# К ВОПРОСУ О ЗАКРУЧЕННОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Н.К. ПОНОМАРЕВ, *канд. техн. наук, доцент*
*Российский университет дружбы народов,*
*117198, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3,*

*Л.Г. Лойцянский поставил и решил систему из четырех дифференциальных уравнений в частных производных для ламинарного закрученного движения вязкой жидкости в трубе [1], вытекающей в пространство, заполненное той же жидкостью. Определены скорости частиц и давление в виде рядов, зависящих от продольного расстояния. Автор рассматривает другое решение, где имеется вурфовая пропорция между тремя компонентами скорости частицы жидкости.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: механика жидкости, ламинарное движение, вязкая жидкость.

Известно, что ламинарное закрученное движение вязкой жидкости может быть описано следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(r^2 \cdot u \cdot w\right) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot v \cdot w\right) = \upsilon \cdot \left\{ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[ r \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot w)\right] - 2 \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot w)\right\}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[r \cdot \left(p + \rho \cdot u^2\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial r}\left[ r \cdot \left( \rho \cdot u \cdot v - \mu \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = \rho \cdot \dfrac{w^2}{r}, \\ \dfrac{\partial (r \cdot u)}{\partial x} + \dfrac{\partial (r \cdot v)}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad , \qquad (1)$$

где $\rho, \mu, \upsilon$ являются физическими константами жидкости, $p$ – давление в ее потоке, $x$ – координата вдоль центральной линии симметричной трубы, $r$ – координата, отмечающая расстояние точки от центральной линии, $u,v,w$ представляют собой, соответственно, продольную, радиальную и трансверсальную компоненты скорости частицы жидкости. Четвертое уравнение в системе (1) говорит о том, что имеют место два следующих равенства:

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \tag{2}$$

$$v = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Здесь $\Psi = \Psi(x, r)$ является некоторой дифференцируемой функцией от $x$ и $r$. Лойцянский ищет и находит выражения для трансверсальной составляющей скорости $w$ и давления $p$.

1. Целью настоящей работы также является нахождение величин $w$ и $p$, но не в виде рядов и при других достаточно общих предположениях. Действительно, если рассмотреть движущуюся жидкую частицу жидкости, то для нее должен выполняться закон сохранения энергии в известной форме:

$$K + \Pi = C, \tag{4}$$

где $K$ – ее кинетическая энергия, $\Pi$ – ее потенциальная энергия, $C$ – некоторая константа, которая возможно равна нулю.

Выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$K = \frac{m \cdot \left(v^2 + u^2 + w^2\right)}{2}, \tag{5}$$

где под квадратами компонентов скорости понимаются скалярные произведения их векторов $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, $w^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$. Будем считать, что потенциальная энергия жидкой частицы является заданной функцией времени:

$$\Pi = \Pi(t), \ t \in [0, \infty). \tag{6}$$

В простейшем случае будем рассматривать ее как постоянную величину. С учетом формул (5) и (6) закон сохранения энергии для частицы жидкости запишется

$$\frac{m \cdot \left(v^2 + u^2 + w^2\right)}{2} + \Pi(t) = C. \tag{7}$$

Производя некоторые очевидные преобразования можно получить из последней формулы

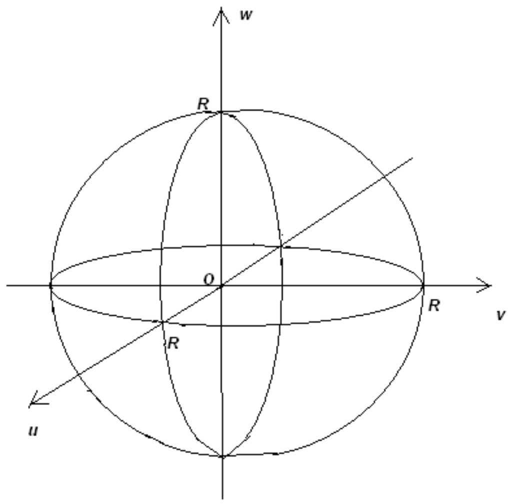
$$v^2 + u^2 + w^2 = \frac{2}{m} \cdot \left[C - \Pi(t)\right]. \tag{8}$$

В пространстве скоростей $u,v,w$ соотношение (8) представляет собой окружность (см. фиг. 1) радиуса

$$R = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left[C - \Pi(t)\right]}, \tag{9}$$

причем этот радиус является неотрицательной величиной, как следует из закона сохранения энергии, и имеет максимум, как функция $t$:

$$0 \le R \le \sqrt{2C / m}. \tag{10}$$




Фиг.1. Закон сохранения энергии жидкой частицы в пространстве скоростей *u, v, w*.

