

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОГИБА ТРЕУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С КОМБИНИРОВАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В.И. КОРОБКО, доктор технических наук, профессор,

А.А. АКТУГАНОВ, студент

ФБГОУ ВПО «Государственный университет – учебно- научно- производственный комплекс», г. Орел

*Задача поперечного изгиба треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями (все возможные комбинации шарнирного опирания и жесткого защемления по сторонам) на упругом основании, нагруженных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой решается методом интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ). Для каждой комбинации граничных условий построены аппроксимирующие функции для подсчета двух вспомогательных коэффициентов, необходимых для выбора опорных решений при использовании методики МИКФ.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** треугольные пластинки, комбинированные граничные условия, максимальный прогиб, упругое основание, коэффициент постели, коэффициент формы, метод интерполяции по коэффициенту формы.

Пластинки на упругом основании широко используются в строительстве. К ним относятся фундаменты зданий и сооружений, настилы, покрытия автомобильных дорог и взлетно-посадочных полос аэродромов, днища резервуаров и емкостей. Упругое основание оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние всего сооружения.

Расчет пластинок сложного вида с различными комбинациями граничных условий является весьма трудной задачей, которая решается в настоящее время в основном с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Однако по-прежнему в строительной механике актуальной остается проблема развития аналитических методов расчета таких пластинок, позволяющих с помощью достаточно простых аналитических зависимостей проводить анализ напряженно-деформированного состояния пластинок на упругом основании. Аналитические решения задачи по определению максимального прогиба треугольных пластинок на упругом основании в научной литературе не приводятся.

Метод интерполяции по коэффициенту формы [1] до настоящего времени к расчету пластинок на упругом основании не применялся. Однако в статье [2] приводятся исследования, позволяющие сделать вывод о возможности и перспективности его применения к таким задачам. Используя этот метод, можно получать удовлетворительные оценки интегральных физических характеристик пластинок (таких, как максимальный прогиб) без решения сложных дифференциальных уравнений и использования мощных ЭВМ.

Для расчета пластинок сложных форм с помощью МИКФ необходимо предварительно получить граничные кривые «максимальный прогиб – коэффициент формы» пластинки, на которых будут лежать так называемые «опорные» решения. Подробные сведения о коэффициенте формы и методике МИКФ приводятся в монографии [1]. Для четырехугольных пластинок (ив частности, трапециевидных) одну из граничных кривых образуют решения, полученные для треугольных пластинок. Построению этой границы для данного типа пластинок с различными комбинациями граничных условий (рис. 1) и посвящена предлагаемая статья.

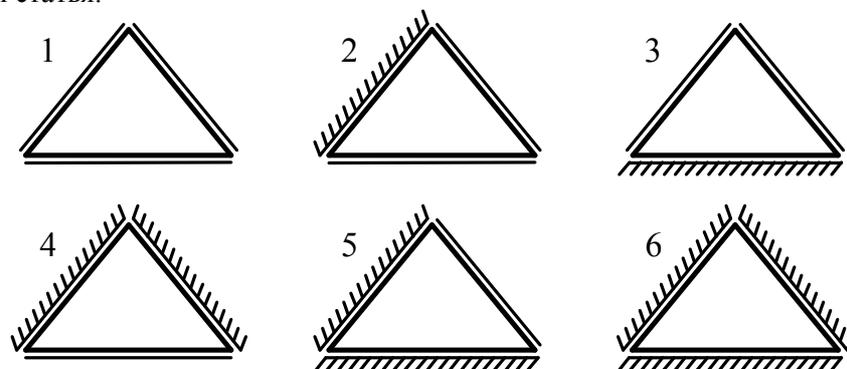


Рис. 1. Возможные комбинации граничных условий для треугольной пластинки (жесткое защемление – шарнирное опирание)

В статье [2] при исследовании вопроса о возможности использования МИКФ для определения максимального прогиба  $w_0$  пластинок на упругом основании была получена формула:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} \left[ \frac{D}{A^2} B + kC \right], \quad (1)$$

где  $q$  – интенсивность равномерно распределенной нагрузки,  $k$  – коэффициент постели;  $A$  – площадь пластинки;  $D$  – её цилиндрическая жесткость;

