НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, ШАРНИРНО ОПЁРТОЙ НА КОЛЬЦЕВОЙ ОПОРЕ И НАГРУЖЕННОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИЛОЙ ПО КРАЮ

Н.К. ГАЛИМОВ, *к.ф.-м.н., вед. науч. сотрудник*
ИММ КазНЦ РАН, 420111, Казань, ул. Лобачевского, 2/31

Рассмотрено решение задачи о нелинейном деформировании круглой пластины, шарнирно опёртой на кольцевой опоре и нагруженной распределенной силой по краю. Задача возникла в связи с необходимостью оценки уровня напряжений на поверхности образца при исследовании нагруженных образцов в коррозионно-активной среде.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: круглая пластина, кольцевая опора, метод Бубнова-Галеркина, прогиб, совместность деформаций

Введение. В работах [1-3] рассмотрено влияние физических полей на процесс коррозионного износа. Влияние характера деформирования на коррозионный износ отмечено в [4-5]. В публикациях [6-7] изложен способ и устройство для диагностики механических характеристик нагруженных тонкостенных элементов. В статье рассмотрено решение задачи о нелинейном деформировании круглой пластины, шарнирно опёртой на кольцевой опоре и нагруженной распределенной силой по краю. Задача возникла в связи с необходимостью более точной оценки уровня напряжений на поверхностях образцов на разработанном испытательном узле по [6-7] при исследовании нагруженных образцов в коррозионно-активной среде. Приведены исходные соотношения, а также описан на базе метода Бубнова - Галеркина алгоритм вывода основной зависимости относительно прогиба пластины.

Решение задачи. Рассмотрим решение задачи о нелинейном деформировании круглой пластины, шарнирно опёртой на кольцевой опоре и нагруженной распределенной силой по краю (рис.1).

Уравнения равновесия для круглой пластины имеют вид [8]:

$$\frac{d\left(rT_1\right)}{dr} = T_2, \qquad \frac{1}{r}\frac{d\left(rQ\right)}{dr} - T_1\chi_1 - T_2\chi_2 = 0, \tag{1}$$

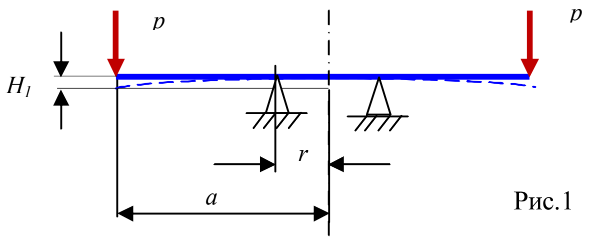

Рис.1

где r – радиальная координата, T_1 и T_2 – радиальное и кольцевое усилия, Q – перерезывающая сила, χ_1 и χ_2 – изменения кривизн в радиальном и кольцевом направлениях.

Усилия T_1, T_2 и перерезывающая сила Q через радиальное перемещение u и прогиб w выражаются следующим образом:

$$T_1 = B\left(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right), \quad T_2 = B\left(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right), \tag{2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\omega^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r}, \quad \chi_1 = -\frac{d^2w}{dr^2}, \quad \chi_2 = -\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr},$$

$$Q = -D\frac{d\Delta w}{dr},\qquad \Delta w = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(d\omega\right),\qquad \omega = \frac{dw}{dr}, \tag{3}$$

где ε_1 и ε_2 – радиальная и окружная деформации, а B и D – жесткости пластинки на растяжение и изгиб,

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2},\qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{4}$$

Здесь E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона материала пластинки, h – её толщина.

Радиальную ε_1 и окружную ε_2 деформации выразим из (2):

$$\varepsilon_1 = \frac{T_1 - \nu T_2}{B(1-\nu^2)},\qquad \varepsilon_2 = \frac{T_2 - \nu T_1}{B(1-\nu^2)}. \tag{5}$$

Внося ε_1 и ε_2 из (5) в формулу совместности деформаций, используя при этом первое из уравнений (1), получим соотношение

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\overline{T_1}\right)\right] + 0.5\omega^2 = 0,\quad \xi = \frac{r}{a},\quad \overline{T_1} = \frac{T_1}{Eh},\quad \omega = \frac{dw}{dr} = \frac{1}{a}\frac{dw}{d\xi}, \tag{6}$$

где ξ – безразмерная радиальная координата, $\overline{T_1}$ – безразмерное усилие, a – радиус пластинки (рис.1).

