

**Расчет конструкций из разномодульных материалов**

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ТЕРМО-СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

А.В. МИЩЕНКО, канд. техн. наук, доцент  
 Новосибирское высшее военное командное училище  
 630117, Новосибирск, ул. Иванова, 49, НВВКУ, [mavr@hnet.ru](mailto:mavr@hnet.ru)

*Получены формулы для расчета нормальных и касательных напряжений в структурно-неоднородных стержнях переменного сечения, выполненных из разномодульных материалов. В компонентах напряжений учтено влияние трех внутренних силовых факторов, поверхностных нагрузок и кусочно линейного температурного поля. Выполнен анализ влияния степени разномодульности на величины напряжений в сечении трапециевидальной формы.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** композитный стержень, слоистая структура, разномодульность, разносопротивляемость, жесткостные характеристики.

В настоящее время неоднородные элементы стержневых конструкций получают все более широкое распространение, что обусловлено их высокой эффективностью в плане реализации прочностных, деформационных и экономических показателей по сравнению с однородными элементами. При этом многие композитные и однородные материалы, используемые при создании структурно-неоднородных конструкций, обладают свойствами разносопротивляемости при растяжении и сжатии, проявляющимися как в отличии начальных модулей упругости  $E(0)|_{\epsilon>0} \neq E(0)|_{\epsilon<0}$ , так и в несовпадении законов последующего деформирования  $\sigma(\epsilon) \neq -\sigma(-\epsilon)$ . В этих случаях, как отмечалось в [1, 2], может быть использована модель разномодульного (билинейного) деформирования, причем, во втором из них она может трактоваться – как первое расчетное приближение, принятое при описании нелинейных диаграмм деформирования (рис. 1) с введением в некотором диапазоне деформаций расчетных (секущих) модулей упругости при растяжении  $E^+$  и сжатии  $E^-$ .

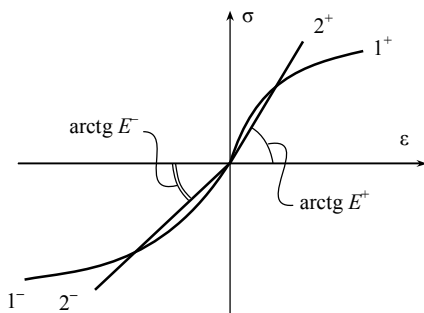


Рис. 1. Билинейная аппроксимация диаграммы деформирования разносопротивляющегося материала: исходная нелинейная диаграмма –  $1^+$ ,  $1^-$ , билинейная модель –  $2^+$ ,  $2^-$ .

Из всех нелинейных аппроксимаций такая модель является наиболее простой и, вместе с тем, – в ограниченном диапазоне эксплуатационных воздействий – способной обеспечить приемлемую точность вычислений.

Практический интерес представляет получение формул для расчета основных компонент тензора напряжений, в том числе – в зависимости от влияющих на них факторов: внутренних усилий, поверхностных нагрузок и температуры.

Рассмотрим композитный стержень (КС), имеющий структуру, образованную соединением  $s$  различных по физическим свойствам квазиоднородных частей (фаз) конечных размеров, принимающих в пространстве произвольную геометрическую форму (рис. 2, а). Материал  $k$ -й фазы характеризуется модулями упругости при растяжении  $E_k^+$  и

сжатию  $E_k^-$ , модулем сдвига  $G_k$ , удельной теплопроводностью  $\lambda_k$ , коэффициентом температурного расширения  $\alpha_k$ . Напряжения  $\sigma_x^{(k)}$  и  $\tau_{yx}^{(k)}$  в  $k$ -м слое обозначим через  $\sigma_k$  и  $\tau_k$ .

В системе координат  $xuz$  стержень имеет произвольную геометрическую привязку к отсчетной плоскости  $y = 0$ , содержащей геометрическую ось  $x$ . Ненормальная структура обладает свойствами симметрии относительно плоскости  $xu$ , в которой стержень испытывает прямой продольно-поперечный изгиб при термосиловом воздействии.

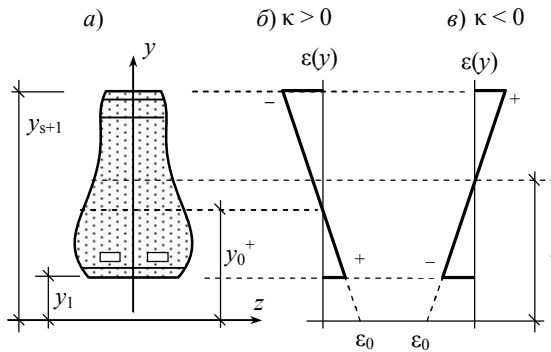


Рис. 2. Поперечное сечение композитного стержня – (а), эпюры продольных деформаций при положительной – (б) и отрицательной кривизне – (в).