$B = \Phi_g \cdot K_f^2 \int_0^1 g(p) dp$  и  $C = 2 \int_0^1 g^2(p) dp \int_0^1 g(p) dp$  – коэффициенты пропорциональности, зависящие от формы пластинки и вида граничных условий;  $K_f$  – коэффициент формы пластинки;

$\Phi_g = \int_0^1 (g''^2 p + 2g''g' + g'^2 p^{-1}) dp$ ,  $g(\rho)$  – приближенная функция прогибов пластинки, представленная в однопараметрическом виде;

$\rho = r/r(\varphi)$  ( $r$  – полярная координата произвольной точки пластинки,  $r(\varphi)$  – уравнение контура пластинки в полярных координатах с центром системы координат в точке с максимальным прогибом).

Коэффициенты  $B$  и  $C$  могут быть найдены, если известен максимальный прогиб пластинки при двух значениях коэффициента постели, причём один из

них может быть равен нулю, то есть соответствовать решению для пластинки без упругого основания, а второй может иметь произвольное значение, не равное нулю:

$$\frac{I}{w_0(k=0)} = \frac{D}{qA^2} B \Rightarrow B = \frac{I}{w_0(k=0)} \frac{qA^2}{D}; \quad \frac{I}{w_0(k \neq 0)} = \frac{D}{qA^2} \cdot B + \frac{k}{q} \cdot C = \frac{I}{w_0(k=0)} + \frac{k}{q} \cdot C, \quad (2)$$

$$\frac{I}{w_0(k \neq 0)} - \frac{I}{w_0(k=0)} = \frac{k}{q} C \Rightarrow C = \frac{q}{k} \left( \frac{I}{w_0(k \neq 0)} - \frac{I}{w_0(k=0)} \right). \quad (3)$$

Значения параметров  $B$  и  $C$  не зависят от площади, коэффициента постели, цилиндрической жесткости и интенсивности равномерно распределенной нагрузки, их величина определяется лишь значением коэффициента формы пластинки и видом граничных условий. Величины  $w_0(k \neq 0)$  и  $w_0(k=0)$  могут быть найдены с помощью приближенных методов строительной механики.

Для определения параметров  $B$  и  $C$  были рассчитаны пластинки на упругом основании с использованием МКЭ в программном комплексе «SCAD». Расчет производился при следующих параметрах: материал пластинок – сталь ( $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ), толщина  $h = 15$  мм,  $A = 1$  м<sup>2</sup>, интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 40$  кН/м<sup>2</sup>, число конечных элементов 225. Значение максимального прогиба  $w_0(k \neq 0)$  определялось при коэффициенте постели  $k = 20$  МПа/м. По данным расчёта были построены кривые  $C - K_f$  (рис. 2) и  $B - K_f$  (рис. 3).

Анализ рис. 2 показывает, что несмотря на относительную простоту и универсальность предложенного подхода, при подборе аппроксимирующих функций  $C - K_f$  возникают трудности применения коэффициента  $C$  при использовании методики МИКФ из-за сложного вида этих функций и неоднозначности их поведения при некоторых видах граничных условий. Указанные трудности можно преодолеть, если вместо  $C$  ввести коэффициент  $\bar{C}$ :

$$\bar{C} = \frac{C}{B} = \frac{D}{kA^2} \left( \frac{w_0(k=0)}{w_0(k \neq 0)} - 1 \right). \quad (4)$$

Тогда формула (1) примет следующий вид:

$$\frac{I}{w_0} = \frac{1}{q} B \left[ \frac{D}{A^2} + k\bar{C} \right], \quad \text{где} \quad \bar{C} = 8 \int_0^1 g^2(p) dp / \Phi_g \cdot K_f^2. \quad (5)$$

Полученные решения при определении коэффициентов  $B$  и  $\bar{C}$ , сведены в таблицу, в которой приведено их сопоставление с результатами, найденными по аппроксимирующим функциям, построенным по этим численным решениям.

Используя программу TableCurve 2D, по данным численного расчёта, построены аппроксимирующие функции  $B - K_f$  (рис. 3) и  $\bar{C} - K_f$  (рис. 4). Как видно из рис. 4, замена параметра  $C$  на  $\bar{C}$  упорядочили кривые  $\bar{C} - K_f$ , которые стали соответствовать логике МИКФ.

