

Теория ползучести

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р.С. САНЖАРОВСКИЙ, *д-р техн. наук, профессор*
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный
университет (СПбГАСУ),
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, д. 4; salsa87@bk.ru

Проведен анализ моделей теории ползучести конструкционных материалов, и выявлены две важные нерешенные проблемы. Первая проблема состоит в использовании в одном интегральном уравнении двух или большего числа диаграмм мгновенного деформирования материала. Вторая проблема проявляется в использовании несоответствующих функций для представления ядра, что приводит к результатам, несовместимым с ньютоновой механикой, делает невозможным применение принципа Вольтерра. Предложены модели, разрешающие указанные проблемы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: наследственная упругость; мгновенные упругопластические деформации; силы, пропорциональные ускорению.

В наследственных теориях ползучести выявляются две неосознанные исследователями проблемы, которые приводят к недостоверным результатам расчетов конструкций.

Первая проблема состоит в несообразном использовании в одном и том же интегральном уравнении двух или большего числа различных диаграмм для описания мгновенных свойств материала, что противоречит физическому смыслу.

Вторая проблема возникает при использовании несоответствующих функций для представления ядра интегрального уравнения ползучести, что приводит к результатам, несовместимым с ньютоновой механикой, и делает невозможным применение принципа Вольтерра даже в линейных задачах.

Рассмотрим сначала интегральное уравнение линейной ползучести, которое запишем в традиционном виде, принятом в наследственной теории упругости

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где ядро $K(t, \tau) = -E(\tau)[1/E(\tau) + C(t, \tau)]$; $E(\tau)$ – модуль мгновенноупругой деформации; $C(t, \tau)$ – удельная деформация ползучести, называемая мерой ползучести.

Широкое применение уравнений (1) в наследственной теории упругости, обусловленного возможностью применения принципа Вольтерра – задача наследственной теории упругости решается как обычная упругая задача, в которой с операторами обращаются как с постоянными.

Проварьируем уравнение (1), применяя свойства изохронной вариации

$$\delta\varepsilon(t) = \frac{\delta\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\delta\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau.$$

С учетом мгновенноупругих свойств, имеем

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_y(t) + \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_y(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $\delta\varepsilon_y(t)$ – вариация мгновенноупругой деформации.

Из (2) следует, что полная деформация $\varepsilon(t)$ при заданном ядре однозначно определяется значением мгновенноупругой деформации $\varepsilon_y(t)$.

С помощью наследственной теории упругости (1) хорошо описывается ползучесть некоторых материалов, например бетона при невысоких уровнях, в том числе знакопеременного воздействия: $\sigma \approx 0,2R$ (R – призменная прочность). При более высоких уровнях напряжений зависимость (1) плохо описывала экспериментальные данные. Большие преимущества модели (1), ее эффективный математический аппарат, во многих случаях оказались несоответствующими реальным свойствам конструкционных материалов. Ввиду этого, линейная теория (1) была преобразована и приобрела вид нелинейной теории упругоползучего тела

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_0}^t \frac{F[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} \left[E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau, \quad (3)$$

где $F[\sigma] = \sigma + \beta\sigma^2$ – нелинейная функция, с помощью которой достигалась некоторая согласованность с экспериментами по ползучести. Появилась специальная терминология об «условиях аффинности кривых ползучести».

Проварьируем уравнение (3):

$$\delta\varepsilon(t) = \frac{\delta\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\delta\sigma(\tau)}{E(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_0}^t \frac{\delta F[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} \left[E(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau. \quad (4)$$

В первых двух слагаемых правой части есть вариации от упруго-мгновенной деформации $\delta\varepsilon_y(t)$ и $\delta\varepsilon_y(\tau)$. В третьем слагаемом первый множитель оказывается равным

$$\frac{\delta F[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} = \frac{\delta\sigma(\tau)[1 + 2\beta\sigma(\tau)]}{E(\tau)} = \delta\varepsilon_M(\tau).$$

Анализ показывает, что здесь присутствует $\varepsilon_m(t)$ мгновенная нелинейная деформация для того случая, когда мгновенная деформация σ - ε аппроксимируется квадратной параболой

$$\sigma = A_1 \varepsilon_m + A_2 \varepsilon_m^2, \text{ либо } \varepsilon_m = B_1 \sigma + B_2 \sigma^2, \quad (5)$$

где $A_1 = E(t)$; $B_1 = \frac{1}{E(t)}$; $A_2 = \frac{R - E(t)\varepsilon_R}{\varepsilon_R^2}$; $B_2 = \frac{\beta}{E(t)} = \frac{A_2}{E^3(t)}$.

