

Теория упругости

ЗАРОЖДЕНИЕ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Р.А. ИСКЕНДЕРОВ, аспирант

Азербайджанский Архитектурно-строительный университет,
Азербайджан, AZ1117, Баку, ул. М. Гусейнзаде, 31, e-mail: iske@mail.ru

Дается математическое описание модели зарождения трещин при поперечном изгибе в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий. Строятся общие представления решений, описывающие класс задач с периодическим распределением напряжений вне круговых отверстий. Решение задачи о зарождении трещин сводится к двум бесконечным алгебраическим системам и двум сингулярным интегральным уравнениям первого рода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тонкая пластина, периодическая система круговых отверстий, поперечный изгиб, зоны предразрушения, зарождение трещин.

Постановка задачи. Пусть изотропная упругая пластина, опертая или защемленная по краям периодической системой круговых отверстий, изгибается под действием поперечной нагрузки $q = \text{const}$. В этом случае имеет место перио-

дическое распределение смещений. Рассмотрим задачу изгиба пластины под действием постоянной поперечной нагрузки q , когда края круговых отверстий жестко заделаны. Считается, что круговые отверстия имеют радиус λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Процессы разрушения материалов имеют сложный характер и протекают для различных материалов по-разному, в зависимости от особенностей структуры материала, вида напряжения и других факторов. В настоящее время известны различные механизмы зарождения трещин [1, 2]. Задача о зарождении трещины является важной проблемой теории прочности [3-5].

Пластины, ослабленные большим числом отверстий, широко используются в различных отраслях техники и в строительстве. Они подвергаются действию силовых нагрузок. Для практики исследование вопросов разрушения пластин, ослабленных периодической системой круговых отверстий при поперечном изгибе, имеет важное значение.

По мере нагружения тонкой пластины поперечной силовой нагрузкой q в пластине будут возникать зоны предразрушения, которые моделируем как области ослабленных межчастичных связей материала. Зоны предразрушения (прослойки перенапряженного материала) будем моделировать в виде узких слоев со связями между берегами. Взаимодействие берегов зоны предразрушения моделируется путем введения между берегами зоны связей, имеющих заданную диаграмму деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей, в которых осуществляется взаимодействие берегов зоны предразрушения, зависят от вида материалов. Так как прослойки перенапряженного материала малы по сравнению с остальной упругой частью пластины, их можно мысленно удалить, заменив разрезами, поверхности которых взаимодействуют между собой по некоторому закону, соответствующему действию удаленного материала. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию областей предразрушения на ранних стадиях развития в виде узких слоев, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой зоной [1, 2, 6].

Принимается, что зоны предразрушения ориентированы в направлении максимальных растягивающих напряжений и между берегами имеются связи, которые сдерживают раскрытие берегов зоны предразрушения. Таким образом, рассматриваемая тонкая пластина ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных зон предразрушения коллинеарных осей абсцисс и ординат неравной длины (рис. 1). Считается, что в зоне предразрушения имеет место пластическое течение при постоянном напряжении.