#### **Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при вершине $\alpha \geq 60^\circ$**

При 1-й комбинации граничных условий:

$$B = (a + b \cdot K_f)^2, \quad \text{где} \quad a = -0,2138; \quad b = 0,03458; \quad (6)$$

Таблица

$\alpha$		20	40	60	80	90	100	120	140	160
$K_f$		16,07	11,20	10,39	10,96	11,66	12,67	16,09	23,42	46,10
Значения параметра $B \cdot 10^{-3}$										
«1»	МКЭ	0,640	0,368	0,326	0,355	0,390	0,439	0,610	1,08	3,30
	(6)	0,640	0,368	0,329	0,352	0,381	0,425	0,593	1,05	3,27
	$\Delta, \%$	0	0	0,92	-0,85	-2,31	-3,19	-2,79	-2,78	-0,91
«2»	МКЭ	1,22	0,611	0,520	0,536	0,580	0,642	0,893	1,59	4,95
	(8)	1,22	0,607	0,512	0,541	0,580	0,642	0,892	1,59	4,95
	$\Delta, \%$	0	-0,66	-1,54	0,93	0	0	-0,11	0	0
«3»	МКЭ	0,846	0,517	0,520	0,602	0,678	0,790	1,20	2,32	7,45
	(10)	0,846	0,517	0,520	0,597	0,676	0,792	1,21	2,32	7,45
	$\Delta, \%$	0	0	0	-0,83	-0,30	0,25	0,83	0	0
«4»	МКЭ	2,17	0,975	0,771	0,784	0,835	0,929	1,32	2,42	7,94
	(12)	2,17	0,963	0,760	0,795	0,845	0,931	1,31	2,43	7,94
	$\Delta, \%$	0	-1,23	-1,43	1,15	1,20	0,22	-0,76	0,41	0
«5»	МКЭ	1,54	0,854	0,756	0,872	0,979	1,14	1,71	3,04	9,28
	(14)	1,54	0,846	0,770	0,866	0,981	1,15	1,71	3,04	9,28
	$\Delta, \%$	0	-0,94	1,85	-0,69	0,20	0,88	0	0	0
«6»	МКЭ	2,63	1,32	1,11	1,27	1,41	1,62	2,35	4,47	15,38
	(16)	2,63	1,33	1,13	1,26	1,41	1,62	2,36	4,48	15,38
	$\Delta, \%$	0	0,76	1,80	-0,79	0	0	0,43	0,22	0
Значения параметра $\bar{C}$										
«1»	МКЭ	1,031	1,781	1,981	1,844	1,694	1,512	1,090	0,627	0,209
	(7)	1,028	1,782	1,980	1,843	1,697	1,515	1,087	0,628	0,207
	$\Delta, \%$	-0,29	0,06	-0,05	-0,05	0,18	0,20	-0,28	0,16	-0,96
«2»	МКЭ	0,548	1,064	1,255	1,215	1,131	1,021	0,741	0,428	0,141
	(9)	0,545	1,073	1,275	1,204	1,124	1,018	0,746	0,427	0,141
	$\Delta, \%$	-0,55	0,85	0,16	-0,91	-0,62	-0,29	0,68	-0,23	0
«3»	МКЭ	0,788	1,247	1,255	1,079	0,958	0,827	0,558	0,303	0,094
	(11)	0,788	1,246	1,255	1,072	0,955	0,827	0,558	0,302	0,094
	$\Delta, \%$	0	-0,08	0	-0,65	-0,31	0	0	-0,33	0
«4»	МКЭ	0,311	0,669	0,863	0,824	0,775	0,702	0,508	0,287	0,090
	(13)	0,311	0,669	0,861	0,818	0,767	0,698	0,512	0,286	0,090
	$\Delta, \%$	0	0	-0,23	-0,73	-1,03	-0,57	0,79	-0,35	0
«5»	МКЭ	0,428	0,768	0,863	0,741	0,667	0,582	0,400	0,224	0,075
	(15)	0,429	0,768	0,856	0,759	0,681	0,591	0,397	0,218	0,076
	$\Delta, \%$	0,23	0	-0,81	2,43	2,10	1,55	-0,75	-0,27	1,33
«6»	МКЭ	0,249	0,495	0,588	0,521	0,471	0,416	0,286	0,153	0,045
	(17)	0,252	0,495	0,586	0,520	0,470	0,415	0,286	0,153	0,045
	$\Delta, \%$	1,21	0	-0,34	-0,19	-0,21	-0,24	0	0	0
Примечание – В таблице для сокращения объема статьи приведены лишь часть исследуемых данных.										