Из соотношения (4) имеем

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_y(t) - \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_y(\tau) \left[E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_m(\tau) \left[E(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (6)$$

Полученный результат указывает на противоречия модели (3), так как выявляет, что полная деформация $\varepsilon(t)$ определяется путем одновременного использования двух различных мгновенных деформаций ε_y и ε_m , что противоречит физическому смыслу: у одного и того же материала имеются две различные диаграммы σ - ε кратковременного нагружения. Заданному напряжению σ соответствуют одновременно два различных значения мгновенной деформации ε_y и ε_m .

Дефектом третьего слагаемого (3) является то обстоятельство, что упругопластическая модель (5) превращена в этом интегральном уравнении в модель нелинейного упругого материала, тождественно описывающего догрузку и разгрузку. Кроме этого, линейная и нелинейная диаграммы в (3) дают существенно различные значения приращений мгновенных деформаций в любой момент времени t . Это вызывает большие расхождения теории и эксперимента, особенно при переменных режимах нагружения.

Интегральным уравнением (3) постулируется набор свойств, не соответствующих реальному поведению материала при кратковременных и при длительных нагружениях: первые два слагаемых неверно описывают мгновенную составляющую полной деформации при догрузке, третье слагаемое ошибочно описывает длительную составляющую при разгрузке. При малых уровнях напряжений ($\sigma = 0,2R$) несоответствие проявляется незначительно. Существенное различие теории и эксперимента проявляются при средних и высоких уровнях нагружений.

Это различие вызвало появление новых направлений в теории ползучести.

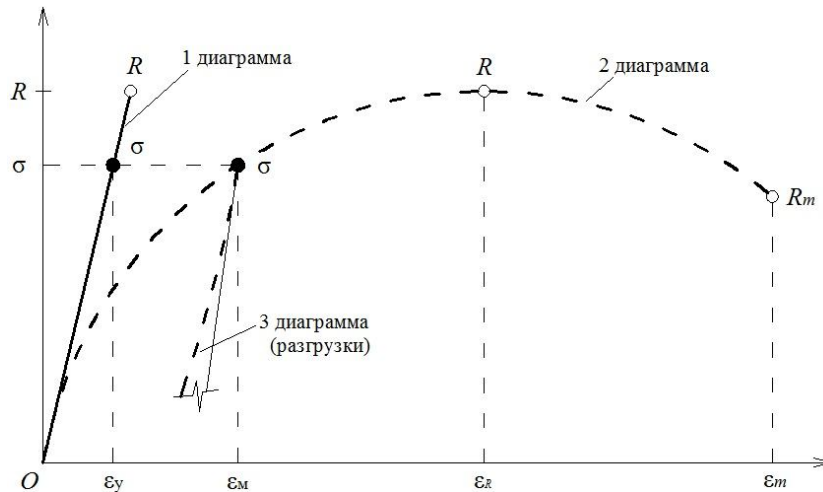


Рис. 1. Диаграммы мгновенного деформирования σ - ε

Однако они содержат тот же дефект использования нескольких диаграмм мгновенного деформирования. По этой причине такие работы не могут устранить существенного различия между результатами теории и эксперимента.

Например, предложено интегральное уравнение ползучести записывать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_0}^t \frac{f_1[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} K_1(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_0}^t \frac{f_2[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} K_2(t, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Варьируя (7), получаем

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_y(t) + \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_y(\tau) K(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_{1M}(\tau) K_1(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_{2M}(\tau) K_2(t, \tau) d\tau, \quad (8)$$

что в этом уравнении одновременно присутствуют для одного материала три мгновенных диаграммы деформирования: одна линейная и две нелинейные.