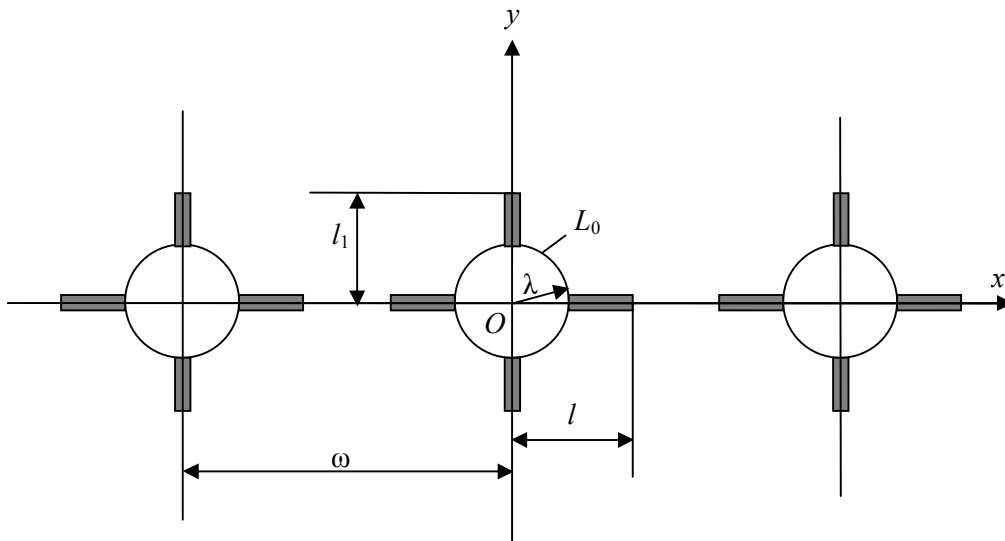


Рис. 1

Под действием поперечной нагрузки в связях, соединяющих берега зоны предразрушения, возникают усилия, имеющие из-за симметрии задачи только нормальную составляющую $\sigma_y = \sigma_s$. Следовательно, к берегам зоны предразрушения будут приложены только нормальные изгибающие моменты M_s . Размер зоны предразрушения заранее неизвестен и должен быть определен в процессе решения краевой задачи механики разрушения пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий, при поперечном изгибе.

Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния пластины, в нахождении предельной нагрузки, по достижении которой произойдет появление трещины. В исследуемом случае возникновение трещины представляет собой процесс перехода области предразрушения в область разорванных связей между поверхностями материала.

Дифференциальное уравнение для искомой функции прогиба w , определяющей напряженное и деформированное состояние пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий, имеет вид

$$D\Delta\Delta w = q,$$

где Δ – оператор Лапласа; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины.

По мере увеличения интенсивности поперечной нагрузки в такой пластине вокруг отверстий образуются периодически расположенные зоны повышенных напряжений, способствующие зарождению трещин возле отверстий, что в свою очередь может привести к полному разрушению пластины.

Предполагается отсутствие упругих смещений вдоль обвода круговых отверстий.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области, занятой материалом пластины, напряжения являются периодическими функциями с периодом ω . Определение искомой функции прогиба w в рассматриваемой задаче сводится к решению краевой задачи

$$\Delta\Delta w = q/D, \tag{1}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на контурах отверстий,} \quad (2)$$

$$M_n = M_s, \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial t} = 0 \quad \text{на берегах зоны предразрушения.} \quad (3)$$

Общее решение неоднородного бигармонического уравнения (1) при условии $q = \text{const}$ можно представить в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y), \quad (4)$$

$$w_0(x, y) = \frac{q(z\bar{z})^2}{64D} + \frac{2q}{D} \text{Re} \left[z\bar{\varphi}_0(z) + \chi_0(z) \right],$$

$$w_1(x, y) = \frac{2q}{D} \text{Re} \left[z\bar{\varphi}_1(z) + \chi_1(z) \right]$$

Здесь $w_0(x, y)$ можно рассматривать как некоторое частное решение уравнения поперечного изгиба пластины, $w_1(x, y)$ – общее решение однородного бигармонического уравнения.

На основании соотношений теории [7] Кирхгофа и (4) приведем соотношения, определяющие моменты и усилия, возникающие в пластине

$$M_x + M_y = -(1 + \nu)q \left[\frac{z\bar{z}}{4} + 8 \text{Re} \Phi(z) \right], \quad (5)$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = (1 - \nu)q \left\{ \frac{z^2}{8} + 4 \left[z\bar{\Phi}'(z) + \Psi(z) \right] \right\},$$

$$N_x - iN_y = -\frac{qz}{2} - 8q\Phi'(z),$$

где M_x , M_y и H_{xy} – соответственно удельные изгибающие и крутящие моменты. Приведем соотношение для углов поворота пластины

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{qz^2\bar{z}}{16D} + \frac{2q}{D} \left[\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\psi(z)} \right]. \quad (6)$$

На основании граничных условий на жестко защемленных краях отверстий имеем

$$\frac{\tau^2\bar{\tau}}{32} + \varphi(\tau) + \tau\overline{\Phi(\tau)} + \overline{\psi(\tau)} = 0,$$

где $\tau = \lambda \exp(i\theta) + m\omega$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Дифференцируя это соотношение по направлению s , касательному к контуру L_m , находим

$$\frac{\tau\bar{\tau}}{32} + \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - \left[\tau\overline{\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau) \right] e^{2i\theta}. \quad (7)$$

С помощью соотношений (5) и граничных условий на берегах зон предразрушения будем иметь

$$\frac{3t^2}{32} + \varepsilon\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = M_s + ic \quad \text{на } L'_1, \quad (8)$$

$$\frac{3t_1^2}{32} + \varepsilon\Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} = M_s + ic_1 \quad \text{на } L'_2,$$

где t и t_1 – абсциссы точек берегов зон предразрушения, направленных коллинеарно осям абсцисс и ординат, соответственно; c, c_1 – действительные постоянные, определяемые в ходе решения задачи; $\varepsilon = -(3 + \nu)/(1 - \nu)$; L'_1 – совокупность берегов зон предразрушения, коллинеарных оси абсцисс; L'_2 – совокупность берегов зон предразрушения, коллинеарных оси ординат.

