Численные методы расчета конструкций

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ПРИ ОТРАЖЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНОГО ИМПУЛЬСА ОТ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКИ

В.К. МУСАЕВ, *доктор технических наук, профессор,*
Е.В. ДИКОВА, А.И. КОРМИЛИЦИН, С.Н. САМОЙЛОВ, В.В. СТАРОДУБЦЕВ
Московский государственный машиностроительный университет,
107023, *г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38, musayev-vk@yandex.ru*

Приводится информация о достоверности и точности результатов численного моделирования волн напряжений в сплошной деформируемой среде. Рассматривается задача об отражении упругих волн напряжений от свободной поверхности пластинки. Поставленная задача реализуется с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Сопоставление производится с результатами аналитического решения на фронте плоской продольной волны. Исследуемая задача представлена в виде бесконечной пластинки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: дифференциальные уравнения в частных производных, задача с начальными условиями, задача Коши, математическое и численное моделирование, принцип возможных перемещений, однородный алгоритм, метод конечных элементов, нестационарные волны напряжений, явная двухслойная схема, аналитическое решение, сопоставление, достоверность, фронт волны, дельта функция, импульсное воздействие в виде треугольника, бесконечная пластинка.

При решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. На основании изложенного можно утверждать, что оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы является актуальной научной задачей.

Некоторая информация о постановке нестационарной динамической задачи теории упругости приведена в работах [1-4]. В работах [2-4, 5] приведена информация о разработанной методике, алгоритме и комплексе программ. Информация об оценке физической достоверности и математической точности разработанной методики, алгоритма и комплекса программ приведена в работах [2–10].

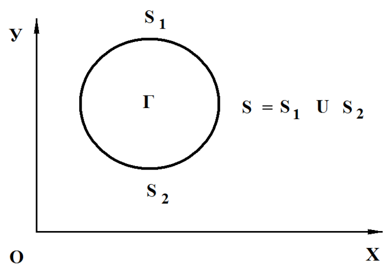

Рис. 1. Некоторое тело Г в прямоугольной декартовой системе координат *XOY*

Для решения задачи о моделировании нестационарных волн напряжений в упругих деформируемых средах рассмотрим некоторое тело Г (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат *XOY*, которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие.

Предположим, что тело Г изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях. Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ, записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\overline{H}\ddot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R}\,,\;\; \dot{\vec{\Phi}}\Big|_{t=0} = \dot{\vec{\Phi}}_0\,,\;\; \vec{\Phi}\Big|_{t=0} = \vec{\Phi}_0\;, \tag{1}$$

где $\overline{H}$ – матрица инерции; $\overline{K}$ – матрица жесткости; $\vec{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\vec{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; $\vec{R}$ – вектор узловых упругих внешних сил.

Соотношение (1) система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями для решения волновых задач в деформируемых областях сложной формы.

Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1).

Для интегрирования уравнения с начальными условиями (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду

$$\overline{H}\frac{d}{dt}\dot{\vec{\Phi}} + \overline{K}\vec{\Phi} = \vec{R}\,,\;\; \frac{d}{dt}\vec{\Phi} = \dot{\vec{\Phi}}\,. \tag{2}$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\vec{\Phi}}_{i+1} = \dot{\vec{\Phi}}_i + \Delta t\overline{H}^{-1}(-\overline{K}\vec{\Phi}_i + \vec{R}_i)\,,\;\; \vec{\Phi}_{i+1} = \vec{\Phi}_i + \Delta t\dot{\vec{\Phi}}_{i+1}\,, \tag{3}$$

где Δt – шаг по временной координате.

Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Система уравнений (3) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1).

Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k\frac{min\,\Delta l_i}{C_p}\;\; (i = 1,\; 2,\; 3,\; \ldots)\,, \tag{4}$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0{,}5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения. При разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык Фортран-90. Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками. По временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками.

