Расчеты на устойчивость

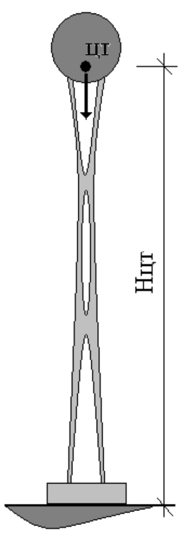
БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОТНОГО ОБЪЕКТА

В.К. ИНОЗЕМЦЕВ, *доктор технических наук, профессор*
С.А. ЖЕСТКОВА, *аспирант*
Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, ул. Политехническая д.77;
e-mail: zhestkovas@list.ru

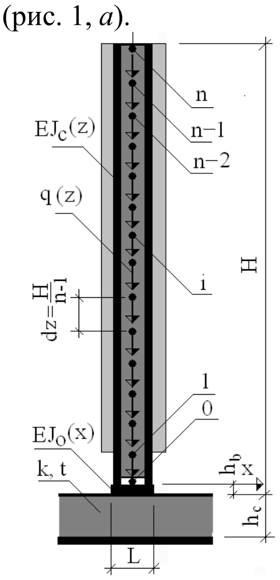
Рассматриваются две бифуркационные задачи устойчивости применительно к высотному объекту, взаимодействующему с деформируемым основанием. Оценивается влияние «общей устойчивости» на устойчивость прямолинейной формы оси высотного объекта.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: критическая нагрузка, бифуркационная устойчивость, высотный объект, деформируемое основание.

Класс задач бифуркационной устойчивости посвящен поиску точек разветвления (бифуркации) нелинейного решения дифференциальных уравнений. Наиболее широкое применение этот подход к исследованию свойств решений дифференциальных уравнений получил в задачах механики. В этих задачах в точке бифуркации от исходного решения, описывающего процесс деформирования механической системы, ответвляется новое решение. При этом за точкой бифуркации процесс деформирования, описываемый исходным решением, перестает быть устойчивым. Обычно устойчивым становится новое ответвляющееся решение. То есть происходит, так называемый, «обмен устойчивостью». В ряде задач за точкой бифуркации исходного процесса деформирования устойчивый процесс деформирования может отсутствовать. К таким задачам механики относится проблема устойчивости высотного объекта, то есть объекта с высоко расположенным центром сил тяжести (рис. 1, *а*).



а)



б)

Рис.1

Для такого объекта бифуркационная критическая нагрузка является определяющей в решении проблемы устойчивости. Другой особенностью проблемы устойчивости для высотного объекта, взаимодействующего с деформируемым основанием, является его склонность, как к потере устойчивости исходной (прямолинейной) формы равновесия сжатого элемента, так и к потере общей устойчивости исходного (вертикального) состояния равновесия в связи с деформационными процессами в его основании. Здесь возникают две бифуркационные задачи устойчивости [1], первая из которых восходит к классической задаче Эйлера [2], вторая относится к классической задаче общей устойчивости массивных тел [3].

Рассмотрим эти две бифуркационные задачи устойчивости применительно к высотному объекту, взаимодействующему с деформируемым согласно модели Винклера основанием [4,5]. В этом случае простейшая постановка первой задачи устойчивости высотного объекта может быть основана на плоской расчетной схеме устойчивости стойки с конечной изгибной жесткостью под действием собственного веса (рис. 1, *б*).

Основное линейное однородное уравнение теории прямых стержней при любых законах изменения изгибной жесткости (EJ_c), любых нагрузках и условиях закрбепления имеет вид [2]:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_c\frac{d^2W}{dz^2}\right)-\frac{d}{dz}\left(N_o(z)\frac{dW}{dz}\right)=0, \tag{1}$$

$$N_0(z)=-\left[\int_0^H q(z)dz-\int_0^x q(z)dz\right].$$

Здесь $N_0(z)$ - начальное осевое усилие.

Основное уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями. В данном случае для верхнего конца простейшей схемы высотного объекта справедливы следующие граничные условия:

$$z=H\quad\begin{cases}EJ_c\dfrac{d^2W}{dz^2}=0\\ EJ_c\dfrac{d^3W}{dz^3}=0\end{cases}, \tag{2}$$

В частном случае для жестко защемленного опорного узла решение уравнения (1) в рамках классического подхода строительной механики хорошо известно. Это уравнение устойчивости можно привести к каноническому виду уравнения Бесселя. Точное решение, которого при равномерно распределенной по высоте нагрузке от собственного веса q_0 имеет вид:

$$(q_0H)_{kp}=P_{kp}^{u}=7{,}837\,\frac{EJ_c}{H^2}. \tag{3}$$

Это вариант первой бифуркационой задачи устойчивости исходного (прямолинейного) состояния равновесия высотного объекта для частного случая жестко защемленного опорного узла.