Принимая классические гипотезы тонких стержней, для величин сдвигов  $\gamma_{yx}$ , продольных  $\varepsilon_x$  и поперечных  $\varepsilon_y$  деформаций запишем

$$\varepsilon_{x,\Sigma}(x, y) = \varepsilon_0(x) - \kappa(x)y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y) = \gamma_0(x). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$  – деформация и кривизна оси стержня;  $\varepsilon_{x,\Sigma}(x, y) = \varepsilon_{x,\sigma} + \varepsilon_{x,T}$  – величина полной продольной деформации, состоящей из механической  $\varepsilon_{x,\sigma}$  и температурной  $\varepsilon_{x,T}(x, y) = \alpha_k T_k(x, y)$  компонент;  $T_k(x, y)$  – функция изменения температуры в пространстве  $k$ -й фазы. Температурной деформацией в поперечных направлениях пренебрегаем, что основано на незначительном ее стеснении в силу малости продольных градиентов поперечных размеров стержня и неучете локальных эффектов в окрестности опор и конструктивных устройств для восприятия сосредоточенных воздействий.

Выражение для напряжения при билинейном термоупругом деформировании при учете (1) принимает вид

$$\sigma_k^\pm(x, y) = E_k^\pm [\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k T_k(x, y)]. \quad (2)$$

Подставив его в выражения интегральных силовых факторов

$$[N, Q, M](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_k^\pm, \tau_k, -\sigma_k^\pm y] dA, \quad (3)$$

получим систему физических уравнений

$$\begin{cases} D_A^\pm \varepsilon_0 - D_S^\pm \kappa = N + N_T^\pm, \\ -D_S^\pm \varepsilon_0 + D_I^\pm \kappa = M + M_T^\pm, \\ \gamma_0 D_Q = Q. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь и далее у величин с двойными знаками в индексах, определяемых через интегралы по поперечному сечению, такими как  $D^\pm$ ,  $N_T^\pm$ ,  $M_T^\pm$ , верхние знаки соответствуют положительной кривизне ( $\kappa > 0$ ), а нижние – отрицательной. В

уравнениях (4) для сечения КС использованы жесткостные характеристики при продольном деформировании  $D_A^\pm$ ,  $D_S^\pm$ ,  $D_I^\pm$ , при сдвиге  $D_Q$  и температурные силовые факторы  $N_T^\pm$ ,  $M_T^\pm$ . При наличии в сечении нейтральной оси с координатой  $y_0^\pm$  для них имеем

$$\left[ D_A^\pm, D_S^\pm, D_I^\pm \right] (x, y_0^\pm) = \int_{y_1}^{y_0^\pm} E_k^\pm b_k [1, y, y^2] dy + \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} E_k^\mp b_k [1, y, y^2] dy, \quad (5)$$

$$N_T^\pm (x, y_0^\pm) = \int_{y_1}^{y_0^\pm} \alpha_k E_k^\pm b_k T_k dy + \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} \alpha_k E_k^\mp b_k T_k dy, \quad (6)$$

$$M_T^\pm (x, y_0^\pm) = - \int_{y_1}^{y_0^\pm} \alpha_k E_k^\pm b_k T_k y dy - \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} \alpha_k E_k^\mp b_k T_k y dy.$$

Для каждой из трех величин в квадратных скобках левой части выражения (5) следует использовать соответствующие величины в квадратных скобках правой части. Интегралы в (5), (6), зависящие от дискретно изменяющихся (по фазам неоднородного сечения) величин  $E_k^\pm$ ,  $\alpha_k$ , представляются по-фазными суммами типа  $\int_Y E_k^\pm b_k y^2 dy = \sum_k E_k^\pm \int_{Y_k} b_k y^2 dy$ , ( $Y = \sum Y_k$ ). Для линейно-упругого одно-родного стержня выражения (5) дают классические жесткости:

$$D_A^\pm = EA, \quad D_S^\pm = ES_z, \quad D_I^\pm = EI_z.$$

Функции изменения температуры  $T_k(x, y)$  в КС выявляются решением задачи теплопроводности с использованием уравнения  $\nabla^2 T_k = 0$  при соответствующих условиях на межфазных границах и лицевых поверхностях. Для КС непризматической формы это представляет собой довольно сложную задачу. Существенное ее упрощение может быть получено, если для поперечно-слоистого стержня принять ряд следующих ограничений:

а) боковые поверхности, кроме нижней  $y = y_1(x)$  и верхней  $y = y_{s+1}(x)$  теплоизолированы;

б) на верхней и нижней поверхностях заданы приращения температуры  $t_1(x)$  и  $t_s(x)$  соответственно, являющиеся линейными функциями координаты  $x$ ;

в) градиенты поверхностей раздела фаз малы:  $\partial y_k / \partial x \ll 1$  ( $k = 1, \dots, s+1$ );