Для определения значений внешней нагрузки q , при которой происходит зарождение трещины, постановку задачи нужно дополнить условием (критерием) появления трещины (разрыва межчастичных связей материала). В качестве такого условия принимаем [4, 5] критерий критического раскрытия берегов зоны предразрушения. В рассматриваемой задаче эти условия запишутся в виде

$$v^+(x,0) - v^-(x,0) = \delta_{cr} \quad \text{для } L'_1, \quad (9)$$

$$u^+(x,0) - u^-(x,0) = \delta_{cr} \quad \text{для } L'_2,$$

где δ_{cr} – характеристика сопротивления материала пластины трещинообразованию.

Решение задачи. Аналитические функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (10)$$

$$\Phi_0(z) = \varphi_0'(z), \quad \Psi_0(z) = \chi_0''(z),$$

$$\varphi_0(z) = \varphi_{01}(z) + \varphi_{10}(z), \quad \chi_0(z) = \chi_{01}(z) + \chi_{10}(z), \quad (11)$$

$$\varphi_{01}(z) = A_1z + A_0\rho_3(z) - \alpha_2\lambda^2\rho_1(z),$$

$$\chi_{01}(z) = B_0 + B_2z^4 - A_0S_3(z) - \beta_2\lambda^2\rho_2(z) + \alpha_2\lambda^2S_1(z),$$

$$\varphi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (12)$$

$$\chi_{10}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k+2}(z) \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2}(z) \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k-1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{i\omega(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt, \quad (13)$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{i\omega^2(1+\kappa)} \int_{L_1} g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-z) dt,$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{i\omega(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1(t_1) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) dt_1,$$

$$\Psi_2(z) = -\frac{1}{i\omega(1+\kappa)} \int_{L_2} \left[2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) + \frac{\pi}{\omega} (2t_1 + iz) \sin^2 \frac{\pi}{\omega} (it_1 - z) \right] g_1(t_1) dt_1,$$

Интегралы в (13) берутся по линиям $L_1 = [-l, -\lambda] \cup [\lambda, l]$, $L_2 = [-l_1, -\lambda] \cup [\lambda, l_1]$,

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \left(\sin^{-2} \frac{\pi z}{\omega} - \frac{1}{3} \right), \quad \rho_1(z) = \frac{\pi}{\omega} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi z}{\omega} - \frac{1}{3} \frac{\pi z}{\omega} \right), \quad (14)$$

$$\rho_2(z) = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi z}{\omega} \right)^2 \ln \sin \frac{\pi z}{\omega}, \quad \rho_3(z) = \int \rho_2(z) dz,$$

$$\rho_2(z) = \sum_m \left[\frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right], \quad S_1(z) = -\int S(z) dz.$$

$$S_2(z) = -\iint S(z) dz, \quad S_3(z) = -\iiint S(z) dz$$

Функции (14) выбраны так, что $w_1(x, y)$ является периодической. Постоянные A_0, A_1, B_2 нужно подобрать таким образом, чтобы функция $w_0(x, y)$ была периодической. Используя условие периодичности функции $w_0(x, y)$ и свойства введенных функций (14), находим, что

$$A_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^2, \quad B_2 = \frac{A_0}{2} \left(\frac{\pi \omega}{24} \right)^2, \quad 2A_1 = C_1 + \alpha \beta_2 \lambda^2, \quad (15)$$

$$C_1 = -A_0 \left(\frac{b - a_1}{\omega} - i\pi + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \left(\frac{\omega}{2} \right)^4 \right), \quad b = \left(\rho_3 + \frac{\pi^2}{24} \right) \omega,$$

$$a_1 = \left(S_2 - i\pi - \frac{a_2}{2} \right) \omega - \rho_2 \omega^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{\omega}{2} \right)^5,$$

$$a_2 = -\frac{\pi^2}{6} \left(\left(\frac{\omega}{2} \right)^4 + 1 \right), \quad a = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2.$$

Таким образом, соотношения (10)-(13) с учетом выражений (15) дают периодическую функцию $w(x, y)$. Постоянная B_0 в формуле для функции $\chi_0(z)$ находится из условия равенства нулю $w(x, y)$ на контуре кругового отверстия L_0 .