Простейшая постановка второй задачи устойчивости высотного объекта может быть основана на модели основания Винклера [5] при абсолютно жесткой фундаментной плите. Это позволяет получить классическое аналитическое решение для критической нагрузки общей потери устойчивости [3]:

$$P_{kp}^{0}=\frac{kJ_0}{H_C}, \tag{4}$$

где k – коэффициент «постели» грунтового основания в соответствии с моделью основания Винклера; J_0 - минимальный момент инерции площади «подошвы» фундаментной плиты; H_C - высота центра сил тяжести объекта.

Отметим, что критическая нагрузка первой задачи устойчивости, учитывающей деформируемость основания, не может превосходить по величине значение критической нагрузки второй задачи устойчивости, так как потеря общей устойчивости высотного объекта соответственно нарушает исходное состояние равновесия и для первой задачи. Решение второй бифуркационной задачи дает значение критической нагрузки потери общей устойчивости, характеризующее жесткость системы «фундаментная плита – основание», с учетом жесткости фундаментной плиты и основания с использованием моделей основания различной сложности. Эта связь первой и второй простейших задач бифуркационной устойчивости может быть установлена при задании соответствующих граничных условий для опорного узла в первой бифуркационной задаче:

$$z = 0 \quad \begin{cases} W(0) = 0 \\ EJ_c \dfrac{d^2W}{dz^2} + P_{kp}^0 H_C \dfrac{dW}{dz} = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

где P_{kp}^0 - критическая нагрузка второй задачи общей потери устойчивости высотного объекта. При учете деформируемости основания критическая нагрузка общей потери устойчивости согласно модели Винклера определяется из (4), $P_{kp}^o H_c$ - «вириал» критической нагрузки общей потери устойчивости [3].

Таким образом, совокупность уравнений (1), (2) и (5) представляет собой первую бифуркационную задачу устойчивости с учетом деформируемости основания для рассматриваемой расчетной схемы высотного объекта.

Численное сопоставление критических нагрузок двух бифуркационных задач можно получить путем сведения дифференциальной задачи устойчивости методом дискретизации к обобщенной алгебраической задаче на собственные значения [1]:

$$\left[D\left(P_{kp}^0\right)\right]\left\{\overline{W}\right\} = \lambda\left(P_{kp}^u\right)[C]\left\{\overline{W}\right\} \tag{9}$$

где $\left\{\overline{W}\right\}$ – столбец неизвестных метода конечных разностей (собственные функции); $\lambda\left(P_{kp}^u\right)$ - собственное значене алгебраической задачи; P_{kp}^0, P_{kp}^u - критические нагрузки общей устойчивости и «изгибной» устойчивости сжатой стойки; $\left[D\left(P_{kp}^0\right)\right]$, $[C]$ - матрицы коэффициентов алгебраической задачи на собственные значения.

Учет конечной жесткости основания в опорном узле приводит к конечно-разностной системе уравнений вида:

$$W_{-1} + \theta\left(P_{kp}^0\right)W_1 = 0, \qquad W_0 = 0,$$

$$W_{-1} + \left(-4 + \frac{\overline{P}_{kp}^u}{2(n-1)^3} - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\right)\left(\frac{1}{n-1} - 1\right)W_0 + \left(6 + \frac{2\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n-1} - 1\right) - \theta\left(P_{kp}^0\right)\right)W_1 +$$

$$+\left(-4 - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{2(n-1)^3} - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\left(\frac{1}{n-1} - 1\right)\right)W_2 + W_3 = 0;$$

$$W_{i-2} + \left(-4 + \frac{\overline{P}_{kp}^u}{2(n-1)^3} - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\right)\left(\frac{i}{n-1} - 1\right)W_{i-1} + \left(6 + \frac{2\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\left(\frac{i}{n-1} - 1\right)\right)W_i +$$

$$+\left(-4 - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{2(n-1)^3} - \frac{\overline{P}_{kp}^u}{(n-1)^2}\left(\frac{i}{n-1} - 1\right)\right)W_{i+1} + W_{i+2} = 0;$$

$$W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1} = 0, \quad 2 \le i \le n,$$

$$-W_{n-2}+2W_{n-1}-2W_{n+1}+W_{n+2}=0, \tag{10}$$

где

$$\theta=-\frac{1-\dfrac{\overline{P}^0_{kp}}{2(n-1)}}{1+\dfrac{\overline{P}^0_{kp}}{2(n-1)}},\quad \overline{P}^0_{kp}=\frac{H_C H}{EJ_c}P^0_{kp},\quad \overline{P}^u_{kp}=(q_0H)\frac{H^2}{EJ_c}. \tag{11}$$