г) на внутренних границах слоев суммарный тепловой поток непрерывен. В результате для однородной среды  $k$ -й фазы, не содержащей источника тепла, решение имеет вид

$$T_k(x, y) = p_{0,k}^T(x) + p_{1,k}^T(x)y, \quad (k = 1, \dots, s). \quad (7)$$

Здесь  $p_{0,k}^T(x)$ ,  $p_{1,k}^T(x)$  – линейные функции. Для поперечно-слоистых структур  $2s$  параметров функций (7) определим, используя граничные условия первого рода [3]:

$$T_1(x, y_1) = t_1(x), \quad T_s(x, y_{s+1}) = t_s(x),$$

$$T_k(x, y_{k+1}) = T_{k+1}(x, y_{k+1}), \quad (k = 1, \dots, s-1),$$

$$\lambda_k p_{1,k}^T(x) b_k(x, y_{k+1}) = \lambda_{k+1} p_{1,k+1}^T(x) b_{k+1}(x, y_{k+1}), \quad (k = 1, \dots, s-1).$$

В результате принятия функций (7) интегральные температурно-силовые факторы (6) будут определяться выражениями:

$$N_T^\pm(x, y_0^\pm) = \int_{y_1}^{y_0^\pm} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\pm b_k dy + \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\mp b_k dy, \quad (8)$$

$$M_T^\pm(x, y_0^\pm) = - \int_{y_1}^{y_0^\pm} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\pm b_k y dy - \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\mp b_k y dy,$$

$$\varepsilon_{0,k}^T = \alpha_k p_{0,k}^T, \quad \kappa_k^T = \alpha_k p_{1,k}^T.$$

Определив из уравнений системы (4) деформацию  $\varepsilon_0^\pm$  и кривизну  $\kappa^\pm$  для нахождения координаты нейтральной оси  $y_0^\pm$  получим нелинейное уравнение

$$y_0^\pm \left[ (M + M_T^\pm) D_A^\pm + (N + N_T^\pm) D_S^\pm \right] = (N + N_T^\pm) D_I^\pm + (M + M_T^\pm) D_S^\pm. \quad (9)$$

в котором все величины  $D^\pm(y_0^\pm)$ ,  $N_T^\pm(y_0^\pm)$ ,  $M_T^\pm(y_0^\pm)$  в соответствии с (5), (6), (8) через пределы интегрирования зависят от искомой координаты  $y_0^\pm$ . Заметим, что в случаях изгиба с положительной и отрицательной кривизной модель разномодульного деформирования дает разные координаты  $y_0^+$ ,  $y_0^-$  (рис. 2, б, в). Среди частных случаев, приводящих к упрощению зависимости (9), отметим: а) поперечный изгиб ( $N = 0, T = 0$ ):

$$y_0^\pm = D_S^\pm / D_A^\pm, \quad (10)$$

б) случай перехода к центральным осям композитного сечения, обеспечивающим выполнение условия  $D_S^\pm = 0$ :

$$y_0^\pm = (N + N_T^\pm) D_I^\pm / \left[ (M + M_T^\pm) D_A^\pm \right]. \quad (11)$$

Центральные системы координат целесообразно использовать в расчетах КС постоянного поперечного сечения либо в частных случаях его переменности, при которых линии центров  $y_0^\pm(x)$  (11) остаются прямыми (но не совпадающими друг с другом при  $\kappa > 0$  и  $\kappa < 0$ ). Можно показать [4], что величина  $D_I^\pm D_A^\pm - (D_S^\pm)^2 = \text{const}$  является инвариантом относительно координаты  $y_1$  – привязки сечения к отсчетной оси  $z$ .

Подставив деформацию  $\varepsilon_0^\pm$  и кривизну  $\kappa^\pm$  из (4) в (2) и выделив слагаемые, учитывающие влияние продольной силы, изгибающего момента и температуры, получим искомые составляющие нормального напряжения

$$\sigma_{k,N}^\pm = \frac{N E_k^\pm}{D_A^\pm} \frac{1 - y k_S^\pm / (i_D^\pm)^2}{1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2}, \quad \sigma_{k,M}^\pm = - \frac{M E_k^\pm}{D_I^\pm} \frac{y - k_S^\pm}{1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2}, \quad (12)$$

$$\sigma_{k,T}^\pm = E_k^\pm \left( \frac{N_T^\pm}{D_A^\pm} \frac{1 - y k_S^\pm / (i_D^\pm)^2}{1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2} - \frac{M_T^\pm}{D_I^\pm} \frac{y - k_S^\pm}{1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2} - \varepsilon_{0,k}^T + \kappa_k^T y \right), \quad (13)$$

где  $k_S^\pm = D_S^\pm / D_A^\pm$  – коэффициент асимметрии композитного сечения, имеющий размерность длины и в частном случае поперечного изгиба, равный координате нейтральной оси  $y_0^\pm$  (10);  $i_D^\pm = \sqrt{D_I^\pm / D_A^\pm}$  – радиус жесткости композитного сечения, в случае линейного деформирования однородного стержня, равный радиусу инерции сечения.

