Расчет конструкций на устойчивость

ОБЩАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОТНОГО ОБЪЕКТА И МОДЕЛЬ ОСНОВАНИЯ В ВИДЕ ПЛОСКОГО ОГРАНИЧЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В.К. ИНОЗЕМЦЕВ, *доктор технических наук, профессор*
О.В. ИНОЗЕМЦЕВА, *кандидат технических наук, доцент*
Е.А. НАЩИНЦЕВ, *аспирант*
Саратовский государственный технический университет.
410054, Саратов, ул. Политехническая д. 77; E-mail: naschintsew@mail.ru

Рассмотрена модельная задача бифуркационной устойчивости высотного объекта на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей с основанием на базе модели плоского ограниченного полупространства на базе уравнений равновесия Навье.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: критическая нагрузка, бифуркационная устойчивость, несущий слой, метод конечных разностей, модель ограниченного полупространства, уравнения равновесия Навье.

Рассмотрим в качестве примера модельную задачу бифуркационной устойчивости высотного объекта на деформируемой фундаментной плите, взаимодействующей с основанием модели в виде плоского ограниченного полупространства в рамках плоской деформации (рис. 1).

Для решения проблемы достоверности численного эксперимента используем две компьютерные модели для задачи плоской деформации:

- модель, реализованную в программном комплексе Лира 9.4, построенную для расчетной схемы на рис. 2, где фундаментный элемент представлен абсолютно жестким телом;

- компьютерную модель, реализованную в программном комплексе Delphi, построенную для расчетной схемы на рис. 2, где фундаментный элемент представлен балочным элементом с жесткостью *EJ*.

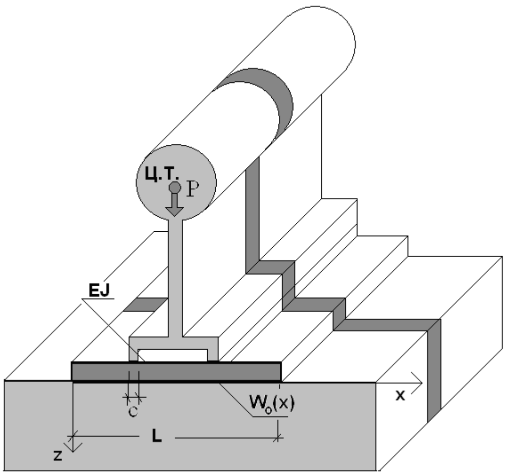

Рис. 1

Для построения компьютерной модели, реализованной в программном комплексе Delphi, запишем относительно приращений геометрические и статические уравнения для плоской задачи, следующие из фундаментальной системы уравнений механики деформируемого твердого тела:

$$\Delta e_1 = \frac{\partial \Delta U}{\partial x}; \quad \Delta e_3 = \frac{\partial \Delta W}{\partial z}; \quad \Delta e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta W}{\partial x} + \frac{\partial \Delta U}{\partial z}\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Delta \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \sigma_{13}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Delta \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \sigma_3}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

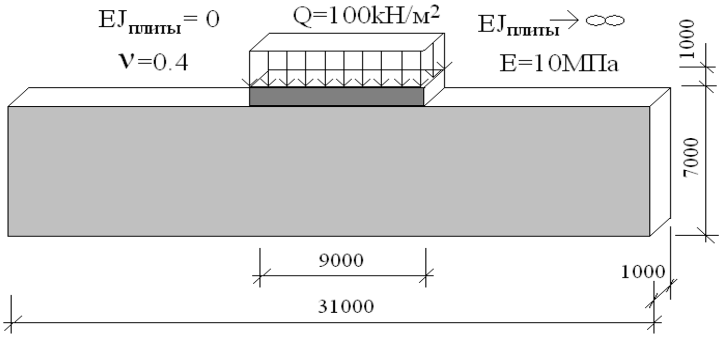

Рис. 2

Математическую модель задачи для системы «фундаментная плита - основание» будем строить, объединяя уравнения равновесия Навье и уравнения равновесия фундаментной конструкции, записанные в приращениях [6]. В случае плоской задачи уравнения статики основания объединяются с уравнениями изгиба балки или «балки-полоски», выделяемой из фундаментной плиты (рис. 3).

