

Теория упругости

ОСАДКА ДНЕВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПО ГЛУБИНЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ

ГАДЖИЕВ Мухлис Ахмед оглы, профессор, доктор технических наук*,
Валид Мохамед ДРАЗ, аспирант**

*Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства,
ул. Айны Султановой, 5, Баку, Азербайджан, AZ1073, hajiyevmuxlis@rambler.ru,

**Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства,
ул. Айны Султановой, 5, Баку, Азербайджан, AZ1073, waleed@box.az,

С применением кусочно-линейной аппроксимации действующей нагрузки разработана методика определения осадки дневной поверхности полупространства с линейно увеличивающейся по глубине модулем деформации. На численных примерах показано, что неоднородность полупространства по глубине уменьшает распределительную способность основания.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: функция влияния, неоднородное полупространство, задача Буссунеска, осадка, распределенная нагрузка.

В работах [1,2] был предложен вариант неоднородного по глубине полупространства, когда модуль деформации увеличивается по глубине линейному и квадратичному законам в виде

$$E_z = E_0(1 + \alpha z) \quad (1) \quad \text{и} \quad E_z = E_0(1 + \gamma z^2). \quad (2)$$

Согласно упомянутым исследованиям при увеличении модуля деформации по глубине по линейному закону (1) для задачи Буссунеска, т.е. для определения осадки дневной поверхности полупространства на расстоянии r от точки приложения сосредоточенной силы P , получено выражение $w_r = w_* I_*(r) P$.

$$\text{Здесь } w_* = \frac{3(1 - \nu_0^2)}{2\pi E_0} \text{ и } I_*(r) = \frac{2}{3r} + \frac{3\alpha}{4} \left(\frac{9\alpha^2 r^2}{16} - 1 \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{4}{3\alpha r} \right) + \frac{3\alpha}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha r}{4} \right), \quad (3)$$

а в случае квадратичного увеличения модуля деформаций основания по (2)

$$I_*(r) = \frac{2}{3r} + \frac{3}{5} \cdot \gamma \cdot r - \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{3}{5} \cdot \gamma \cdot r^2 \right) + \\ + \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{3}{5} \cdot \gamma \cdot r^2 \right) \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \gamma \cdot r \right). \quad (4)$$

Там же показано, что неоднородное полупространство обладает меньшей распределительной способностью, чем однородное и, варьируя параметрами неоднородности, можно регулировать распределительную способность, что важно с точки зрения практического приложения данной модели. При расчете инженерных конструкций на упругом полупространстве широко применяется практическая методика расчета, предложенная Б.Н.Жемочкиным [3], когда контактное давление между конструкцией и основанием аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Как показано в [4] при равном числе расчетных участков кусочно-линейная аппроксимация дает большую точность и при переходе от одного участка к другому реактивное давление основания не терпит разрыва. Поэтому здесь рассматривается определение осадки дневной поверх-

ности полупространства от треугольной, распределенной по прямоугольной площади, нагрузки (Рис.1.), при увеличении модуля деформаций основания по глубине по линейному закону.

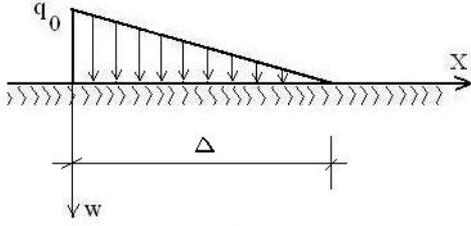


Рис. 1

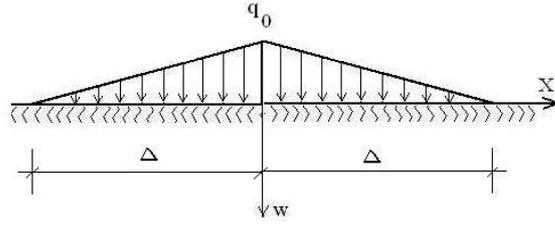


Рис. 2

Согласно рис. 1 и зависимости (3) для искомой осадки имеем

$$w_x = w_* \cdot q_0 \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \left(1 - \frac{x_1}{a}\right) \cdot \left[\frac{2}{3 \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{3\alpha}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{4} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{9\alpha^2}{16} \cdot ((x-x_1)^2 + y^2) \cdot \ln \left(1 + \frac{4}{3\alpha \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{3\alpha}{4} \cdot \ln \left(4 + 3\alpha \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \right) + \frac{3\alpha}{4} \cdot \ln \left(3\alpha \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2} \right) \right] dx_1 dy. \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое соответствует однородному полупространству.