$$\bar{C} = a + \frac{b}{K_f^{1,5}} + \frac{c}{K_f^2}, \quad \text{где } a = -0,00005959; b = 0,09728; c = -0,09334; \quad (7)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f^{0,5} + c \cdot K_f + d \cdot K_f^2 + e \cdot K_f^3, \quad (8)$$

где  $a = 1,6699$ ;  $b = -1,0722$ ;  $c = 0,2285$ ;  $d = -0,0009256$ ;  $e = 2,036 \cdot 10^{-5}$ ;

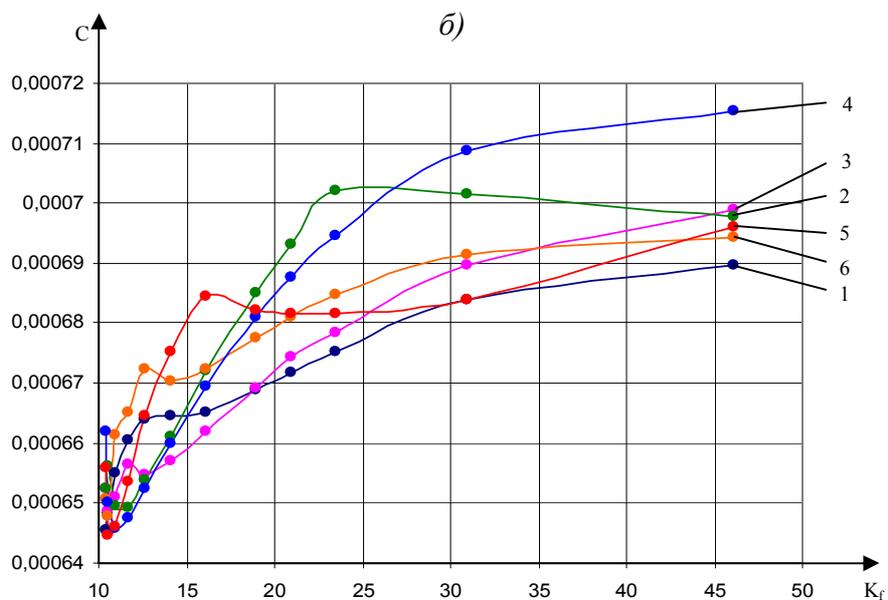
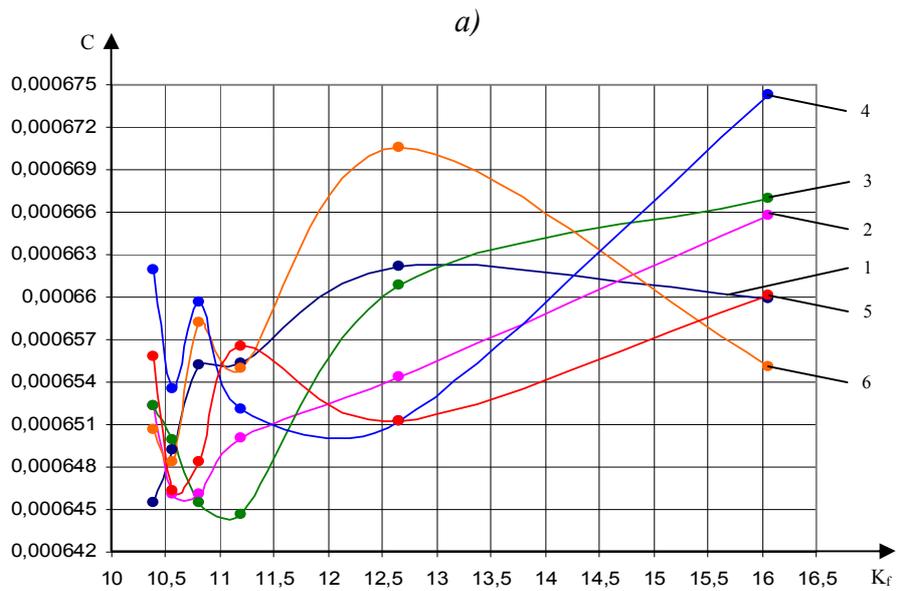