В КС напряжения (12), (13) имеют разрывы на границах фаз, а температурные напряжения (13) образуют самоуравновешенную силовую систему.

Компоненту касательного напряжения  $\tau_{xy}^{(k)} = \tau_k$  для поперечно-слоистого стержня получим на основе условия равновесия конечной сдвигаемой части элемента стержня  $dx$ . Полагая, что продольная нагрузка  $q_x$  состоит двух частей  $\xi q_x$ ,  $(1-\xi)q_x$ , приложенных к верхней и нижней плоским поверхностям стержня с заданным коэффициентом распределения  $\xi(x) \in [0,1]$ , представим касательное напряжение в виде:

$$\tau_k^\pm(x, y) = -\frac{\xi q_x}{b_k(x, y)} - \frac{1}{b_k(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_y^{y_{s+1}(x)} \sigma_k^\pm(x, y) b(x, y) dy \right). \quad (14)$$

Подставив в (14) нормальные напряжения (12), (13), для искомым составляющих касательного напряжения от шести факторов получим:

$$\tau_{k,q_x}^\pm = \frac{q_x}{b_k} \left[ \frac{D_A^{\text{sec}\pm} 1 - y q k_S^\pm / (i_D^\pm)^2}{D_A^\pm 1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2} + \frac{D_S^{\text{sec}\pm}}{D_I^\pm} \frac{y q - k_S^\pm}{1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2} - \xi \right], \quad (15)$$

$$\tau_{k,N}^\pm = -\frac{N}{b_k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{D_A^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm / (i_D^\pm)^2 D_S^{\text{sec}\pm}}{D_A^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]} \right), \quad \tau_{k,M}^\pm = \frac{M}{b_k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm D_A^{\text{sec}\pm}}{D_I^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]} \right), \quad (16)$$

$$\tau_{k,Q}^\pm = \frac{Q}{b_k} \frac{D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm D_A^{\text{sec}\pm}}{D_I^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]}, \quad \tau_{k,m}^\pm = \frac{m_z}{b_k} \frac{D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm D_A^{\text{sec}\pm}}{D_I^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]}, \quad (17)$$

$$\tau_{k,T}^\pm = \frac{1}{b_k} \frac{\partial}{\partial x} \left( M_T^\pm \frac{D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm D_A^{\text{sec}\pm}}{D_I^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]} - N_T^\pm \frac{D_A^{\text{sec}\pm} - k_S^\pm / (i_D^\pm)^2 D_S^{\text{sec}\pm}}{D_A^\pm [1 - (k_S^\pm / i_D^\pm)^2]} - N_T^{\text{sec}\pm} \right), \quad (18)$$

$$y_q = \xi y_{s+1} + (1-\xi) y_1.$$

Здесь с индексами “sec” введены величины жесткостей и температурного усилия для сдвигаемой части сечения. В случае если сдвигаемая часть содержит нейтральную ось  $y_0^\pm \in [y, y_{s+1}]$ , они определяются выражениями

$$\left[ D_A^{\text{sec}}, D_S^{\text{sec}} \right] (x, y, y_0^\pm) = \int_y^{y_0^\pm} E_k^\pm b_k [1, y] dy + \int_{y_0^\pm}^{y_{k+1}} E_k^\mp b_k [1, y] dy, \quad (19)$$

$$N_T^{\text{sec}\pm} (x, y, y_0^\pm) = \int_y^{y_0^\pm} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\pm b_k dy + \int_{y_0^\pm}^{y_{s+1}} (\varepsilon_{0,k}^T + \kappa_{0,k}^T y) E_k^\mp b_k dy. \quad (20)$$

В противном случае интервалы интегрирования в (19), (20) объединяются и используются модули упругости соответствующего знака. Аналогично выше сделанным замечаниям в случае неоднородности сдвигаемой части, интегралы в (19), (20) представляются по-фазными суммами.

В частном случае из полученных формул (12), (13), (15)–(18) вытекают: упрощенные выражения, записанные в центральных осях при обеспечении  $k_S^\pm = 0$ ; формулы напряжений в линейно деформируемых композитных стержнях [5–10]; традиционные формулы нормальных и касательного (формула Журавского) напряжений в однородных стержнях.

Формулы (15)–(18) справедливы для поперечной  $Y$ -слоистой структуры. В структурах, имеющих фрагменты  $Z$ -слоистости (рис. 3), для которых линии  $y(z) = \text{const}$  пересекают разные фазы, эти формулы должны быть доработаны.

Используем для этого закон Гука при сдвиге для фазовых материалов и условие для суммарной сдвигающей погонной силы  $N^{\text{sec}}(x, y)$ , действующей в КС в уровне  $y$ :

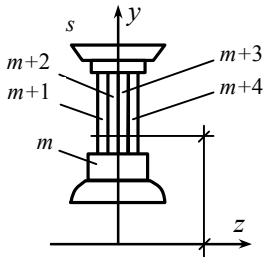


Рис. 3.