Вычислим интеграл от первого слагаемого: $w_x = w_* \cdot q_0 \cdot \Psi_0(x)$,

где
$$\Psi_0(x) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \frac{2(1 - x_1/a)}{3 \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} dx_1 dy.$$

Интегрируя внутренний интеграл, получим

$$\Psi_{01}(x, y) = \int_0^a \frac{2 \left(1 - \frac{x_1}{a}\right) dx_1}{3 \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} = \frac{2}{3} \cdot \int_0^a \frac{dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} - \frac{2}{3a} \cdot \int_0^a \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} = \\ = \frac{2}{3} \cdot \ln \left(x_1 - x + \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2} \right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} - \frac{2x}{3a} \cdot \ln \left(x_1 - x + \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2} \right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} - \\ - \frac{2}{3a} \cdot \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2} \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = \frac{2}{3} \cdot \ln \left(a - x + \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \right) - \frac{2}{3} \cdot \ln \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) - \\ - \frac{2x}{3a} \cdot \ln \left(a - x + \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \right) + \frac{2x}{3a} \cdot \ln \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) - \frac{2}{3a} \cdot \sqrt{(a-x)^2 + y^2} + \\ + \frac{2}{3a} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Теперь интегрируем полученное выражение по y , для чего рассмотрим более общие интегралы вида

$$J_{01}(m) = \frac{2}{3} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \ln \left(m + \sqrt{y^2 + m^2} \right) dy \quad \text{и} \quad J_{02}(m) = \frac{2}{3a} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{y^2 + m^2} dy.$$

Эти интегралы легко вычисляются с применением интегрирования по частям. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, запишем окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 J_{01}(m) &= \frac{2}{3} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \ln\left(m + \sqrt{y^2 + m^2}\right) dy = \\
 &= \frac{2b}{3} \cdot \ln\left(m + \sqrt{\frac{b^2}{4} + m^2}\right) - \frac{2b}{3} + \frac{2m}{3} \cdot \ln\left(\frac{b + \sqrt{4m^2 + b^2}}{-b + \sqrt{4m^2 + b^2}}\right), \\
 J_{02}(m) &= \frac{2}{3a} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{y^2 + m^2} dy = \frac{b}{3a} \cdot \sqrt{\frac{b^2}{4} + m^2} + \frac{m^2}{3a} \cdot \ln\left(\frac{b + \sqrt{4m^2 + b^2}}{-b + \sqrt{4m^2 + b^2}}\right)
 \end{aligned}$$

Тогда для осадки однородного основания можно записать

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(x) &= J_{01}(a-x) - J_{01}(-x) - \frac{x}{a} \cdot J_{01}(a-x) + \frac{x}{a} \cdot J_{01}(-x) - J_{02}(a-x) + J_{02}(-x) = \\
 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot (J_{01}(a-x) - J_{01}(-x)) - J_{02}(a-x) + J_{02}(-x)
 \end{aligned}$$

Учитывая вышеприведенные зависимости, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(x) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left[\frac{2b}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + 2(a-x)}{\sqrt{4x^2 + b^2} - 2x}\right) + \right. \\
 &+ \frac{2(a-x)}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} - b}\right) + \\
 &+ \left. \frac{2x}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x^2 + b^2} - b}\right) \right] - \frac{b}{6a} \cdot \sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + \frac{b}{6a} \cdot \sqrt{4x^2 + b^2} - \\
 &- \frac{(a-x)^2}{3a} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} - b}\right) + \frac{x^2}{3a} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x^2 + b^2} - b}\right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Напомним, что для вычисления осадки однородного основания от нагрузки, показанной на Рис.2, достаточно положить $\Psi_1(x) = \Psi_0(x) + \Psi_0(-x)$. После соответствующих упрощений для рассматриваемого случая найдем