2. Назовем вурфом скоростей $W = W(u,v,w)$ функциональное выражение

$$W = 1 + \frac{u \cdot w}{v \cdot (u + v + w)}. \tag{11}$$

Предположим, что существует *вурфовый канон* для трех компонентов скорости движения жидкой частицы вида

$$W = D, \tag{12}$$

где $D$ – некоторая константа. Проведя несложные преобразования, можно получить из последней формулы следующее соотношение

$$v^2 + u \cdot v + v \cdot w + \frac{1}{1-D} \cdot u \cdot w = 0. \tag{13}$$

В пространстве скоростей *u, v, w* формула (13) будет задавать некоторую поверхность второго порядка, вид которой представляет интерес. Для определения типа этой поверхности вычислим инварианты уравнения $I$, $J$, $D$, $A$, $A'$ и получим:

$$I = 1, \tag{14}$$

$$J = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot (1-D)^2}, \tag{15}$$

$$D = \frac{1}{4 \cdot (1-D)} - \frac{1}{4 \cdot (1-D)^2}, \tag{16}$$

$$A = 0, \tag{17}$$

$$A' = \frac{1}{4 \cdot (1-D)^2}. \tag{18}$$

Рассмотрим два теоретических случая: 1) инвариант $D \neq 0$; 2) инвариант $D=0$. Из формулы (16) получаем условие:

$$\frac{1}{1-D} - \frac{1}{(1-D)^2} = 0. \tag{19}$$

Это равенство эквивалентно соотношению

$$\frac{D}{(1-D)^2}=0, \tag{20}$$

т.е. случай 1 имеет место при неравенстве константы $D$ из формулы (12) нулю, а случай 2 соответствует равенству этого $D$ нулю.

Рассмотрим далее первый случай, т.е. $D$ = 0. Поскольку из (15) имеем $J$<0, инвариантная классификация поверхностей второго порядка позволяет сделать вывод: уравнение (13) является уравнением *гиперболического цилиндра*.

Во втором случае, т.е. для $D \neq 0$, та же классификация говорит о том, что уравнение (13) есть уравнение *действительного конуса*.

3. В особом случае, когда $D$ = 1, вурфовый канон для скоростей жидкой частицы (12) примет вид:

$$\frac{u \cdot w}{v \cdot (u+v+w)}=0, \tag{21}$$

т.е. продольная и трансверсальная компоненты скорости одновременно или в отдельности должны обращаться в ноль. Рассмотрим все возможные случаи в отдельности.

3.1. Пусть $u$ = $w$ = 0**.** Тогда система (1) сведется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial r}=0 \\ v+r \cdot \dfrac{\partial v}{\partial r}=0 \end{cases}. \tag{22}$$

Поскольку в общем случае $p=p(x,r)$ получаем из (22), что

$$p=const\,. \tag{23}$$

Для радиальной компоненты скорости жидкой частицы получаем из третьего уравнения системы (22), что

$$v=\alpha/r\,, \tag{24}$$

где $\alpha$ = const. Принимая во внимание формулы (23) и (24), получаем физически, что движение жидкости вдоль трубы отсутствует. Закручивания частиц в сечении трубы не происходит. Давление постоянно везде, а движение частиц происходит лишь в радиальном направлении, причем оно затухает с увеличением расстояния от центра трубы.