Структура с фрагментом  $Z$ -слоистости

$$\tau_{yx}^{(k)} = \gamma_k G_k, \quad \sum_j \tau_{yx}^{(j)} b_j(x, y) = N^{\text{sec}}(x, y).$$

Здесь суммирование выполняется по фазам, пересекаемым линией  $y(z) = \text{const}$ ,  $b_j$  – ширина в направлении оси  $z$   $j$ -й фазы. Полагая, в соответствии с (1), постоянство сдвигов  $\gamma_k(z) = \text{const}$ , получим правило для применения формул (15)–(18) в  $Z$ -слоистых структурах:

$$\tau_k^{\pm}(x, y) = N^{\text{sec}\pm}(x, y) \frac{G_k}{\sum_j G_j b_j(x, y)}.$$

Здесь  $N^{\text{sec}\pm}$  – правая часть каждой из формул (15)–(18), умноженная на  $b_k$ .

Подстановка напряжений (17) в выражение поперечной силы (3) дает  $Q = Q$  и  $Q = m_z$  соответственно. Можно показать, что системы напряжений (13), (15), (16), (18) самоуравновешены в поперечном сечении любой структуры. На верхней и нижней поверхностях выполняются граничные условия.

$$\tau_{1,Q}^{\pm}(x, y_1) = \tau_{1,m}^{\pm}(x, y_1) = \tau_{s,Q}^{\pm}(x, y_{s+1}) = \tau_{s,m}^{\pm}(x, y_{s+1}) = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{1,\Omega}^{\pm}(x, y_1) &= -\sigma_{1,\Omega}^{\pm}(x, y_1) y_1'(x) \\ \tau_{s,\Omega}^{\pm}(x, y_{s+1}) &= -\sigma_{s,\Omega}^{\pm}(x, y_{s+1}) y_{s+1}'(x) \end{aligned} \right\} \Omega \in [N, M, T],$$

$$\tau_{1,q_x}^{\pm}(x, y_1) = (1 - \xi) q_x / b_1(x, y_1), \quad \tau_{s,q_x}^{\pm}(x, y_{s+1}) = -\xi q_x / b_s(x, y_{s+1}).$$

На внутренних границах слоев осредненные касательные напряжения (15)–(18) могут иметь разрывы первого рода благодаря наличию функций  $b(y)$  и

$$dD^{\text{sec}}(x, y) / dx.$$

В стержнях постоянного сечения касательные напряжения (16), (18) при  $p_k^T(x) = \text{const}$  становятся равными нулю. Оставшиеся напряжения

$$\tau_{k,q_x}^{\pm}, \tau_{k,Q}^{\pm}, \tau_{k,m}^{\pm}$$

определяются лишь параметрами локального сечения, независимо от продольных градиентов геометрических параметров.

Формулы для компонент касательного напряжения (15)–(18) позволяют получить варианты нахождения используемой в третьем уравнении системы (4) сдвиговой жесткости композитного сечения. Представим ее в форме:

$$D_Q(x) = \mu_Q^{-1}(x) D_{GA}(x), \quad D_{GA}(x) = \sum_{k=1}^s G_k \int_{h_k} b_k(x, y) dy. \quad (21)$$

Здесь коэффициент  $\mu_Q$  учитывает неравномерность деформации сдвига в сечении. Его определение может быть выполнено различными способами, основанными на энергетическом подходе, осреднении деформаций сдвига либо отождествлении величины  $\gamma_0$  с максимальным сдвигом. Рассмотрим их.

1. При энергетическом осреднении используем выражение для энергии деформации сдвига:

$$Q(x)\gamma_0(x) = \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\tau_{yx}^2(x, y)}{G_k} b_k(x, y) dy. \quad (22)$$

Из компонент касательного напряжения (15)–(18) здесь следует учитывать лишь  $\tau_{k,Q}^{\pm}$  без учета самоуравновешенных напряжений. Подставляя в (22) напряжение (17) при учете (21), получим:

$$\mu_Q(x) = \frac{D_{GA}}{\left( D_I^{\pm} \left[ 1 - (k_S^{\pm} / i_D^{\pm})^2 \right] \right)^2} \sum_{k=1}^s \frac{1}{G_k} \int_{y_k(x)}^{y_{k+1}(x)} \frac{\left( D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^{\pm} D_A^{\text{sec}\pm} \right)^2}{b_k} dy. \quad (23)$$

Выражение для искомого параметра  $\mu(x)$  получается при помощи интегрирования по частям с применением дифференцирования интегралов от  $D_A^{\text{sec}\pm}(y)$ ,  $D_S^{\text{sec}\pm}(y)$  с переменными пределами. В случае стержня произвольной структуры окончательное выражение для параметра  $\mu(x)$  получается довольно громоздким.