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(x) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cdot \left[\frac{2b}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + 2(a-x)}{\sqrt{4x^2 + b^2} - 2x}\right) + \right. \\
 &+ \frac{2(a-x)}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} - b}\right) + \frac{2x}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4x^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x^2 + b^2} - b}\right) \left. \right] + \\
 &+ \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot \left[\frac{2b}{3} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{4(a+x)^2 + b^2} + 2(a+x)}{\sqrt{4x^2 + b^2} + 2x}\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(a+x)}{3} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{4(a+x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a+x)^2 + b^2} - b} \right) - \frac{2x}{3} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{4x^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x^2 + b^2} - b} \right) \Bigg] - \\
& - \frac{b}{6a} \cdot \sqrt{4(a-x)^2 + b^2} - \frac{b}{6a} \cdot \sqrt{4(a+x)^2 + b^2} + \frac{b}{3a} \cdot \sqrt{4x^2 + b^2} - \\
& - \frac{(a-x)^2}{3a} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a-x)^2 + b^2} - b} \right) - \frac{(a+x)^2}{3a} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{4(a+x)^2 + b^2} + b}{\sqrt{4(a+x)^2 + b^2} - b} \right) + \\
& + \frac{2x^2}{3a} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{4x^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x^2 + b^2} - b} \right). \tag{7}
\end{aligned}$$

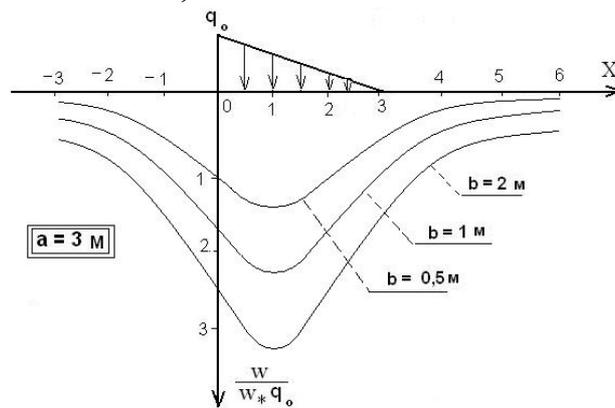


Рис. 3

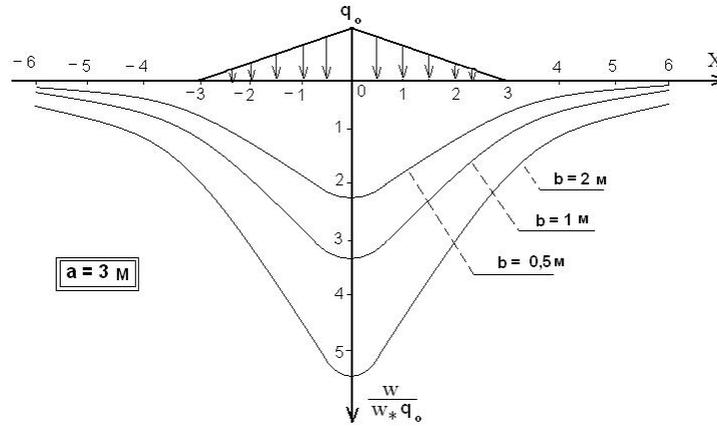


Рис. 4

На алгоритмическом языке *Turbo Paskal* составлена процедура для вычисления ординат функций (6) и (7) и с применением этой процедуры вычислены ординаты этих функций влияния и построены соответствующие графики (Рис.3 и Рис.4). Как видно из построенных графиков, ширина площадки загрузки сильно влияет на величину осадки основания. Составленная процедура позволяет применить модифицированную методику Б.Н.Жемочкина [4] для расчета балок и рам на упругом однородном основании.