Рис. 2. Кривые  $C - K_f$  для пластинок в виде равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий (1...6 – номера схем граничных условий по рис. 1): а) пластинки с углом при вершине  $\alpha \leq 60^\circ$ , б) то же при  $\alpha \geq 60^\circ$

$$\bar{C} = \frac{1}{a + b \cdot K_f^2 + c \cdot K_f^{2,5}}, \text{ где } a = 352,0919; b = 4,748; c = -0,2319; \quad (9)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2 + d \cdot K_f^3 + e \cdot K_f^4 + f \cdot K_f^5, \quad (10)$$

где  $a = -1,6227$ ;  $b = 0,4039$ ;  $c = -0,03214$ ;  $d = 0,001604$ ;  $e = -0,0000349$ ;  
 $f = 0,2845 \cdot 10^{-6}$ ;

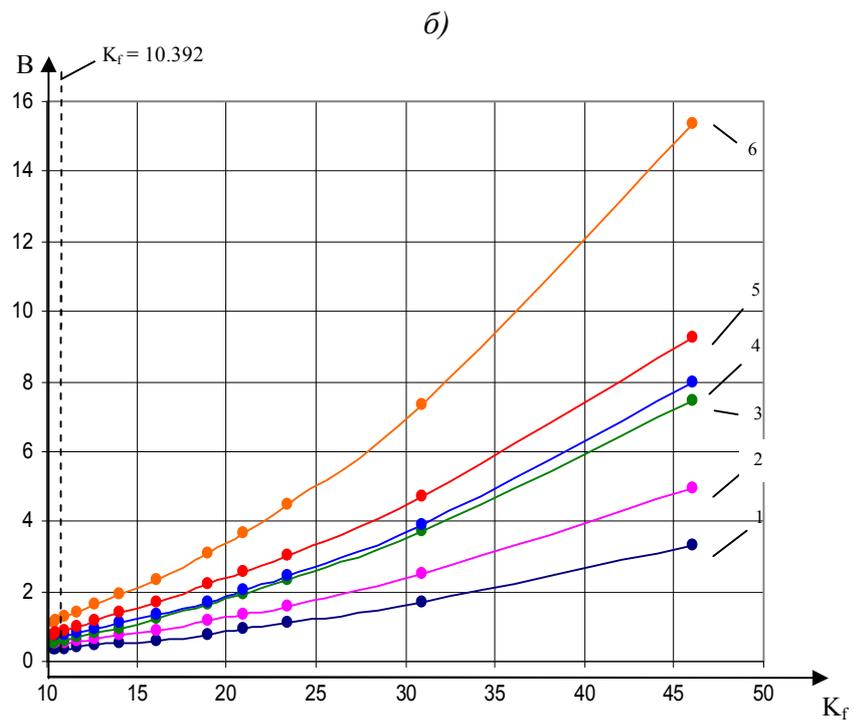
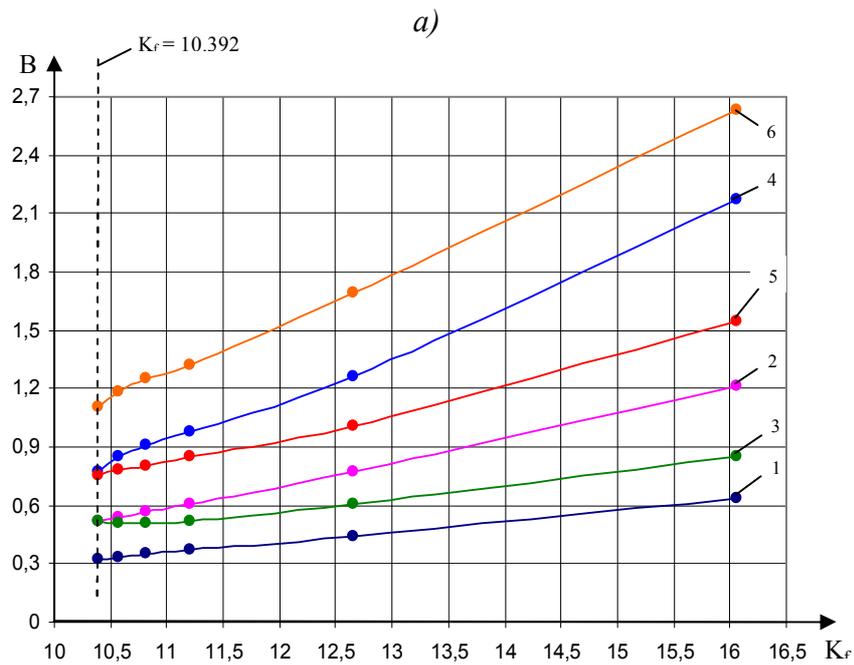