2. Осредняя сдвиг по высоте сечения

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{y_{s+1} - y_1} \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\tau_{yx}^{(Q)}}{G_k} dy,$$

с учетом (17), (21), получим

$$\mu_Q(x) = \frac{D_{GA}}{(y_{s+1} - y_1) D_I^{\pm} \left[ 1 - (k_S^{\pm} / i_D^{\pm})^2 \right]} \sum_{k=1}^s \frac{1}{G_k} \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{D_S^{\text{sec}\pm} - k_S^{\pm} D_A^{\text{sec}\pm}}{b_k} dy.$$

Далее, преобразовав интегралы и осреднив в пределах  $k$ -го слоя ширину  $\langle b_k(x) \rangle = h_k^{-1} \int_{h_k} b_k(x, y) dy$ , получим искомую формулу:

$$\mu_Q(x) = \frac{D_{GA}}{(y_{s+1} - y_1) \left[ D_I^{\pm} D_A^{\pm} - (D_S^{\pm})^2 \right]} \sum_{k=1}^s \frac{1}{\langle b_k \rangle G_k} \left[ D_A^{\pm} (h_k D_S^{\text{sec}\pm}(y_{k+1}) - y_k D_S^{(k)\pm} + D_I^{(k)\pm}) - D_S^{\pm} (h_k D_A^{\text{sec}\pm}(y_{k+1}) - y_k D_A^{(k)\pm} + D_S^{(k)\pm}) \right]. \quad (24)$$

3. Для определения максимального сдвига  $\gamma_{\max} = \gamma(y_m)$  найдем координату  $y_m$  из условия  $\partial \tau_Q(y_m) / \partial y = 0$ , которое с учетом (17) принимает вид

$$D_S^{\pm} E_k - D_A^{\pm} E_k y_m - b_k^{-2}(y_m) \frac{\partial b}{\partial y} \left[ D_A^{\pm} D_S^{\text{sec}\pm}(y_m) - D_S^{\pm} D_A^{\text{sec}\pm}(y_m) \right] = 0.$$

Отсюда, после выявления законов  $D_A^{\text{sec}\pm}(y)$ ,  $D_S^{\text{sec}\pm}(y)$ , находится величина  $y_m$ . При постоянстве ширины  $b_j(y)$  в пределах  $j$ -й фазы содержащей  $y_m$ , формула упрощается и принимает вид  $y_m = D_S^{\pm} / D_A^{\pm}$ , совпадающий с (10). Тогда из условия  $\gamma_0 = \gamma(y_m)$  при учете (17) получаем

$$\mu_Q(x) = \frac{D_{GA}}{b_j(y_m) G_j} \frac{D_S^{\text{sec}\pm}(y_m) - k_S^{\pm} D_A^{\text{sec}\pm}(y_m)}{D_I^{\pm} \left[ 1 - (k_S^{\pm} / i_D^{\pm})^2 \right]}, \quad (25)$$

что в сравнении с подходами (23), (24) является, с одной стороны, наиболее простым и, с другой стороны, в случае совмещения (или, хотя бы, приближения) отсчетной оси к центральной (10), – наиболее физически обоснованным при определении деформированного состояния.

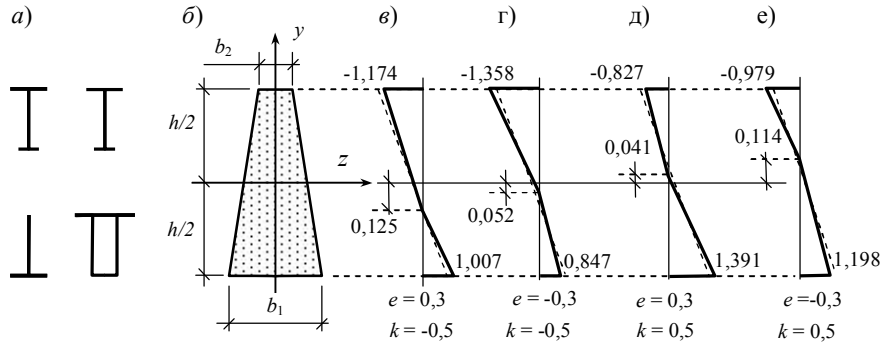


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_x^{(k)} = \sigma_k$  в однородном трапециевидальном сечении

Выясним специфику влияния разномодульности расчетной модели на напряженное состояние стержня. Из множества различных вариантов схем стержней с асимметричными сечениями (например, показанных на рис. 4, а) используем в качестве модельного примера чистый изгиб однородного призматического стержня с поперечным сечением трапециевидальной формы (рис. 4, б). Ширину сечения зададим в виде  $b(y) = b_m + k(y - y_m)$  с параметром трапецевидности (асимметрии)  $k = (b_2 - b_1) / h$ ;  $b_m$  – ширина сечения в уровне  $y_m$ . При помощи параметра  $e = 1 - E^- / E^+$  введем степень разномодульности материала. Примем  $b_m / h = 1$ ,  $y_1 = -h/2$ ,  $y_m = 0$ ,  $M > 0$ .