Теперь перейдем к интегрированию слагаемых в (5), отражающих влияние неоднородности основания по глубине. Если учесть, что

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln(1+1/x) = 0$, то из четырех слагаемых в (5), отражающих влияние неоднородности основания, к первым трём может быть применено численное интегрирование. Особенность может появиться только в последнем слагаемом. Поэтому это слагаемое интегрируем по y , тогда можем написать

$$\begin{aligned}
 J_* &= \frac{3\alpha}{4} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \ln\left(3\alpha\sqrt{(x_1-x)^2+y^2}\right) dy = \left| \begin{array}{l} U = \ln\left(3\alpha\sqrt{(x_1-x)^2+y^2}\right); \\ dU = \frac{y dy}{(x_1-x)^2+y^2}; V = y \end{array} \right| = \\
 &= \frac{3\alpha}{4} \cdot y \cdot \ln\left(3\alpha\sqrt{(x_1-x)^2+y^2}\right) \Big|_{y=-b/2}^{y=b/2} - \frac{3\alpha}{4} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y^2 dy}{(x_1-x)^2+y^2} = \quad (8) \\
 &= \frac{3\alpha}{4} \cdot b \cdot \ln\left(\frac{3\alpha}{2} \cdot \sqrt{4(x_1-x)^2+b^2}\right) - \frac{3\alpha \cdot b}{4} + \frac{3\alpha \cdot (x_1-x)}{2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{2 \cdot (x_1-x)}\right).
 \end{aligned}$$

Теперь с учетом $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{arctg}(const/x) = 0$ к выражению (8) может быть применены методы численного интегрирования. Чтобы не загромождать выражение осадки, с учетом неоднородности эти интегралы вычислим численно с применением квадратурной формулы Гаусса с восемью узлами [5, 6]. Согласно этому методу определенный интеграл $J = \int_a^b f(x) dx$ приближенно вычисляется

$$J \approx \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=8} C_k \cdot f(z_k), \text{ где } z_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x_k,$$

а узлы интегрирования

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -0,960290 = -x_8; \quad x_2 = -0,796666 = -x_7; \\
 x_3 &= -0,525532 = -x_6; \quad x_4 = -0,183434 = x_5;
 \end{aligned}$$

квадратурные коэффициенты:

$$C_1 = C_8 = 0,101228; \quad C_2 = C_7 = 0,222381; \quad C_3 = C_6 = 0,313707; \quad C_4 = C_5 = 0,362684.$$

Итак, для функции учитывающей влияние неоднородности, окончательно можем написать

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x) &= -\frac{3\alpha \cdot a \cdot b}{4} + \frac{a}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=8} \left\{ \frac{3\alpha \cdot b}{4} \cdot \ln\left(\frac{3\alpha}{2} \cdot \sqrt{4\left(\frac{a}{2} \cdot (1+x_i) - x\right)^2 + b^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3\alpha}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot (1+x_i) - x\right) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a \cdot (1+x_i) - x}\right) \right\} + \quad (9) \\
 &\quad + \frac{b}{2} \cdot \sum_{k=1}^{k=8} \left[\frac{3\alpha}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot (1+x_i) - x\right)^2 + \frac{b^2}{4} \cdot x_k^2}\right) \right] + \\
 &\quad + \frac{27\alpha^3}{64} \left(\left(\frac{a}{2} \cdot (1+x_i) - x\right)^2 + \frac{b^2}{4} \cdot x_k^2 \right) \cdot \ln\left(1 + \frac{4}{3\alpha \sqrt{(a(1+x_i)/2 - x)^2 + b^2 x_k^2 / 4}}\right) -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{3\alpha}{4} \cdot \ln \left[4 + 3\alpha \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot (1 + x_i) - x \right)^2 + \frac{b^2}{4} \cdot x_k^2} \right] \Bigg\}$$

Тогда осадка от нагрузки, показанной на рис.1, вычисляется по формуле $w_x = w_* q_0 [\Psi_0(x) + \Psi_1(x)]$, а от нагрузки, показанной на рис.2, по формуле $w_x = w_* q_0 [\Psi_0(x) + \Psi_1(x) + \Psi_0(-x) + \Psi_1(-x)]$. На алгоритмическом языке *Turbo Pascal* составлена процедура, реализующая вычисления по вышеприведенным формулам и рассмотрены численные примеры, результаты которых приведены на рис. 5 и рис. 6.