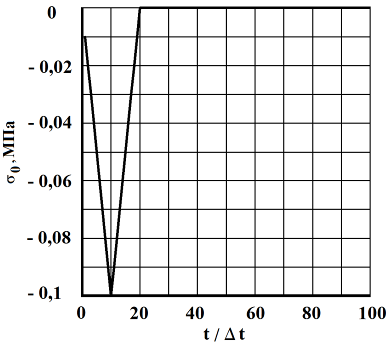

Рис. 2. Воздействие типа дельта функции

Рассмотрим задачу об отражении упругих волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности.

На границе пластинки AB (рис. 3) приложено нормальное напряжение σ_y (рис. 2), которое при $0 \quad n \quad 10$ $(n = t / \Delta t)$ изменяется линейно от 0 до P, а при $n \quad 10$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = \quad -$ 0,1 МПа (–1 кгс/см^2)). Граничные условия для контуров BC и AD при $t > 0 \quad u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Контур CD свободен от нагрузок. Отраженные волны от контуров BC и AD не доходят до исследуемых точек при $0 \quad n \quad 100$. Исследуемая расчетная область имеет 4221 узловую точку и 4000 конечных элементов. Решается система уравнений из 16884 неизвестных.

Для примера на рис. 4 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$) во времени n в точке $B1$. Сравнение с результатами других методов показало хорошее совпадение, что позволяет сделать вывод о физической и математической достоверности результатов численного решения динамических задач, полученных методом конечных элементов в перемещениях.

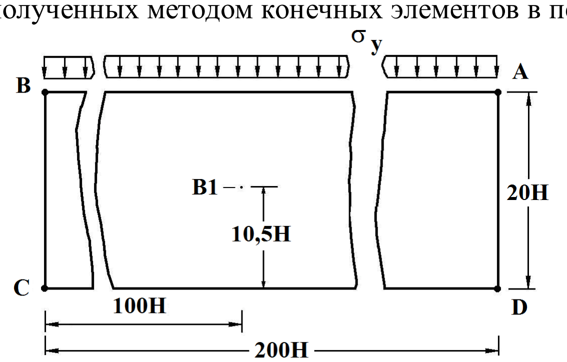

Рис. 3. Постановка задачи об отражении волн напряжений

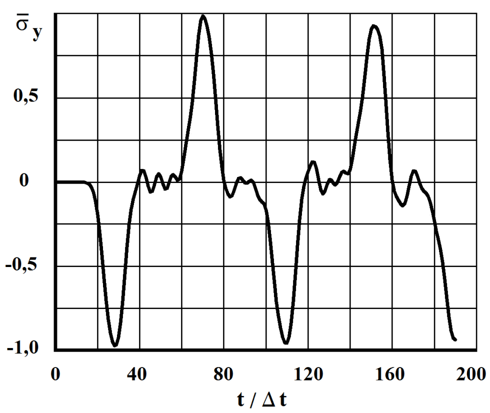

Рис. 4. Изменение упругого нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени n в точке $B1$

Методика, алгоритм, комплекс программ и результаты решенных задач рекомендуются для использования в научно-технических организациях, специализирующихся в области динамического расчета сооружений с окружающей средой при ударных, взрывных и сейсмических воздействиях.

Л и т е р а т у р а

1. *Тимошенко С.П., Гудьер Д.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

2. *Мусаев В.К.* Численное моделирование плоских продольных взрывных волн в упругой полуплоскости // Вестник Российского университета дружбы народов.

Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 1. – С. 29–37.

3. *Мусаев В.К.* Об оценке достоверности и точности численного решения нестационарных динамических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2007. – № 3. – С. 48–60.

4. *Мусаев В.К.* Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.

5. *Musayev V.K.* On the mathematical modeling of nonstationary elastic waves stresses in corroborated by the round hole // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 147–156.

6. *Мусаев В.К.* Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта функции от свободной поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 1. – С. 43–51.