Граничные значения для приращений перемещений на рис. 3 принимаем нулевыми по всему контуру области за исключением границы поверхности основания. На поверхности основания задаются граничные условия для касательных и вертикальных нормальных напряжений. Величина вертикального давления, передаваемого на поверхность основания со стороны балки, будет равна вертикальному отпору.

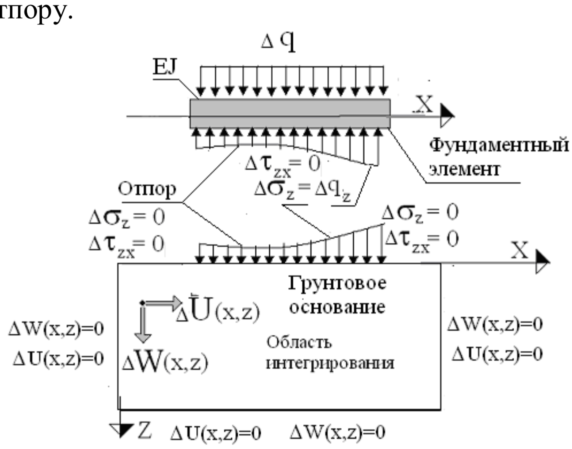

Рис. 3

Полагаем также, что вертикальные перемещения поверхности основания и нижней поверхности балки происходят совместно без отрыва. При этом функция вертикальных перемещений поверхности основания и линия прогиба оси балки тождественны. Принимая в качестве дискретизации такой модели метод «сеток» можно определить вертикальные и горизонтальные компоненты $\{\Delta W(z,x), \Delta U(z,x)\}$ вектора приращений перемещений.

Модель системы «основание-балка» на базе уравнений равновесия Навье [5] представляет собой совокупность уравнений равновесия (2), соотношений Коши (1), и граничных условий на поверхности контакта основания и балки:

$$\Delta q_z(x) = \Delta q(x) - EJ\frac{\partial^4 \Delta W(x)}{\partial x^4} \quad . \tag{3}$$

Записанное граничное условие на поверхности контакта балки и основания само по себе является дифференциальным уравнением четвертого порядка, следовательно, требует введения дополнительных граничных условий. Такими условиями являются выражения для внутренних усилий по краям балки, свободно лежащей на основании (см. рис. 3):

$$M(x)\Big|_{x=L-a;L+a} = 0; \quad Q(x)\Big|_{x=L-a;L+a} = 0. \tag{4}$$

В итоге получаем замкнутую систему определяющих уравнений задачи в частных производных. Применяя метод конечных разностей и получая алгебраическую, построим компьютерную модель, реализованную в программном комплексе Delphi. Результаты расчета по компьютерной модели ЛИРА 9.4 и по компьютерной модели, реализованной в программном комплексе Delphi, приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Результаты расчета осадок основания в мм $\left(EJ_{плиты} = 0\right)$									
0м	1м	2м	3м	4м	5м	6м	7м	8м	9м
Компьютерная модель ЛИРА 9.4									
27.25	34.11	38.07	40.16	41.06	41.06	40.16	38.07	34.11	27.25
Компьютерная модель Delphi 7									
27.14	34.64	37.90	39.74	40.66	40.66	39.74	37.90	34.64	27.14
%									
0.38	-1.55	0.44	1.04	0.97	0.97	1.04	0.44	-1.55	0.38

Таблица 2

Результаты расчета осадок основания под плитой в мм $\left(EJ_{плиты} \to \infty\right)$									
0м	1м	2м	3м	4м	5м	6м	7м	8м	9м
Компьютерная модель ЛИРА 9.4									
38.99	38.99	38.99	38.99	38.99	38.99	38.99	38.99	38.99	38.99
Компьютерная модель Delphi 7									
37.26	37.28	37.29	37.29	37.30	37.30	37.29	37.29	37.28	37.26
%									
4.42	4.39	4.36	4.35	4.34	4.34	4.35	4.36	4.39	4.42

Используем систему уравнений (1)-(4) для решения задачи общей бифуркационной устойчивости высотного объекта на фундаментной плите, взаимодействующей с основанием в виде плоского ограниченного полупространства (рис. 4). Тогда приращение «отпора» основания будет равно:

$$q_{отпора} = -EJ\frac{d^4\Delta W(x)}{dx^4} + \begin{cases} 0 \\ \Delta q_R(x, \Delta W(x), P) \\ 0 \\ \Delta q_S(x, \Delta W(x), P) \\ 0 \end{cases} . \qquad (5)$$

Здесь $\Delta q_R, \Delta q_S$ - приращение давления под опорами высотного объекта:

$$\Delta q_{\frac{R}{S}}(x, \Delta W(x), P) = \mp\frac{P}{2c}\frac{9H}{L^2}(\Delta W_S - \Delta W_R) \qquad (6)$$

где: с – ширина опоры объекта, $\Delta W_S, \Delta W_R$ - осадки фундаментной плиты под правой и левой опорами (рис. 4).