Результаты расчета безразмерных нормальных напряжений

$$\bar{\sigma}_{x,M}(y) = \sigma_M^\pm b_m h^2 / (6M),$$

полученных при различных сочетаниях параметров  $e = \pm 0,3$ ;  $k = \pm 0,5$  на основе формулы (12), приведены в таблице и в виде эпюр на рис. 4, в, г, д, е (в таблице в графах РТ и ЛТ приведены результаты расчета по разномодульной и линейной теориям). Пунктирной линией показаны эпюры при линейном деформировании ( $e = 0$ ). Наличие геометрической и физической асимметрии приводит к смещению нейтральной оси и перераспределению напряжений.

Таблица

$e$	$k$	$y_0/h$		$\bar{\sigma}_{1,M}$		$\bar{\sigma}_{2,M}$	
		РТ	ЛТ	РТ	ЛТ	РТ	ЛТ
0,3	0,5	0,041	0,083	1,391	1,273	-0,827	-0,909
0	0,5	0,083	0,083	1,273	1,273	-0,909	-0,909
-0,3	0,5	0,114	0,083	1,198	1,273	-0,979	-0,909
0,3	-0,5	-0,125	-0,083	1,007	0,909	-1,174	-1,273
0	-0,5	-0,083	-0,083	0,909	0,909	-1,273	-1,273
-0,3	-0,5	-0,052	-0,083	0,847	0,909	-1,358	-1,273

Для оценки погрешности в напряжениях, обусловленной пренебрежением разномодульностью  $e$ , рассмотрим величину  $\delta = (\sigma_{1,M}^+ - \sigma_{1,M}^0) / \sigma_{1,M}^0$ , где  $\sigma_{1,M}^+$ ,  $\sigma_{1,M}^0$  – напряжения в нижней точке сечения, найденные по РТ и ЛТ. На рис. 5 графики  $\delta(e)$ ,  $\delta(k)$  отражают сечения поверхности  $\delta(e,k)$  при различных уровнях асимметрии и разномодульности. Анализ подобных графиков для рассматрива-



емого и других типов сечений, в том числе композитных, позволяет сделать следующие выводы:

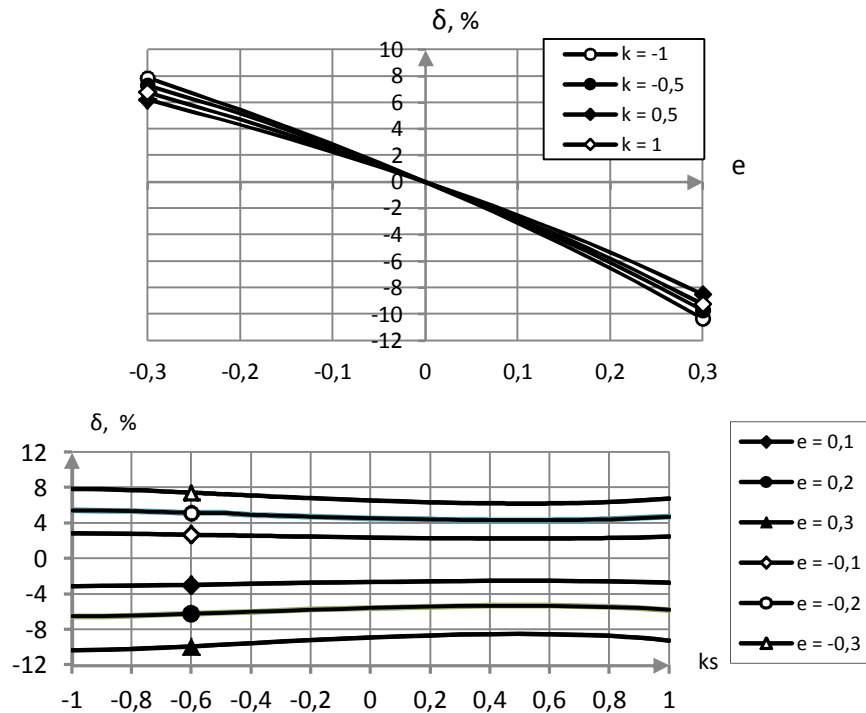


Рис. 5. Графики погрешности  $\delta(e)$ ,  $\delta(k)$  линейной теории

В силу немонотонности зависимости  $\delta(k)$  и асимметрии зависимости  $\delta(e)$  может быть поставлена задача оптимизации геометрической формы и физической структуры сечения в соответствии с заданной степенью разномодульности  $e$ .

В ограниченном диапазоне коэффициентов разномодульности (при заданной асимметрии  $k$ ) расчеты стержней могут быть выполнены по линейной теории. В частности, в данном примере при задании максимальной погрешности  $\delta_{\max} = 5\%$  он составляет от  $e = -(0,22 \pm 0,02)$  до  $e = 0,17 \pm 0,02$ . Таким образом, в однородном стержне трапецидального сечения учет разномодульности может не выполняться при отличии модулей упругости до 20%. Однако, в статически неопределимых системах, в силу зависимости напряженного состояния от характеристик жесткости (5), данный диапазон для некоторых областей конструкции может сужаться.