7. *Мусаев В.К.* Численное решение задачи об отражении плоских продольных волн напряжений в виде функции Хевисайда от жесткой поверхности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия проблемы комплексной безопасности. – 2008. – № 3. – С. 42–50.

8. *Мусаев В.К.* О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

9. *Musayev V.K.* Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2015. – Volume 11, Issue 1. – P. 135–146.

10. *Мусаев В.К.* О достоверности компьютерного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых телах сложной формы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 11. – С. 10–14.

References

1. *Timoshenko, S.P., Gud'er, D.* (1975). *Teoriya Uprugosti,* Moscow: Nauka, 576 p.

2. *Musaev, V.K.* (2007). Chislennoe modelirovanie ploskix prodol'nyx vzryvnyx voln v uprugoj poluploskosti, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti*, № 1, pp. 29–37.

3. *Musaev, V.K.* (2007). Ob ocenke dostovernosti i tochnosti chislennogo resheniya nestacionarnyx dinamicheskix zadach, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya problemy kompleksnoj bezopasnosti,* № 3, pp. 48–60.

4. *Musaev, V.K.* (2009). Ocenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo e'ksperimenta pri reshenii zadach nestacionarnoj volnovoj teorii uprugosti, *Nauchnyj Zhurnal Problem Kompleksnoj Bezopasnosti*, № 1, pp. 55–80.

5. *Musayev V.K.* (2015). On the mathematical modeling of nonstationary elastic waves stresses in corroborated by the round hole, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 11, Iss. 1, pp. 147–156.

6. *Musaev, V.K.* (2008). Metod konechnyx e'lementov v zadache ob otrazhenii ploskix prodol'nyx voln napryazhenij v vide del'ta funkcii ot svobodnoj poverxnosti, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Problemy Kompleksnoj Bezopasnosti*, № 1, pp. 43–51.

7. *Musaev, V.K.* (2008). Chislennoe modelirovanie zadachi ob otrazhenii ploskix prodol'nyx voln napryazhenij v vide del'ta funkcii ot zhestkoj poverxnosti, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Problemy Kompleksnoj Bezopasnosti,* № 2, pp. 42–50.

8. *Musaev, V.K.* (2014). O dostovernosti rezul'tatov matematicheskogo modelirovaniya nestacionarnyx voln napryazhenij v ob"ektax slozhnoj formy, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings,* № 3, pp. 71–76.

9. *Musayev, V.K.* (2015). Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape, International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, Vol. 11, Iss. 1, pp. 135–146.

10. *Musaev, V.K.* (2014). O dostovernosti komp'yuternogo modelirovaniya nestacionarnyx uprugix voln napryazhenij v deformiruemyx telax slozhnoj formy, *Mezhdunarodnyj Zhurnal Prikladnyh i Fundamental'nyh Issledovanij*, № 11, pp. 10–14.

THE ACCURACY OF THE NUMERICAL METHOD RESULTS IN THE DISPLACEMENT IN THE ELASTIC REFLECTION OF STRESS WAVES IN THE FORM OF A TRIANGULAR PULSE FROM THE FREE SURFACE OF THE PLATE

Musayev V.K., Dikova E.V., Kormilitsin A.I., Samoylov S.N., Starodubtsev V.V.
Moscow State Machine-Building University, Moscow, Russia

The paper provides information about the reliability and accuracy of the results of numerical simulation of stress waves in solid deformable environment. The problem of elastic reflection of stress waves from the free surface of the plate. The task is implemented using the finite element method in movements. The comparison is made with results of the analytical solution at the front of the flat longitudinal wave. The studied problem is presented in the form of an infinite plate.

KEY WORDS: differential equations in partial derivatives, the problem with the initial conditions, the Cauchy problem, mathematical and numerical modeling, the principle of possible displacements, the homogeneous algorithm, finite element method, transient wave of voltage, an explicit two-layer scheme and the analytical solution, comparison, reliability, wave front, the Delta function pulse effect in the form of a triangle, a long-playing record.