МПа} .$$

Результирующее меридиональное напряжение на срединной поверхности цилиндра в опорном сечении равно:

$$\sigma_m = \sigma_p + \sigma_c = 21,46 - 17,5 = 3,96 \text{ МПа}.$$

Кольцевые напряжения в опорном сечении могут быть вычислены по формуле $\sigma_k = qR_u/t = 0,5 \text{ МПа} \cdot 90 \text{ см} / 1 \text{ см} = 45 \text{ МПа}$. / Из таблицы видно, что в опорном сечении I, значения σ_m и σ_k , полученные в результате конечно-элементного расчета совпадают с σ_m и σ_k , вычисленным исходя из условия равновесия.

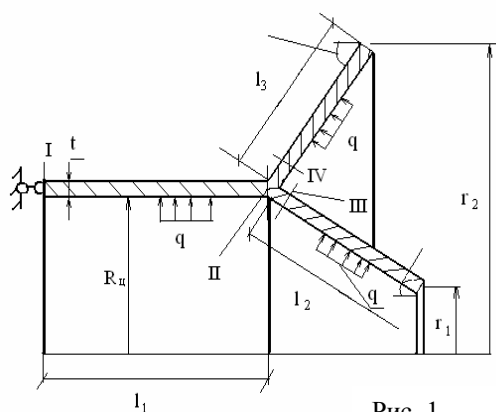


Рис. 1

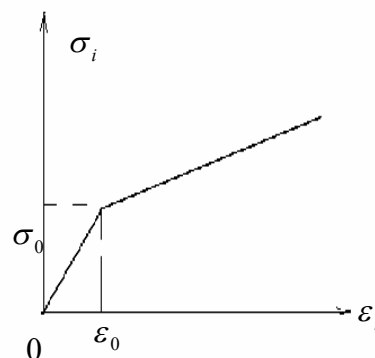


Рис.2

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о достаточной точности разработанного алгоритма конечно-элементного расчета осесимметрично нагруженной оболочки вращения с ветвящимся меридианом при упругопластическом деформировании.

Л и т е р а т у р а

1. Zhang Junbo, Li Xikui (2011). A mixed finite element and mesh-free method using linear complementarity theory for gradient plasticity, *Comput. Mech.*, 47, №2, p. 171-185.
2. Galishin A.Z., Shevchenko Yu. N. (2011). Determining the axisymmetric elastoplastic state of thin shells with allowance for the third invariant of the stress deviator, *Int. Appl. Mech.*, 46, №8, p. 868-876.
3. Poh L. H., Peerlings R.H. J., Geers M.C.D., Swaddiwudhipong S. (2011). An implicit tensorial gradient plasticity model-formulation and comparison with a scalar gradient model, *Int. Solids and Struct.*, 48, №8, p. 2595-2604.
4. Shang B.P., Du. H. (2010). Application and finite element simulation of plastic blanking deformation, *Comput and Theor. Nanosci.*, 5, №8, p. 1631-1635.
5. Dzierzanowski Grzegorz (2012). Stress energy minimization as a tool in the material layout design of shallow shells, *Int. J. Solids and Struct.*, 49, № 11-12, p. 1343-1354.
6. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Marchenko S.S., Nikolaev A. P. (2007). The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates, *Russian Aeronautics*, Vol. 50, № 2, p. 115-120.
7. Малинин Н.Н. (1975). Прикладная теория пластичности и ползучести. – М: Машиностроение. - 400 с.
8. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. (2009). Расчет оболочек на основе МКЭ в двумерной постановке. - Волгоград «ИПК» Нива. - 432 с.
9. Новожилков В.В. (1962). Теория тонких оболочек. - Л: Судпромиздат. – 432 с.
10. Dzhabrailov A. Sh., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. The finite element analysis of shells of revolution with a branching meridian, *Russian Aeronautics*, Vol. 52, № 1. p. 22-29.

A FINITE ELEMENT ANALYSIS OF AXISYMMETRIC LOADED SHELLS OF REVOLUTION WITH A BRANCHING MERIDIAN UNDER ELASTIC-PLASTIC DEFORMING

Yu.V. Klochkov, A.P. Nikolaev, A.Sh. Dzhabrailov
Volgograd State Agricultural University, Volgograd

In this work, the calculation algorithm of axisymmetric loaded shells of revolution with branching meridian on the basis of the theory of small elastic-plastic deformations is studied.

KEYWORDS: shell of revolution, rigidity matrix, finite element, branching meridian.