В одной из первых работ предложено уравнение вида (7), но без первых двух слагаемых

$$\varepsilon(t) = \psi[\sigma(t)] + \int_0^t \alpha(t, \tau) F[\sigma(t)] d\tau. \quad (9)$$

Из него получаем

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_{1M}(t) + \int_0^t \delta\varepsilon_{2M}(\tau) [E(\tau) \alpha(t, \tau)] d\tau.$$

Следовательно, в теории (9) использованы одновременно две различные нелинейные диаграммы мгновенного деформирования.

В большой группе работ полная деформация в левой части (1) заменяется некоторой неизвестной нелинейной функцией

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Варьируя (10), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_y(t) E(t) + \int_0^t \delta\varepsilon_y(\tau) E(\tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Получаем, что полная деформация $\varepsilon(t)$ однозначно определяется с помощью двух параметров: мгновенноупругой деформацией $\varepsilon_y(t)$ и существенно неизвестной функцией $\varphi[\varepsilon(t)]$.

Для преодоления последнего затруднения введены две гипотезы, накладывающие две сильные связи на рассматриваемый материал. Первая гипотеза состоит в замене полной деформации мгновенной нелинейной деформацией $\varepsilon(t) = \varepsilon_M(t)$. Вторая гипотеза определяет вид функции $\varphi(\varepsilon)$ в том же виде, в котором представляется нелинейная диаграмма σ - ε

$$\varphi[\varepsilon(t)] = A_1 \varepsilon_M(t) + A_2 \varepsilon_M^2(t) + \dots \quad (11)$$

Интегральное уравнение (10) приобретает вид

$$\varphi[\varepsilon_M(t)] = \sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (12)$$

В упрощенном виде (12) теория ползучести (10) может давать приемлемые результаты для частного случая изохронных кривых. При этом же она может давать и физически недопустимые результаты. Так, для диаграммы бетона в виде квадратной параболы

$$\sigma = E\varepsilon - \frac{E}{2\varepsilon_R} \varepsilon^2, \quad (13)$$

и для характеристики ползучести $\varphi_\infty = \varepsilon_\Pi / \varepsilon_M = 2$, полная деформация при постоянном напряжении $\sigma = R$ будет достигать значения $\varepsilon_M = 3\varepsilon_R$. Даже в рамках функций второго порядка, диаграмма $\varphi[\varepsilon]$ имеет существенно различные очертания, при которых значения $\varphi[\varepsilon_M]$ изменяются от $\varphi[\varepsilon_M] = -1,5R$ до $\varphi[\varepsilon_M] = +R$. Определить же вид функции $\varphi[\varepsilon]$ даже для простейших режимов загрузки уже является неразрешимой задачей.

Существует большая группа работ, уточняющих вид нелинейной функции $F[\sigma]$ в уравнении (3), например, в следующем виде

$$F[\sigma] = B_1\sigma + B_2\sigma^m.$$

Можно показать, что таким способом уточняется не условие «аффинного подобия кривых ползучести», а кривая мгновенного деформирования, на которой основывается последний член интегрального уравнения (3). Для этого нужно записать обратную функцию

$$\sigma = A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^m,$$

и найти входящие в нее параметры. В частности, показатель степени m станет равным 2, если в точке максимума выполнится условие $\varepsilon_R E = 2R$.

Ввиду неосознанности существа проблемы, появилась серия работ, записывающих разрешающее уравнение в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_{\tau_1}^t \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \int_0^{\sigma_{max}} F'[\sigma(\tau)] \Phi(\tau_2, \tau_1) d\sigma.$$

Помимо наличия двух мгновенных диаграмм σ - ε , в такой записи возникает еще и третий ненужный параметр $\delta\sigma_{max}$, с неоговоренными мгновенными свойствами, что еще больше и неоправданно усложняет решение проблемы.