Отметим также, что при разномодульном деформировании скачкообразное изменение координаты нейтральной оси  $y_0^+ \rightarrow y_0^-$  при смене знака изгибающего момента, в силу появления по указанной причине разрывов в скоростях деформаций, приведет к скачкам напряжений, что следует учитывать при оценке прочности динамически нагруженных конструкций.

Полученные формулы нормальных (12), (13) и касательных напряжений (15)–(18), жесткостных характеристик (5), (21) – (25) и физические соотношения (4) в сочетании с известными для стержней кинематическими и статическими уравнениями позволяют выполнять расчеты напряженно-деформированного состояния структурно-неоднородных стержней при термосиловом воздействии в уточненной постановке по модели разномодульного деформирования.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00102*

Л и т е р а т у р а

1. *Немировский Ю.В.* Метод расчета композитных стержневых систем из разномодульных материалов / *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: материалы V Всерос. науч. конф.*, 3–5 окт. 2006. –Томск, ТГУ.
2. *Мищенко А.В., Немировский Ю.В.* Динамика слоистых рам из разносопротивляющихся материалов // *Известия вузов. Строительство.* – 2011. – № 11. – С. 10–19.
3. *Беляев Н.М.* Основы теплопередачи. – Киев: «Выща школа», 1989. – 343 с.
4. *Мищенко А.В., Гец В.В.* Применение теории композитных стержней к расчету композитной ребристой пластины / *Труды НГАСУ.* – Новосибирск: НГАСУ, 2015, т. 18. – Вып.60.
5. *Мищенко А.В.* Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2007. – Т. 13. – № 4. – С. 537–547.
6. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композитных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
7. *Пискунов В.Г., Верижченко В.Е.* Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будивельник, 1986. – 176 с.
8. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. – М.: Изд-во АСВ, – 2005. – 736 с.
9. *Тарабасов В.Д.* О расчете на изгиб многослойных балок / *Расчеты на прочность: Сб. статей.* – М.: Машгиз, 1959. – Вып. 2. – С. 55–65.
10. *Тимошенко С.П., Дж. Гере* Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.

R e f e r e n c e

1. *Nemirovsky, Yu.V.*(2006). Method of composite bars systems analysis made from differently module materials, *Fundamental and Applied Problems Contemporary Mechanics*, Materials of V All-Russian scientific conference (Tomsk, 3-5 October, 2006), Tomsk: TSU, p. 288-290.
2. *Mishchenko, A.V., Nemirovsky, Yu.V.* (2011). Dynamic of layered frames made from differently resistance materials, *Izv. vuzov, Stroitel'stvo*, N 11, p. 10-19.
3. *Beliaev, N.M.* (1989). *Heat-Transfer Principles*, Kiev: «Vysha Shkola», 343 p.
4. *Mishchenko, A.V., Getz, V.V.* (2015). Application of composite rods theory for estimate of composite ribbed plate, *Trudy NGASU*, Novosibirsk: NGASU, Vol. 18, Iss. 60.
5. *Mishchenko, A.V.*(2007). Stresses on the layered rods of variable cross sections, *Composite mechanics and design*, Vol. 13, N 4, p. 537–547.
6. *Vasiliev, V.V.* (1988). *Mechanics of Structures made of Composite Materials*, Moscow: Mashinostroenie, 272 p.
7. *Piskunov, V.G., Verizenko, V.E.* (1986). *Linear and Nonlinear Problems of Layered Structures' Analysis*, Kiev: Budivelnik, 176 p.
8. *Slivker, V.I.* (2005). *Structural Mechanics. Variational Principles*, Moscow: ASV Publishing House, 736 p.
9. *Tarabasov, V.D.* (1959). About of multilayered beams bending analysis, *Raschety na Prochnost'*: Sb. St., Moscow: «Mashgis», N 2, p. 55–65.
10. *Timoshenko, S.P., Gere, J.M.* (1976). *Mechanics of Materials*, Moscow: «Mir», 669 p.

**STRESS STATE OF STRUCTURALLY NOT UNIFORM RODS  
MADE FROM DIFFERENT MODULE MATERIALS  
UNDER THERMO-FORCE INFLUENCES**

Mishchenko A.V.

*Novosibirskoe vysshee voennoe komandnoe uchilishche, Novosibirsk*

The equations for the normal and shear stresses estimation of in structurally not uniform rods are received. These rods possess the variable cross sections and are made from difference modulus materials. The influence of three internal forces factors, surfaces forces and line-segment temperature function is taken into account. The analysis of difference module degree to the stresses in trapeziform section influences is considered.

KEY WORDS: composite rod, layered structure, difference modulus, difference resistance, rigidity characteristics.