3.2. $u$ = 0, $w \neq 0$**.** В этом случае система (1) запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot v \cdot w\right)=\upsilon \cdot \left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot w)\right]-2 \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot w)\right\} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(r \cdot p)=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial r}=\rho \cdot \dfrac{w^2}{r}, \qquad \dfrac{\partial}{\partial r}(r \cdot v)=0 \end{cases}. \tag{25}$$

Аналогично предыдущему случаю имеет место формула (24). Из второго уравнения системы (25) получаем, что давление в жидкости $p$ не зависит от $x$ – расстояния вдоль трубы:

$$p=p(r). \tag{26}$$

Подставляя этот результат в третье уравнение системы (25), получаем, что скорость $w$ зависит только от расстояния $r$:

$$w = w(r). \tag{27}$$

Тогда давление в жидкости, находящейся внутри трубы, можно найти в виде интеграла:

$$p = \rho \cdot \int \frac{w(r)^2}{r} \cdot dr. \tag{28}$$

Физически эти формулы означают ситуацию, в которой движение вдоль трубы отсутствует, действующее давление обеспечивает движение частиц жидкости в радиальном направлении (со скоростью, затухающей по мере удаления от осевой линии трубы) с одновременной их раскруткой в трансверсальном направлении.

3.3. $w = 0$, $u \neq 0$. В данном случае систему (1) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[r \cdot \left(p + \rho \cdot u^2\right)\right] + \dfrac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \left(\rho \cdot u \cdot v - \mu \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right] = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial (r \cdot u)}{\partial x} + \dfrac{\partial (r \cdot v)}{\partial r} = 0 \end{cases}. \tag{29}$$

Из третьего уравнения системы (29) следует: найдется такая функция $\Psi = \Psi(x, r)$, что

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (30) \qquad\qquad v = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (31)$$

А из второго уравнения системы (29) ясно, что давление не зависит от $r$:

$$P = p(x). \tag{32}$$

Тогда первое уравнение системы (29) можно переписать в следующей форме, дающей значение давления в жидкости, заполняющей трубу, через функцию $\Psi$:

$$p = -\frac{2 \cdot \rho}{r^2} \cdot \int \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot dx - \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \mu \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}\right) \cdot dx. \tag{33}$$

Тем самым здесь имеет место физически движение жидкости вдоль трубы и в радиальном направлении без закрутки с давлением, продольной и радиальной компонентами скорости, определяемыми некоторой потенциальной функцией.

4. Пусть $D \neq 1$. В пространстве скоростей $u$, $v$, $w$ рассмотрим два случая уравнения (13) поверхности второго порядка: 1) $D$=0 (гиперболический цилиндр) и 2) $D \neq 0$ (действительный конус).

4.1. Пусть $D$ = 0. Тогда уравнение (13), описывающее *гиперболический цилиндр*, примет более простой вид:

$$v^2 + u \cdot v + v \cdot w + u \cdot w = 0. \tag{34}$$

Введем сферическую систему координат:

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi \\ v = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi \, . \\ \quad w = r \cdot \sin\psi \end{cases} \tag{35}$$

Подставим теперь формулы (35) в уравнение (34), тогда после простых преобразований можно получить зависимость вида:

$$\sin\varphi = -\frac{\sin 2\psi}{1+\cos 2\psi}. \tag{36}$$

Используя формулs (35) и (36), можно выразить $u$, $v$, $w$ только через параметры $r$ и $\psi$ :

$$\begin{cases} u = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\left(\dfrac{\sin 2\psi}{1+\cos 2\psi}\right) \\ \quad v = -r \cdot \sin\psi \qquad , \\ \quad w = r \cdot \sin\psi \end{cases} \tag{37}$$

где $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Подставляя формулы (37) в уравнение (8), получаем путем очевидных преобразований линию пересечения гиперболического цилиндра вурфового канона и шара закона сохранения энергии в виде:

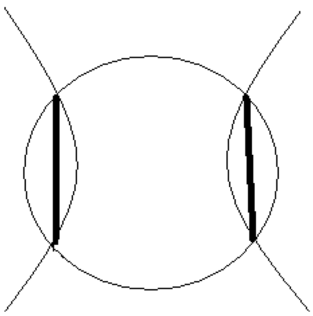


Рис. 2. Вид сверху на пересечение гиперболического цилиндра и шара, которое дает две параллельные окружности (выделены жирным шрифтом)

$$r = \sqrt{\frac{\dfrac{2}{m} \cdot [C - \Pi(t)]}{\cos^2\psi \cdot \cos\left(\dfrac{\sin 2\psi}{1+\cos 2\psi}\right) + 2 \cdot \sin^2\psi}}, \tag{38}$$

где опять же $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Общий вид этой линии представлен на рис. 2.