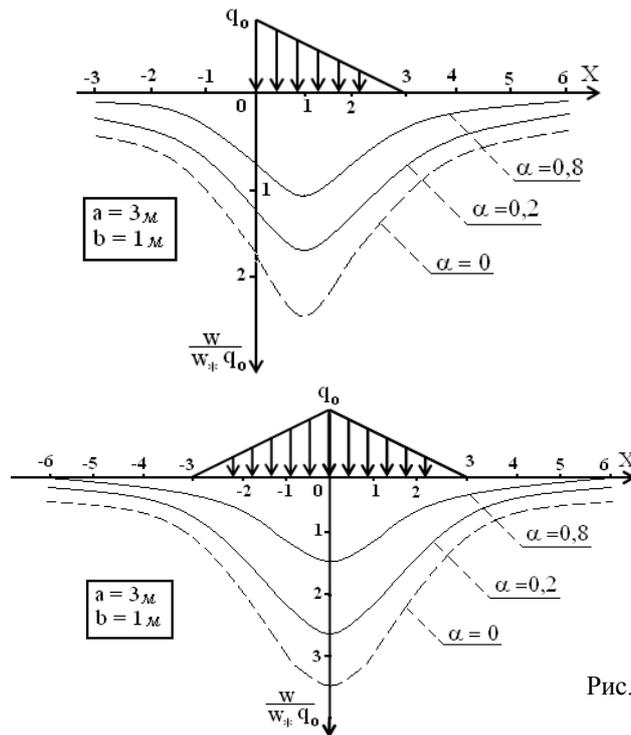


Рис. 5

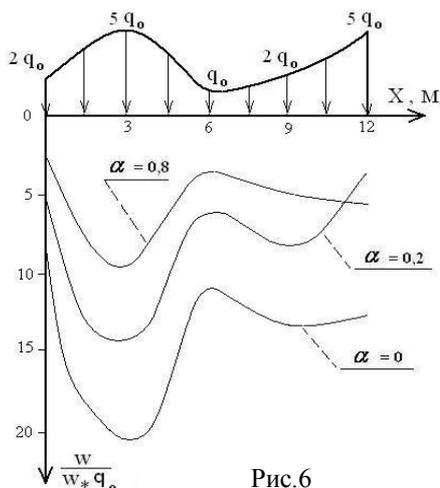


Рис.6

Л и т е р а т у р а

1. Гаджиев, М.А. Осадка дневной поверхности упругого неоднородного по глубине полупространства от сосредоточенной силы [Текст] / М.А.Гаджиев, М.Т. Ахундова//Ученые записки Азербайджанского инженерно - строительного университета. – 1996. – № 1. – С. 205–207.
2. Гаджиев, М.А., Ахундова М.Т., Задача Буссуенска для неоднородного по глубине полупространства [Текст] / М.А. Гаджиев, М.Т. Ахундова // Ученые записки Азербайджанского инженерно-строительного университета. – 1996. – № 1. – С. 207–212.
3. Гаджиев, М.А. Модификация метода Б.Н. Жемочкина для расчета фундаментных балок на упругом полупространстве [Текст] /

М.А. Гаджиев // Ученые записки Азербайджанского инженерно-строительного университета. – 1996. – № 1. – С. 202–204.

4. *Жемочкин, Б.Н.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании [Текст]/ Б.Н. Жемочкин, С.П.Синицын. – М., Госстройиздат. – 1962. – 237с.

5. *Данилина, Н.И.* Численные методы [Текст]/Н.И.Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов, Г.И. Феклисов. – М., Высшая школа. – 1976. – 468 с.

6. *Демидович, Б.П.* Основы вычислительной математики [Текст]/ Б.П.Демидович, И.А. Марон. – М., Наука. – 1970. – 664 с.

**THE SETTLEMENT OF THE DAY SURFACE HETEROGENEOUS IN DEPTH
HALF-SPACE AS THE RESULT OF UNSPECIFIED DISTRIBUTED LOAD**

Hajiyev Muxlis Akhmed ogly, Valid Mohamed Draz

The technique for the calculation of day surface settlement of half-space with linear increase of deformation module in correlation with depth with the use of piecewise linear approximation of the actual load is presented in this article. The numeric examples show that half space inhomogeneity decreases distributing capacity of the foundation in depth.

KEY WORDS: influence functions, heterogeneous half-space, settlement, distributed load.