Рис. 3. Кривые  $B - K_f$  для пластинок в виде равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий (1...6 – номера схем граничных условий по рис. 1):  
 а) пластинки с углом при вершине  $\alpha \leq 60^\circ$ , б) то же при  $\alpha \geq 60^\circ$

$$\bar{C} = \frac{a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2}{1 + d \cdot K_f + e \cdot K_f^2 + f \cdot K_f^3}, \quad (11)$$

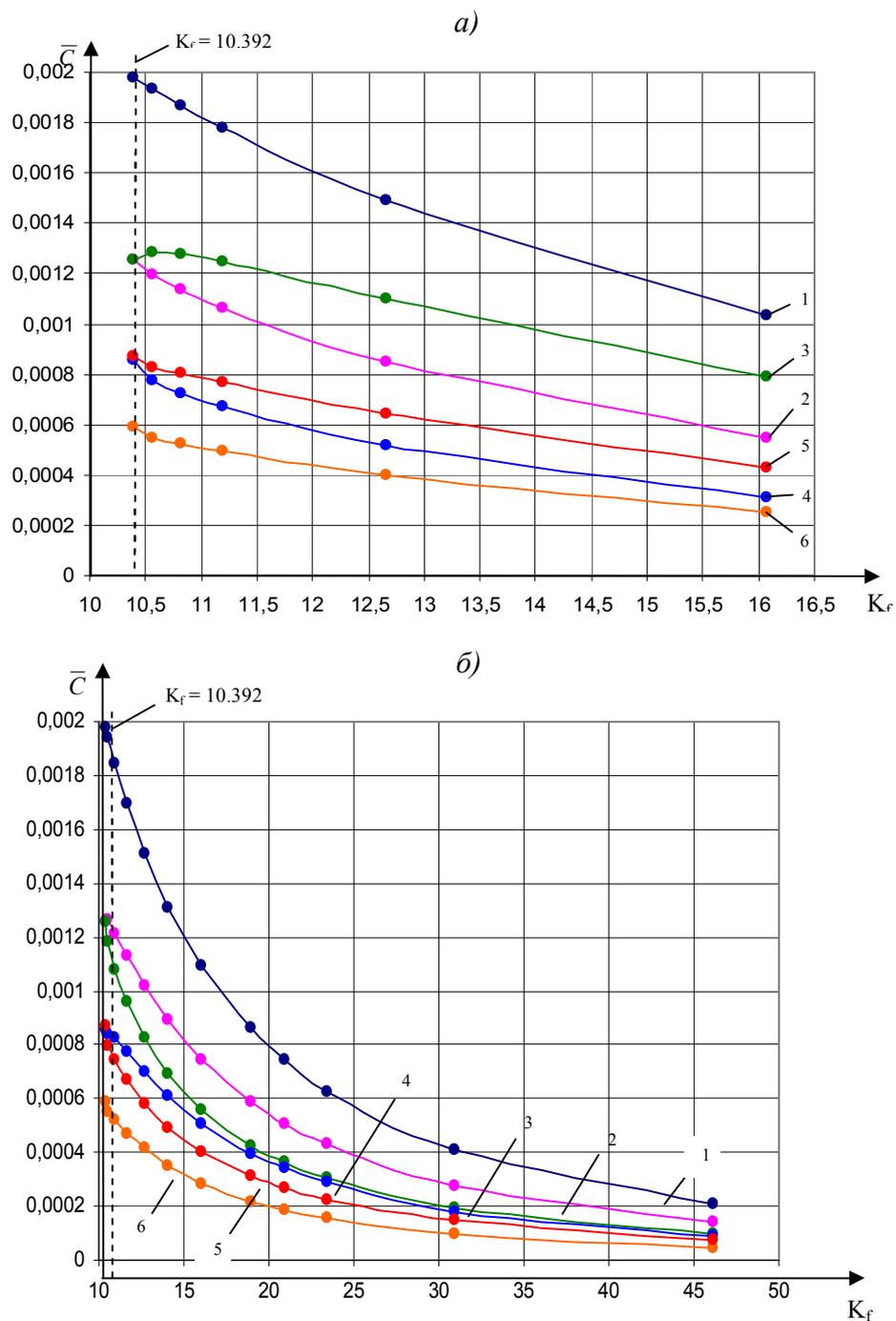


Рис. 4. Кривые  $\bar{C} - K_f$  для пластинок в виде равнобедренных треугольников на упругом основании с комбинациями граничных условий по рисунку 1: а) пластинки с углом при вершине  $\alpha \leq 60^\circ$ , б) тоже при  $\alpha \geq 60^\circ$

где  $a = -0,003647$ ;  $b = 0,0003714$ ;  $c = -0,1241 \cdot 10^{-5}$ ;  $d = -0,3929$ ;  $e = 0,01942$ ;  $f = 0,0009338$ ;

при 4-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^{1,5} + d \cdot K_f^{2,5} + e/K_f, \quad (12)$$

где  $a = -2,1112$ ;  $b = 0,2022$ ;  $c = -0,01405$ ;  $d = 0,0003382$ ;  $e = 11,674$ ;

$$\bar{C} = \frac{a + b \cdot K_f}{1 + c \cdot K_f + d \cdot K_f^2}, \quad (13)$$

где  $a = 0,001207$ ;  $b = 0,1157 \cdot 10^{-4}$ ;  $c = -0,04797$ ;  $d = 0,009631$ ;

при 5-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2 + d \cdot K_f^3 + e \cdot K_f^4 + f \cdot K_f^5, \quad (14)$$

где  $a = -1,587$ ;  $b = 0,334$ ;  $c = -0,01602$ ;  $d = 0,0006613$ ;  $e = -0,1157 \cdot 10^{-4}$ ;  $f = 0,8162 \cdot 10^{-7}$ ;

$$\bar{C} = \frac{1}{a + b \cdot K_f^{1,5}}, \quad \text{где } a = -225,79; b = 42,529; \quad (15)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f^{0,5} + c \cdot K_f + d \cdot K_f^{1,5} + e \cdot K_f^2 + f \cdot K_f^{2,5}, \quad (16)$$