Найдем теперь решения системы (1). Из формулы (34) можно получить, что

$$w = -v \, . \tag{39}$$

Из третьего уравнения системы (1) с помощью формул (31) и (39) имеем:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r^3} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 . \tag{40}$$

Из второго уравнения системы (1) с помощью формул (30) и (31) получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} + \frac{\mu}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{\rho}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \frac{1}{r} \cdot \left[\rho \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \mu\right] \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} -$$

$$- \frac{\rho}{r} \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{2}{r} + 1\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial r}\right). \tag{41}$$

Соотношения (40) и (41) позволяют найти давление $p$ в виде суммы интегралов

$$p=\int\frac{\rho}{r^3}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\cdot dr+\mu\cdot\int\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}\cdot dx+\mu\cdot\int\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\cdot dx+\rho\cdot\int\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx-$$
$$-\int\frac{1}{r}\left[\rho\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\mu\right]\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\cdot dx-\rho\cdot\int\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{2}{r}+1\right)\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial r}\right)\cdot dx\,. \tag{42}$$

Будем теперь рассматривать не произвольную функцию $\Psi=\Psi(x,r)$, а только такую, которая одновременно удовлетворяет условиям (8) и (34). Подставим формулы (30), (31) и (39) для компонентов скорости *u, v, w* в (8). Тогда получим первое ограничение в форме:

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2+2\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2=\frac{2\cdot r^2}{m}\cdot\left[C-\Pi(t)\right]. \tag{43}$$

Подставим теперь формулы (30), (31) и (39) в уравнение гиперболического цилиндра (34) и получим тождественное равенство, которое выполняется при любых $\Psi=\Psi(x,r)$. Тем самым единственное ограничение – это соотношение (43).

4.2. Пусть $D\neq 0$. В этом случае уравнение (13), описывающее *действительный конус*, имеет вид:

$$v^2+u\cdot v+v\cdot w+\frac{1}{1-D}\cdot u\cdot w=0\,. \tag{35}$$

Введем в пространстве *u*, *v*, *w* цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} u=r\cdot\cos\varphi \\ v=r\cdot\sin\varphi\,. \\ w=z \end{cases} \tag{36}$$

Подставим теперь формулы (36) в уравнение (35) и получим уравнение конуса:

$$r=-\frac{z\cdot\left[\sin\varphi+\dfrac{1}{(1-D)}\cdot\cos\varphi\right]}{\sin\varphi\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)}. \tag{37}$$

Тогда поверхность (35) можно записать, исключив параметр *r*:

$$u=-\frac{z\cdot\left[\sin\varphi+\dfrac{1}{(1-D)}\cdot\cos\varphi\right]\cdot\cos\varphi}{\sin\varphi\cdot(\sin\varphi+\cos\varphi)},$$
$$v=-\frac{z\cdot\left[\sin\varphi+\dfrac{1}{(1-D)}\cdot\cos\varphi\right]}{(\sin\varphi+\cos\varphi)},\quad w=z. \tag{38}$$

Если вставить формулы (38) в закон сохранения энергии (8), можно получить пересечение обеих поверхностей в пространстве *u*, *v*, *w*:

$$z=\pm\sqrt{\frac{2\left[C-\Pi(t)\right]\cdot(1+\sin 2\varphi)/m}{\sin^4\varphi+\dfrac{1}{4\cdot(1-D)^2}\cdot\sin^2 2\varphi+1+\sin 2\varphi\cdot\left[\dfrac{\sin^2\varphi}{(1-D)}+1\right]}}\,. \tag{39}$$

Общий вид этой линии представлен на рис.3.