В работах автора предложено решение описываемой проблемы в следующем виде. Во-первых, введена в рассмотрение новая переменная в виде нелинейной функции

$$\Phi[\sigma(t)] = \varepsilon_M(t)E(t) = f_2[\sigma(t)]E(t),$$

где $f_2[\sigma(t)]$ – обратная функция по отношению к той, которая представляет диаграмму мгновенного нагружения $\sigma = f_1[\varepsilon(t)]$. Функция $\Phi[\sigma(t)]$ имеет размерность напряжений. Выражение $f_2[\sigma(t)]$ удобно отыскивать в виде обратной интерполяции с помощью обращения ряда.

Во-вторых, на основании принципа аналогии, широко используемого в классической механике, в интегральное уравнение ползучести введена новая переменная

$$\varepsilon(t) = \frac{\Phi[\sigma(t)]}{E(t)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\Phi[\sigma(\tau)]}{E(\tau)} K(t, \tau) d\tau. \quad (14)$$

Структура ядра $K(t, \tau)$ сохраняет свою обычную форму, принятую в классической линейной теории ползучести.

Удовлетворяются требования, предъявляемые использованием принципа Вольтерра. Упругопластические свойства при разгрузке учитываются известным приемом изменения вида функции $\Phi[\sigma]$: во многих случаях при разгрузке материалы обладают упругомгновенными свойствами.

Структура интегрального члена в (14) полностью соответствует структуре интегральных членов (4) и учитывает все особенности явления ползучести.

Варьирование (14) дает

$$\delta\varepsilon(t) = \delta\varepsilon_M(t) + \int_{\tau_0}^t \delta\varepsilon_M(\tau) K(t, \tau) d\tau. \quad (15)$$

Отсюда следует, что полная деформация $\varepsilon(t)$ однозначно определяется через мгновенную деформацию $\varepsilon_M(t)$, которая находится из диаграммы нелинейного мгновенного деформирования σ - ε .

Теория (14) устраняет важный пробел учета мгновенных нелинейных свойств конструкционных материалов при ползучести. Устраняется разрыв, существовавший между линейной теорией ползучести, предложенной для расчета конструкций, и нелинейной теорией расчета предельного состояния этих же конструкций.

Используя инвариантное во времени ядро ползучести теории упругой наследственности («стандартное вязкоупругое тело», тело Кельвина), интегральное уравнение (14) можно свести к следующему дифференциальному уравнению

$$\dot{\Phi}[\sigma(t)] + \Phi[\sigma(t)](\gamma_0 + \gamma_0 EC_0) = \dot{\varepsilon}(t)E + \varepsilon(t)E\gamma_0, \quad (16)$$

где $C(t, \tau) = C_0(1 - e^{-\gamma_0(t-\tau)})$.

Для модели Маслова-Арутюняна дифференциальное уравнение ползучести записываем в виде

$$\ddot{\Phi}[\sigma(t)] + \left[\gamma_0(1 + E\varphi(t)) - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} \right] \dot{\Phi}[\sigma(t)] = E(t) \left[\ddot{\varepsilon}(t) + \gamma_0 \dot{\varepsilon}(t) \right]. \quad (17)$$

Методы расчета конструкций с использованием (14) и моделей Еврокодов изложены в [1]. Результаты численной реализации и перспективы использования методов приведены в [2].

Вторая проблема рассматривается на примере ползучести бетона. К настоящему времени в различных работах предложено большое количество функций, предназначенных для аппроксимации удельной деформации ползучести $C(t, \tau)$. Однако, при их использовании не учитывается важное обстоятельство. Проблема состоит в том, что при определенных видах функции $C(t, \tau)$, среди прочих сил, возникают силы σ , пропорциональные полному ускорению $\ddot{\varepsilon}(t)$, что несовместимо с ньютоновой механикой и нарушает ее фундаментальный принцип.