Из условий симметрии относительно координатных осей, находим, что

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Можно убедиться, что представления (10)-(13) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением смещений. Неизвестные функции $g(x), g_1(y)$ и коэффициенты α_{2k}, β_{2k} ($k=1, 2, \dots$) должны быть определены из краевых условий (7)-(8).

В силу выполнения условия периодичности система граничных условий (7) вырождается в одно функциональное уравнение, например, на контуре L_0 ($\tau = \lambda \exp(i\theta)$), а система краевых условий (8) вырождается в краевое условие на L'_1 и L'_2 .

Граничное условие (7) преобразуем относительно аналитических функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$:

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} = f_1(\theta) + if_2(\theta) + \varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) - \frac{\overline{\tau\tau}}{32}, \quad (16)$$

где
$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_1(\tau) - \overline{\Phi_1(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi'_1(\tau) + \Psi_1(\tau)]e^{2i\theta}, \quad (17)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi'_2(\tau) + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta}.$$

Относительно функций $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ и $\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta)$ будем считать, что на контуре кругового отверстия $|\tau|=\lambda$ они разлагаются в ряды Фурье. На основании симметрии задачи эти ряды имеют вид ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } F_{2k} = 0 \quad (18)$$

$$\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } D_{2k} = 0$$

$$F_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-2ik\theta} d\theta, \quad (19)$$

$$D_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 + i\varphi_2) e^{-2ik\theta} d\theta,$$

Для нахождения величин F_{2k} , D_{2k} подставим в (19) выражение (17) и поменяв порядок интегрирования, после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, находим

$$F_{2k} = -\frac{1}{\omega} \int_{L_1} g^*(t) f_{2k}(t) dt, \quad g^*(t) = \frac{g(t)}{i(1+\kappa)}, \quad (20)$$

$$D_{2k} = -\frac{1}{\omega(1+\kappa)} \int_{L_2} g_1^*(t_1) \varphi_{2k}(t_1) dt_1.$$

Функции $f_{2k}(t)$, $\varphi_{2k}(t_1)$ определяются следующими формулами

$$f_0(t) = 2\gamma(t), \quad f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t), \quad (21)$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{2k}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{2k-2}(t) \quad (k=2, 3, \dots),$$

$$f_{-2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{2k}(t) \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$\gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t, \quad \varphi_0(it_1) = \delta(it_1) - \overline{\delta(it_1)}, \quad \delta(it_1) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} it_1,$$

$$\varphi_2(it_1) = -\frac{\lambda^2}{2} \delta^2(it_1) + 2[\delta(it_1) - it_1 \overline{\delta(it_1)}],$$

$$\varphi_{2k}(it_1) = -\frac{(1-2k)\lambda^{2k}}{(2k)!} \delta^{2k}(it_1) + \frac{2\lambda^{2k}}{(2k-2)!} \left[k\delta^{2k-2}(it_1) - it_1\delta^{2k-1}(it_1) \right] \quad (k=2,3,\dots),$$

$$\varphi_{-2k}(it_1) = -\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \overline{\delta^{2k}(it_1)} \quad (k=1,2,\dots).$$

Для получения алгебраических уравнений, определяющих коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , применяем метод степенных рядов. Для этого подставим в левую часть граничного условия (16) вместо аналитических функций $\Phi_0(\tau)$, $\overline{\Phi_0(\tau)}$, $\Phi'_0(\tau)$ и $\Psi_0(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а в правую часть (16) вместо $f_1 + if_2$ и $\varphi_1 + i\varphi_2$ ряды Фурье (18). С помощью метода степенных рядов получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} . После некоторых преобразований получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k}