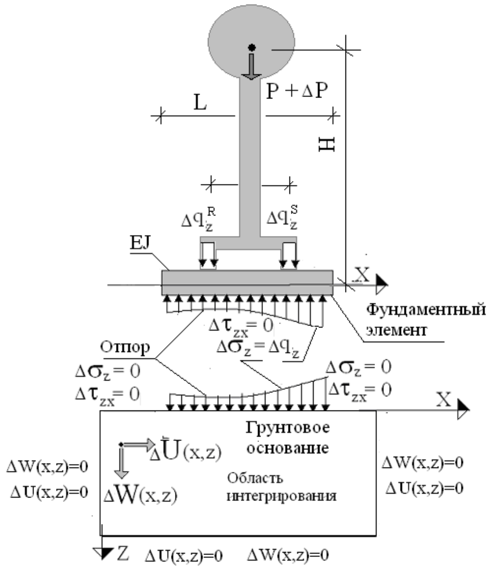

Рис. 4

Замена граничных условий на поверхности контакта основания и балки (3) на (5) позволяет получить задачу бифуркационной устойчивости как дифференциальную задачу на собственные значения, где собственным значением является критическая нагрузка бифуркационной потери устойчивости, а собственная функция описывает вектора горизонтальных и вертикальных перемещений.

Применяя метод конечных разностей, получим алгебраическую задачу на собственные значения [2]:

$$A\begin{Bmatrix} \Delta W \\ \Delta U \end{Bmatrix} = \lambda B\begin{Bmatrix} \Delta W \\ \Delta U \end{Bmatrix} . \qquad (7)$$

Здесь: $\begin{Bmatrix} \Delta W \\ \Delta U \end{Bmatrix}$ – столбец неизвестных метода сеток (собственная функция), λ - собственное значение, *A* и *B* матрицы коэффициентов алгебраической задачи на собственные значения. Приравнивая нулю, определитель алгебраической системы уравнений на собственные значения (7), найдем значение бифуркационной критической нагрузки на основе модели основания в виде плоского ограниченногополупространства.

Результаты расчета бифуркационной критической нагрузки на основе модели основания с одним коэффициентом k, учитывающим работу основания на сжатие (модель Винклера) и модели основания в виде плоского полупространства (для 6 и 12 отрезков разбиения в методе сеток основания по длине (рис. 4)) приведены в табл. 3.

Таблица 3

Винклер Pkp[kH]	Навье 6 Pkp[kH]	Навье 12 Pkp[kH]	hc [м]	k [kH/м3]
0.680	0.99	0.707	12.5	1133.81
0.850	1.076	0.86	10	1417.26
1.134	1.19	1.13	7.5	1889.68
1.701	1.41	1.6	5.00	2834.52
3.401	2.26	3.1	2.50	5669.05
8.504	5.13	7.8	1.00	14172.6
17.007	9.77	15.3	0.5	28345.2

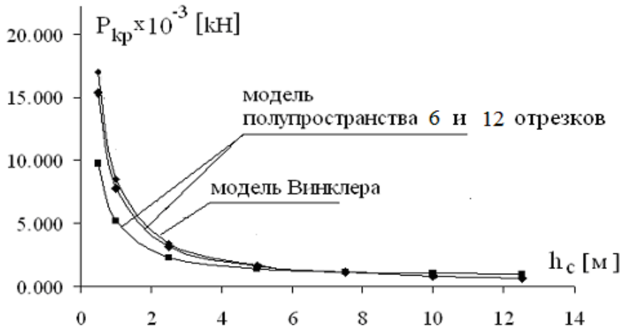

Рис. 5

В табл. 9 жесткостные коэффициенты k и t определены (при значении модуля деформаций грунта основания E_0 = 11905 КПа и коэффициента Пуассона 0,4) для различных значений сжимаемого слоя грунта h_c (рис. 4). На рис. 5 показана зависимость бифуркационной критической нагрузки от толщины сжимаемого слоя грунта h_c.