где  $a = -76,2907$ ;  $b = 82,8033$ ;  $c = -35,3718$ ;  $d = 7,4666$ ;  $e = -0,7699$ ;  $f = 0,03182$ ;

$$\bar{C} = \frac{a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2 + d \cdot K_f^3}{1 + e \cdot K_f + f \cdot K_f^2 + g \cdot K_f^3}, \quad (17)$$

где  $a = 0,001042$ ;  $b = -0,758 \cdot 10^{-4}$ ;  $c = -0,3242 \cdot 10^{-5}$ ;  $d = 0,2811 \cdot 10^{-7}$ ;  $e = -0,1649$ ;  $f = 0,02632$ ;  $g = 0,001994$ ;

#### **Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при вершине $\alpha \leq 60^\circ$**

При 1-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f^{1,5}, \quad \text{где } a = -0,01151; b = 0,01012; \quad (18)$$

$$\bar{C} = a + \frac{b}{K_f}, \quad \text{где } a = -0,0007089; b = 0,0279; \quad (19)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B = \frac{1}{a + b \cdot K_f^{-2}}, \quad \text{где } a = 0,04123; b = 201,695; \quad (20)$$

$$\bar{C} = a + \frac{b}{K_f}, \quad \text{где } a = 0,4621 \cdot 10^{-4}; b = 0,1288; \quad (21)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$B = \frac{a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2}{1 + d \cdot K_f + e \cdot K_f^2}, \quad (22)$$

где  $a = -0,3028$ ;  $b = 0,09734$ ;  $c = -0,00681$ ;  $d = -0,1055$ ;  $e = 0,0004201$ ;

$$\bar{C} = \frac{a + b \cdot K_f + c \cdot K_f^2}{1 + d \cdot K_f + e \cdot K_f^2}, \quad (23)$$

где  $a = 0,004796$ ;  $b = -0,0006176$ ;  $c = 0,1422 \cdot 10^{-4}$ ;  $d = 0,03339$ ;  $e = -0,01311$ ;