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2j+2} + b_j \quad (j=0,1,2,\dots) \quad (22)$$

$$A_{j,k} = (2j+1)\alpha_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \quad \alpha_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\alpha_{j,k} = -\frac{(2j+2k+2)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k},$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \quad b_{j,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left[\frac{1+a\lambda^2}{1-a\lambda^2} \right],$$

$$a = \frac{\pi^2}{12}, \quad b_0 = F_2 + D_2 - \frac{\lambda^2}{32} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} C_{-2k-2},$$

$$b_j = C_{2j+2} + \frac{(2j+1)g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \frac{C_1 - A_0^*}{1-a\lambda^2} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} C_{-2k-2},$$

$$A_0^* = F_0 + D_0 + A_0(1 - 2 \ln \lambda) - \frac{\lambda^2}{32},$$

$$C_{-2} = F_{-2} + D_{-2} + \frac{\lambda^2}{32}, \quad C_4 = F_4 + D_4 - \frac{\lambda^2}{32} - \frac{3\lambda^2}{64} g_2 A_0,$$

$$C_{2k+2} = F_{2k+2} + D_{2k+2} + \left[\frac{g_k \lambda^{2k}}{2^{2k}} - \frac{(2k+1)g_{k+1} \lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}} \right] A_0,$$

$$C_{-2k-2} = F_{-2k-2} + D_{-2k-2} + \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{(2k+2)2^{2k+2}} A_0.$$

Неизвестные коэффициенты β_{2k} определяются из следующих уравнений

$$\beta_2 = \frac{1}{1-a\lambda^2} \left[C_1 - A_0^* + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (23)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - C_{-2j-2}.$$

Таким образом, с помощью решения краевой задачи (8) удалось определить искомые коэффициенты α_{2k} , β_{2k} свести к бесконечным алгебраическим уравнениям, в правой части которых содержатся величины, зависящие в виде интегралов от искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$. Для определения искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ имеем краевое условие (9) на берегах зон предразрушения, коллинеарных осям абсцисс и ординат.

Требую, чтобы функции (10) удовлетворяли краевому условию на контуре L'_1 , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$\frac{1+\varepsilon}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + N(x) = M_s + ic \quad (24)$$

$$H(x) = \frac{3x^2}{32} + (1+\varepsilon)\Phi_*(x) + x\Phi'_*(x) + \Psi_*(x),$$

$$\Phi_*(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x), \quad \Psi_*(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Удовлетворяя краевому условию на контуре L'_2 , получаем еще одно сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции $g_1(y)$

$$-\frac{\pi(1+\varepsilon)}{\omega} \int_{L_2} g_1(t) \left[(t-y) \operatorname{sh}^{-2} \frac{\pi}{\omega} (t-y) \right] dt + N_1(y) = M_s + ic_1, \quad (25)$$

$$N_1(y) = -\frac{3y^2}{32} + \varepsilon\Phi_s(iy) + \overline{\Phi_s(iy)} + (iy)\overline{\Phi'_s(iy)} + \overline{\Psi_s(iy)},$$

$$\Phi_s(x) = \Phi_1(x) + \Phi_0(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_1(x) + \Psi_0(x).$$

Каждое сингулярное интегральное уравнение задачи с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по чебышевским узлам, без промежуточного этапа приведения к уравнению Фредгольма сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

Для определения постоянной c имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \int_{-l}^{-\lambda} \bar{t}g(t) dt = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^l \bar{t}g(t) dt = 0, \quad (26)$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершине L'_1 при $x = \pm l$. Аналогично, для определения постоянной c_1 имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \int_{-l_1}^{-\lambda} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\lambda}^{l_1} \bar{t}_1 g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad (27)$$

обеспечивающие равенство нулю скачка прогиба в вершинах L'_2 при $y = \pm l_1$. Удовлетворяя условиям (26) и (27), находим, что постоянные c и c_1 равны нулю.

Из-за неизвестных размеров зон предразрушения (параметров l и l_1) объединенная алгебраическая система уравнений оказывается нелинейной. Поскольку напряжения в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, ограничены, решение краевой задачи ищется в классе всюду ограниченных функций. Для этого необходимо добавить к основным разрешающим уравнениям условия разрешимости краевой задачи в классе всюду ограниченных функций. Эти условия (условия ограниченности напряжений в окрестности вершин зон предразрушения $x = \pm l$ и $y = \pm l_1$) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_k^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0, \quad \theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^M (-1)^k g_{1k}^0(\tau_m) \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2} = 0$$

Эти уравнения служат для определения размеров зон предразрушения (параметров l и l_1). Добавляя эти два уравнения (28) к основным разрешающим уравнениям (22)-(25) получаем замкнутую систему уравнений. Указанные системы (22)-(25) и (28) полностью определяют решение задачи теории изгиба перфорированной пластины с зонами предразрушения.