Найдем теперь решение системы (1). Из равенства (35) следует, что

$$w = -\frac{v\cdot(v+u)}{\left[v+\frac{1}{(1-D)}\cdot u\right]}. \tag{40}$$

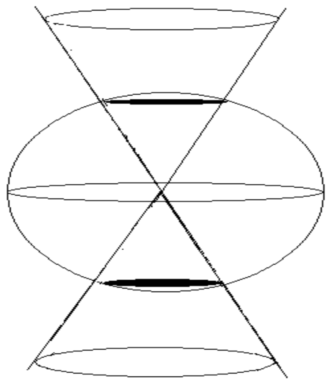


Рис. 3. Пересечение действительного конуса с шаром дает две окружности, являющиеся границами кругов, выделенных черным цветом

С учетом формул (30) и (31), следующих из четвертого уравнения системы (1), можно переписать (40) через функцию $\Psi$ :

$$w = -\frac{1}{r}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\cdot\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)}{\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{(1-D)}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]}. \tag{41}$$

Подставляя (41) в третье уравнение системы (1) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho}{r^3}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)}{\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{(1-D)}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]}. \tag{42}$$

Подставляя (30) и (31) в уравнение (2) получаем частную производную от давления $p$ по $x$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\cdot\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}-\frac{\rho}{r}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\mu}{r}\cdot\left(\frac{1}{r}-2\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{\mu}{r^2}\cdot\left(\frac{1}{r}-2\right)\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}+$$

$$+\frac{\rho}{r^2}\cdot\left(2-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{\rho}{r}\cdot\left(1+\frac{2}{r}\right)\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{43}$$

Комбинируя (42) и (43), получаем формулу для расчета давления в виде:

$$p = \int\frac{\rho}{r^3}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)}{\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{(1-D)}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]}\cdot dr+\mu\cdot\int\frac{\partial^3\Psi}{\partial r^3}\cdot dx-\frac{\rho}{r}\cdot\int\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot dx+$$

$$+\frac{\mu}{r}\cdot\left(\frac{1}{r}-2\right)\cdot\int\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\cdot dx-\frac{\mu}{r^2}\cdot\left(\frac{1}{r}-2\right)\cdot\int\frac{\partial\Psi}{\partial r}\cdot dx+\frac{\rho}{r^2}\cdot\left(2-\frac{1}{r}\right)\cdot\int\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\cdot dx-$$

$$-\frac{\rho}{r}\cdot\left(1+\frac{2}{r}\right)\cdot\int\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\cdot dx. \tag{44}$$

Подставим теперь формулы (30), (31) и (41) в соотношение (8), чтобы получить ограничение на функцию $\Psi$ , вытекающую из закона сохранения энергии:

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\cdot\left\{\frac{2\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\frac{2\cdot D}{D-1}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\left[1+\frac{1}{(1-D)^2}\right]\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\frac{2}{1-D}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{(1-D)^2}\cdot\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2}\right\}+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2=$$

$$=\frac{2\cdot r^2}{m}\cdot\left[C-\Pi(t)\right]. \tag{45}$$

Подстановка (30), (31) и (41) в формулу (35) дает, как нетрудно видеть, тождественный ноль, т.е. ограничение (45) является единственным в данном случае для функции $\Psi$.

## Заключение

Для системы Л.Г. Лойцянского из четырех уравнений в частных производных, описывающих ламинарное закрученное движение вязкой жидкости в трубе, открывающейся в пространство, заполненное той же жидкостью, было построено решение, выражающее продольную, радиальную и трансверсальную компоненты скорости жидкой частицы, а также давление в жидкой трубке через функцию

$$\Psi=\Psi(x,r).$$

Найдены ограничения, налагаемые на эту функцию законом сохранения энергии. По сравнению с решением Лойцянского через разложение в функциональные ряды и поиск их коэффициентов, здесь удалось получить явные аналитические решения в более простых формах – дифференциальных и интегрально- дифференциальных. Это стало возможным благодаря использованию вурфа скоростей и канона пропорциональности, связывающего между собой три компоненты скорости $u$, $v$ и $w$.

## Литература

1. *Лойцянский Л.Г.* Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. – Том XVII. – 1953.

2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – Москва: Наука, 1968

## ON THE PROBLEM OF TWIRLED MOVEMENT OF VISCOUS LIQUID IN A PIPE

N.K. Ponomarev

L.G. Loytsyansky put and solved system from four differential equations in private derivatives for the laminar twirled movement of viscous liquid in a pipe opening in space [1], filled with the same liquid. It found speeds of particles and pressure in the form of the ranks depending on longitudinal distance. Author considers other decision where there is a vurfovy proportion between three components of speed of a particle of liquid.

KEY WORDS: mechanics of liquid, laminar twirled movement, viscous liquid, pipe.