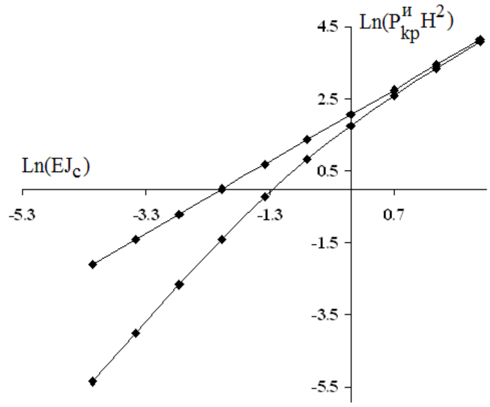
В случае классической задачи устойчивости (1), (2), (3) получим $\theta = 1$. При этом приближенное значение критической нагрузки (n = 6) отличается от точного решения (3) на 2%:

$$(q_0 H)_{kp} = P^u_{kp} = 7{,}676\,\frac{EJ_c}{H^2}. \tag{13}$$

В общем случае, очевидно, что критическая нагрузка высотного объекта (рис. 1) P^u_{kp} будет определяться изгибной жесткостью EJ_c, высотой H и жесткостью основания, причем жесткость основания оценивается значением критической нагрузки общей устойчивости сооружения P^0_{kp} в предположении, что $EJ_c \to \infty$:

$$P^u_{kp} = (q_0 H)^u_{kp} = \overline{P}^u_{kp}\left(P^0_{kp}\right)\frac{EJ_c}{H^2}. \tag{14}$$

Оценим влияние критической нагрузки общей потери устойчивости P^0_{kp} на величину критической нагрузки прямолинейной формы равновесия вертикальной оси высотного объекта P^u_{kp}. Используем условие равенства нулю определителя системы алгебраических уравнений задачи на собственные значения (10). Учет возможности общей потери устойчивости по (10) при оценке устойчивости высотного объекта (кривая 2 на рис. 2, *а*) показывает, что получаемые значения критических нагрузок P^u_{kp} значительно снижаются по сравнению с расчетом по (3) (прямая на рис. 2, *а*).



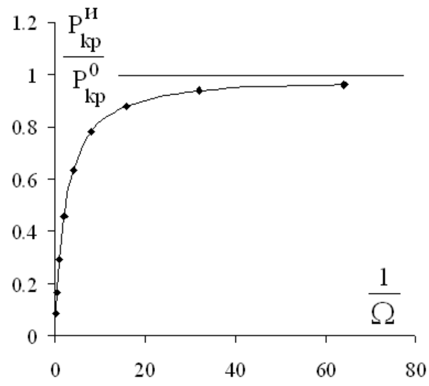


Рис. 2

На рис. 2, *б* приведена зависимость отношения критических нагрузок от изгибной жесткости высотного объекта EJ_C:

$$\frac{1}{\Omega} = 4(n-1)\frac{EJ_c}{P^0_{kp}H^2}. \tag{15}$$

Здесь очевидно, что увеличение изгибной жесткости повышает значение критической нагрузки $P_{кр}^{и}$. При этом устойчивость высотного объекта ограничена величиной критической нагрузкой общей потери устойчивости.

Литература

1. *Коллац Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1978. – 504с.
2. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем/ А. Алфутов. М.: Машиностроение, 1978. – 312с.
3. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. – Гос. Изд. Технико-теоретической литературы, Москва, 1955.
4. *Энгель Х.* Несущие системы / Хайно Энгель; предисл. Ральфа Рапсона; пер. с нем. Л.А.Андреевой. – М.: АСТ: Астрель, 2007. – С. 344.: илл.
5. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. /П. Л.Иванов. М.: Высшая школа, 1991. – 447с.
6. *Иноземцев В.К., Редков В.И.* Математическая модель деформирования геомассивов применительно к деформационным процессам в основаниях сооружений / В.К. Иноземцев, В.И. Редков. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2005. – 412 с.

References

1. *Kollatts, L.* (1978). *Zadachi na Sobstvennyye Znacheniya*, Moscow: Nauka, 504 p.
2. *Alfynov, N.A.* (1978). *Osnovi Rascheta na Ustoichivost' Uprygih System*, Moscow: Mashinostroenie, 312 p.
3. *Rzhanitsyn, A.R.* (1955). *Ustoichivost' Ravnovesiya Uprygih System,* Moscow: Gos. Izd. Techniko- teoritictheskoi literatyri.
4. *Engel, X.* (2007). *Nesyshie Sistemi*; predisl. Ralfa Rapsona; per. s nem. L.A. Andreevoi; Moscow: AST: Astrel, 344 p.
5. *Ivanov, P.L.* (1991). *Grunti i Osnovaniya Gidrotehnicheskih Sooryzhenii*. Mehanika gruntov: uchebnoe posobie dlya vuzov. 2-e izdanie, perereb. i dop. Ivanov Mosow: Visshaya Shkola, 447 p.
6. *Inozemtsev, V.K., Redkov, V.I.* (2005). Matematicheskaya Model Deformirovaniya Geomassivov Primenitlno k Deformatsionnim Protzessam v Osnovaniyah Sooryzhenii, Saratov, SSTU, 412 p.

BIFURCATION PROBLEMS OF STABILITY OF HIGH-RISE BUILDINGS

V.K. Inozemtzev , S.A. Zhestkova
Yuri Gagarin Saratov State Technical University, Saratov

We consider two bifurcation problems of stability with respect to high-rise buildings, interacting with a deformable base. The effect of "overall stability" is estimated on the stability of the rectilinear shape of the axis high-rise object.

KEYWORDS: critical load, bifurcation stability, high-rise object, deformable base.