Согласно условию (9) появление трещины произойдет при достижении раскрытием берегов зоны предразрушения предельного (для данного материала при заданных условиях) значения δ_{cr} . Используя решение задачи, это условие можно записать в виде

$$\int_x^l g(t) dt = -i\delta_{cr}, \quad \int_y^{l_1} g_1(y) dy = -i\delta_{cr} \quad (17)$$

Очевидно, что разрыв межчастичных связей материала будет происходить, когда $x = \pm \lambda$ или $y = \pm l_1$.

Полученные уравнения дают возможность при заданных характеристиках материала определить предельную внешнюю нагрузку, при которой в пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, появится трещина.

Объединенная нелинейная алгебраическая система решалась методом последовательных приближений. При изменении радиуса кругового отверстия в диапазоне $0,1 < \lambda \leq 0,6$ значения коэффициентов α_{2k} , β_{2k} , как и значения искомых функций $g(x)$ и $g_1(y)$ в узловых точках по существу не меняются (совпадают с точностью до шестого знака), начиная с $M = 20$. В диапазоне изменения радиуса кругового отверстия $0,6 \leq \lambda \leq 0,8$ оказалось достаточным взять $M = 40$, а бесконечные системы урезать до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака). Если $\lambda > 0,8$, решение совпадает с точностью до третьего знака, начиная с $M = 60$, при этом бесконечные системы урезались до

30 уравнений. Следует отметить, что значения параметра $\lambda > 0,8$ выпадают из рабочего диапазона изменения радиуса кругового отверстия пластины.

Анализ модели зарождения трещины в тонкой пластине, ослабленной периодической системой круговых отверстий, при однородном изгибе сводится к параметрическому исследованию алгебраических систем (22)-(25), (28) и критерия появления трещины (9) при различных характеристиках материала и геометрических параметрах пластины.

Л и т е р а т у р а

1. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
2. Rusinko A., Rusinko K. *Plasticity and Creep of Metals*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 436 с.
3. Болотин В.В. Механика зарождения трещин и начального развития усталостных трещин // ФХММ. 1986. т. 22, №1, с. 18-23.
4. Мирсалимов В.М. Зарождение дефекта трещины во втулке контактной пары // Математическое моделирование. 2005, т. 17, №2, с. 35-45.
5. Zolgharnein E., Mirsalimov V. M. Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies // *Acta Polytechnica Hungarica*. 2012. Vol. 9, No. 2, pp. 169-183.
6. Мирсалимов В.М. Неодномерные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз. 1963. – 636 с.

R e f e r e n c e s

1. Panasyk, V.V. (1991). *Mechanics of Quasibrittle Fracture of Materials*, Naukova Dumka, Kiev, 416 с.
2. Rusinko, A., Rusinko, K. (2011). *Plasticity and Creep of Metals*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 436 с.
3. Bolotin, V.V. (1986). The fatigue crack nucleation and initial propagation, *Materials Science*, vol. 22, №1, pp. 18-23.
4. Mirsalimov, V.M. (2005). Nucleation crack in the hub of contact pair, *Matematicheskoe modelirovanie*. vol. 17, №2, pp. 35-45.
5. Zolgharnein, E., Mirsalimov, V. M. (2012). Nucleation of a Crack under Inner Compression of Cylindrical Bodies, *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 9, No. 2, pp. 169-183.
6. Mirsalimov, V.M. (1987). *Not-one dimensional elastoplastic problems*, М.: Nauka, 256 с.
7. Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger (1959). *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 636 с.

THE CRACK NUCLEATION IN THE ISOTROPIC PLATE, WEAKENED BY A PERIODICAL SYSTEM OF CIRCULAR HOLES UNDER TRANSVERSE BENDING

R.A. Iskenderov,
Azerbaijan Architecture and Construction University

The mathematical description of model of crack nucleation in the thin plate weakened by periodic system of circular holes under transverse bending is given. The general representations of solutions describing a class of problems with periodic distribution of stresses out-side of circular holes are obtained. The solution of a problem on crack nucleation is reduced to two infinite algebraic systems and two singular integrated equations of first kind.

KEYWORDS: thin plate, periodic system of circular holes, transverse bending, prefracture zone, crack nucleation.