В механике Ньютона сила σ может быть функцией от положения (координат), скорости, времени, других величин. Если же присутствует (среди прочих) сила σ , пропорциональная ускорению $\ddot{\varepsilon}(t)$, то оказывается нарушенным принцип независимости действия сил. Вопрос о силах, пропорциональных ускорению, рассмотрел Парс Л. и показал их неприменимость в задачах классической механики, несмотря на то, что для такого класса сил уже была разработана общая теория, например Биркгофа Д.

Чтобы установить присутствие сил, пропорциональных $\ddot{\varepsilon}(t)$, необходимо интегральное уравнение ползучести привести к дифференциальной форме. Например, существует ряд предложений функцию $C(t, \tau)$ записывать для бетона в следующей форме

$$C(t, \tau) = C_0(1 - e^{-\gamma_0(t-\tau)}) + C_1(1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}). \quad (18)$$

С учетом (18), интегральное уравнение (1) приводим к дифференциальному уравнению

$$\ddot{\varepsilon} a_2 + \dot{\varepsilon} a_1 + \varepsilon a = \ddot{\sigma} b_2 + \dot{\sigma} b_1 + \sigma b, \quad (19)$$

где

$$a_2 = E; a_1 = (\gamma_0 + \gamma_1)E; a = \gamma_0 \gamma_1 E; \\ b_2 = 1; b_1 = (\gamma_0 + \gamma_1) + EC_0 \gamma_0 + EC_1 \gamma_1; b = (1 + EC_0 + EC_1) \gamma_0 \gamma_1.$$

Уравнению (19) соответствует также определенная комбинация элементов Гука и вязких элементов Ньютона. Из (19) находим

$$\sigma = \mu \ddot{\varepsilon} + F_1,$$

где $\mu = \frac{a_2}{b}; F_1 = \frac{a_1}{b} \dot{\varepsilon} + \frac{a}{b} \varepsilon - \frac{b_2}{b} \dot{\sigma} + \frac{b_1}{b} \sigma.$

Основное уравнение динамики имеет вид

$$m \ddot{\varepsilon} = \mu \ddot{\varepsilon} + F_1, \quad (m - \text{масса}) \quad (20)$$

и оно свидетельствует о нарушении принципа независимости действия сил.

Этот принцип, в форме принципа наложения воздействий, является основной гипотезой при выводе интегральной зависимости (1).

В теории Маслова-Арутюняна сил, пропорциональных ускорению $\ddot{\varepsilon}$, нет, так как в соответствующем дифференциальном уравнении ползучести присутствует скорость силы $\dot{\sigma}$.

Изложенное показывает недопустимость произвола в выборе вида ядра интегрального уравнения ползучести.

Л и т е р а т у р а

1. Беглов А. Д. Евростандарты и нелинейная теория железобетона / А. Д. Беглов, Р. С. Санжаровский. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – 309 с.
2. Rybnov E. On the durability reinforced concrete structures / E. Rybnov, R. Sanzarovsky, D. Beilin // Journal “Scientific Israel – Technological Advantages”, Vol.13, №4, 2011. – P. 111-121.

R e f e r e n c e s

1. Beglov, A. and Sanzarovsky, R. (2011). Eurostandards and nonlinear theory of reinforced concrete. – SPb.: SPbSUACE, 2011. – 309 p.
2. Rybnov, E., Sanzarovsky, R., Beilin, D. (2011). On the durability reinforced concrete structures, Journal “Scientific Israel – Technological Advantages”, Vol.13, №4, pp. 111-121.

THE PROBLEMS OF THE CREEP THEORY

Sanzarovsky R.S.

Sankt-Peterburgskiy gosudarstvenniy arhitekturno-stroitelniy universitet, Sankt-Petersburg

In this paper, an analysis of the patterns for creep theory of structural materials is realized and two important outstanding problems are revealed.

The first problem consists in the use in the integral equation two or more numbers of instantaneously strain diagrams of the materials.

The twice problem appears in the use of inconsistent functions for presentation of the core. It reduces to results inconsistent with Newton’s mechanics, that gets impossible applications Volterr’s principle. There are models which solve indicated problems.

KEY WORDS: heritable elasticity; instantaneous plastoelastic deformations; forces are proportional to acceleration.