при 4-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f^2, \quad \text{где } a = -0,1741; b = 0,009063; \quad (24)$$

$$\bar{C} = \frac{a + b \cdot K_f^2 + c \cdot K_f^4}{1 + d \cdot K_f^2 + e \cdot K_f^4}, \quad (25)$$

где  $a = -0,01690$ ;  $b = 0,0001607$ ;  $c = -0,2171 \cdot 10^{-7}$ ;  $d = -0,2166$ ;  $e = 0,00194$ ;  
при 5-й комбинации граничных условий:

$$B = \frac{l}{a + b \cdot K_f^{-0,5}}, \text{ где } a = -2,0573; b = 10,8419; \quad (26)$$

$$\bar{C} = a + \frac{b}{K_f}, \text{ где } a = -0,0003511; b = 0,01254; \quad (27)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$B = a + b \cdot K_f^{1,5}, \text{ где } a = -0,4925; b = 0,04853; \quad (28)$$

$$\bar{C} = \frac{l}{a + b \cdot K_f^{1,5}}, \text{ где } a = -680,474; b = 72,072. \quad (29)$$

Как видно из таблицы, погрешность результатов расчёта, полученных с помощью функций (6)...(29), не превышает 3 %.

Несколько сложный вид аппроксимирующих функций (6)...(29) и значения коэффициентов  $a$  и  $b$  до четырех значащих цифр после запятой объясняются тем, что нами ведётся работа по составлению программного комплекса для решения рассматриваемых задач с помощью МИКФ.

Таким образом, зная коэффициент формы заданной треугольной пластинки, можно, используя аппроксимирующие функции  $B - K_f$  и  $\bar{C} - K_f$ , соответствующие заданным граничным условиям, найти значения параметров  $B$  и  $\bar{C}$ , и, воспользовавшись формулой (5), определить её максимальной прогиб.

Построенные кривые (6)...(29) образуют верхнюю границу максимального прогиба для всего множества четырехугольных пластинок с выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями. Нижнюю границу для таких пластинок образуют решения, соответствующие прямоугольным пластинкам. Задача по построению этой границы нами решена в статье [3]. Используя эти обе границы, можно определять прогиб любой четырехугольной пластинки, применяя методику МИКФ [1].

#### Выводы:

1. Для пластинок в виде равнобедренных треугольников, лежащих на упругом основании, с различными комбинациями граничных условий жесткого защемления и шарнирного опирания по сторонам и нагруженных равномерно распределённой нагрузкой, построены аппроксимирующие функции  $B - K_f$  и  $\bar{C} - K_f$ , входящие в выражение (1), для определения максимального прогиба треугольных пластинок.

2. Все множество значений параметров  $B$  и  $\bar{C}$  для всех комбинаций граничных условий, представленное в координатах  $B - K_f$  и  $\bar{C} - K_f$  при любых значениях коэффициента постели ограничено с двух сторон соответствующими значениями этих параметров для пластинок с однородными граничными условиями (либо шарнирное опирание по контуру, либо жесткое защемление).

3. Полученные аппроксимирующие функции могут использоваться для непосредственного расчета треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом основании, а также в качестве граничных кривых при расчете четырёхугольных пластинок с помощью МИКФ.

#### Л и т е р а т у р а

1. Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.

2. *Коробко, В.И.* Расчет пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов. // *Фундаментальные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2010 году.* – Москва-Орел, 2011. – С. 261-267.

3. *Коробко, В.И.* Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст]/ В.И. Коробко, А.А. Актуганов// *Строительство и реконструкция*, №4, 2011. – Орел, 2011. – С. 15-20.

**DETERMINATION OF MAXIMAL BENDING OF THREE-CORNERED PLATES ON RESILIENT FOUNDATION WITH THE COMBINED SCOPE TERMS**

V.I. Korobko, A.A. Aktuganov

Task of cross-bending of three-cornered plates with the combined scope terms (all possible combinations of the joint leaning and gesture-who jammings on sides) on resilient foundation, loaded with the equipartition on all area loading decides the method of interpolation on the coefficient of form (MIKF). For every combination of scope terms approximating functions are built for the count of two auxiliary coefficients, necessary for the choice of supporting decisions at the use of method of MIKF.

**KEYWORDS:** three-cornered plates, combined scope terms, maximal bending, resilient foundation, coefficient of bed, coefficient of form, method of interpolation on the coefficient of form.