Результаты расчета бифуркационной устойчивости высотного объекта на основе модели ограниченного полупространства достаточно точно совпадают с результатами на основе модели Винклера в виде аналитического решения для бифуркационной критической нагрузки P_{cr} [1,2]:

$$P_{cr} = \frac{kJ_0}{H}. \tag{8}$$

Здесь k – коэффициент Винклера, J_0 – минимальный момент инерции относительно центральной оси площади фундаментной плиты, H – высота центра сил тяжести объекта. Таким образом, достоверность полученных результатов подтвердил проведенный численный эксперимент. Он показал совпадение результатов расчета докритического деформирования по (1-4) с результатами расчета по компьютерной модели ЛИРА 9.4, совпадение результатов расчета бифуркационной устойчивости по (1-7) с аналитическим решением на основе модели Винклера (8) для абсолютно жесткой фундаментной плиты.

Использование предложенной модели основания в виде ограниченного полупространства для решения задачи бифуркационной устойчивости высотного объекта, позволяет рассматривать более сложные свойства основания, такие как многослойность, неоднородность, нелинейность, наличие шпунтовых стен, взаимовлияние фундаментов.

Литература

1. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. М.: Наука, Гл. ред. физ. мат. лит., 1978.

2. *Ржаницын А.Р.* К вопросу о теоретическом весе стержневых конструкций; Сборник под ред. А.А. Гвоздева, И.М. Рабиновича М.М. Филоненко-Бородича, Исследования по теории сооружений, вып. IV, 1949.

3. *Belostotsky A.* Dip Angle of Capital Gate // Tall buildings, 2014. - №1. - Pp. 94-98

4. *Schofield J.* Loads Numerical Simulation // Tall buildings, 2012. - №3. - Pp. 86-94.

5. *Иноземцев В.К.* Общая устойчивость сооружений на неоднородном нелинейно-деформируемом основании: монография / В.К. Иноземцев, Н.Ф. Синева, О.В. Иноземцева. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2008. - 242 с.

6. *Иноземцев В.К., Иноземцева В.К., Нащинцев Е.А.* Многоэтажные и высотные здания. Бифуркационный критерий общей устойчивости. Расчетные комплексы МОНОМАХ 4.0 и ЛИРА 9.6. // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СГТУ, 2013. - С. 80-102.

References

1. *Kollatts, L* (1978). *Zadachi na sobstvennyye znacheniya*. M.: Nauka.

2. *Rzhanitsyn, AR* (1949). K voprosu o teoreticheskom vese sterzhnevykh konstruktsiy; Sb. pod red. AA Gvozdeva, IM Rabinovicha, MM Filonenko-Borodicha, *Issledovaniya po teorii sooruzheniy*, Vol. IV.

3. *Belostotsky, A* (2014). Dip Angle of Capital Gate. *Tall Buildings*, №1, p. 94-98

4. *Schofield, J.* Loads Numerical Simulation // Tall buildings, 2012. - №3.- pp. 86-94

5. *Inozemtsev, VK, Sineva, NF, Inozemtseva, OV.* (2008). *Obshchaya ustoychivost sooruzheniy na neodnorodnom nelineyno-deformiruyemom osnovanii: Monograph*. Saratov: SGTU, 242 p.

6. *Inozemtsev, VK, Inozemtseva, VK, Nashchintsev, YeA* (2013). Mnogoetazhnyye i vysotnyye zdaniya. Bifurkatsionnyy kriteriy obshchey ustoychivosti. Raschetnyye kompleksy MONOMAKh 4.0 i LIRA 9.6. *Problemy prochnosti elementov konstruktsiy pod deystviyem nagruzok i rabochikh sred*: Mezhvuz. Nauch. Sb., Saratov: SGTU, p. 80-102.

OVERALL STABILITY BIFURCATION TALL OBJECTS BASED ON THE MODEL BASE AS A PLANE BOUNDED HALF

V.K. Inozemtzev, O.V. Inozemtzeva, and E.A. Nachshintsev
Saratov State Technical University, Saratov

The article considers the model problem of the bifurcation stability of tall objects on deformable foundation slab interacting with the base model based on the half-plane bounded on the basis of the Navier equations of equilibrium.

KEYWORDS: critical load bifurcation stability, the carrying layer, finite difference energy method, a model of limited half space, Navier equations of equilibrium.