Обозначим через a_0 – радиус опорного круга пластинки, а через $\xi_0 = a_0/a$ – его безразмерное значение. В нашем конкретном случае $\xi_0 = 0{,}181818$ [6-7]. Выражения прогибов w^{I} для области I ($\xi \le \xi_0$) и w^{II} для области II ($\xi_0 \le \xi \le 1$) возьмем в виде:

$$w^I = 0.5f\left[(\xi_0^2 - 1)\frac{1-\nu}{1+\nu} + 2\ln\xi_0\right](\xi^2 - \xi_0^2),\quad \xi \le \xi_0, \tag{7}$$

$$w^{II} = f\left[0{,}5(\xi^2 - \xi_0^2)\frac{\xi_0^2(1-\nu) - (3+\nu)}{1+\nu} + \xi_0^2(\ln\xi - \ln\xi_0) + (\xi^2\ln\xi - \xi_0^2\ln\xi_0)\right]\quad \xi \ge \xi_0,$$

f – параметр прогиба, подлежащий определению.

При $\xi_0 = 0{,}181818$, $\nu = 0{,}3$ постоянные, входящие в (7), равны

$$0.5\left[(\xi_0^2 - 1)\frac{1-\nu}{1+\nu} + 2\ln\xi_0\right] = -1.965078670,$$
$$0{,}5\frac{\xi_0^2(1-\nu) - (3+\nu)}{1+\nu} = -1{,}260330578. \tag{8}$$

Тогда, для рассматриваемых областей I и II, величины ω из (6) соответственно равны:

$$\omega^I = (-3.930157346\xi)A,$$
$$\omega^{II} = A\left(-1.520661157\,\xi + \frac{\xi_0^2}{\xi} + 2\xi\ln\xi\right),\quad A = \frac{f}{a}. \tag{9}$$

Внеся ω^I в уравнение (6) и проинтегрировав по ξ, получим

$$T_1^I = -0.9653834456A^2\xi^2 + C_1, \tag{10}$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Вторая постоянная C_2 положена равной нулю ввиду ограниченности решения в центре пластины.

Внося выражение ω^{II} в уравнение (6), получим для области II

$$\overline{T_1}^{II} = -0.5A^2F(\xi) + C_3 + \frac{C_2}{\xi^2}, \tag{11}$$

$$F(\xi) = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4} - 0.0833276415 \quad - 1.260330578 \quad \xi^2\right]\ln\xi +$$

$$+ \quad (\ln\xi)^2\left(0.5\xi^2 + \xi_0^2\right) + 1.29679922 \quad \xi^2 + 0.04166382 \ , \tag{12}$$

где C_2 и C_3 – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя условию $\overline{T}_1^{II}(1) = 0$, получим:

$$C_2 = -C_3 + 0.5A^2F(1), \quad F(1) = 1.338463049 \ , \ F(\xi_0) = 1.308182454, \tag{13}$$

$$\overline{T_1}^{II} = 0.5A^2\left[\frac{F(1)}{\xi^2} - F(\xi)\right] + C_3\left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right).$$

Выполняя условие сопряжения усилий на границе областей I и II, $\overline{T}_1^{I}(\xi_0) = \overline{T}_1^{II}(\xi_0)$, найдем постоянную C_1:

$$C_1 = 0.5A^2\left[1.93076709 \quad \xi_0^2 + \frac{F(1)}{\xi_0^2} - F(\xi_0)\right] + C_3\left(1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right). \tag{14}$$

Тогда имеем

$$\overline{T_1}^{I} = 0.5A^2\left[1.93076709 \quad \left(\xi_0^2 - \xi^2\right) + 39.180324827 \quad\right] - 29.25C_3. \tag{15}$$

Осталось невыполненным условие равенства радиальных перемещений u^{I} и u^{II} областей I и II на их границе. Для этого по второй из формул (5) выразим кольцевые деформации ε_2 через усилия областей I и II при $\xi = \xi_0$

$$\varepsilon_2^{I} = \frac{u^{I}}{a\xi_0} = \frac{1}{Eh}\left[\frac{d(\xi T_1)}{d\xi} - \nu T_1^{I}\right] = \frac{u^{II}}{a\xi_0} = \frac{1}{Eh}\left[\frac{d(\xi T_1^{II})}{d\xi} - \nu T_1^{II}\right] = \varepsilon_2^{II}. \tag{16}$$

Внося в (16) усилия $\overline{T_1}^{I}$, $\overline{T_2}^{II}$, получим уравнение для определения C_3

$$C_3 = 0.6503663695\,A^2. \tag{17}$$

Тогда окончательно запишем:

$$\overline{T_1}^{I} = 0.5A^2\left[1.9307670912 \quad (\xi_0^2 - \xi^2) + 1.133892164 \quad\right], \tag{18}$$

$$\overline{T_1}^{II} = 0.5A^2\left[1.3384630489 \quad \xi^{-2} - F(\xi) + 1.300732739 \quad (1 - \xi^{-2})\right].$$

Запишем 2-ое уравнение (1) в виде:

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left[(Q + T_1\omega)\xi\right] = 0. \tag{19}$$

Запишем вариационную формулу в виде

$$\xi(Q + T_1\omega)\delta w\big|_{\xi=1} - \int_0^1 \xi(Q + T_1\omega)\frac{d\delta w}{d\xi}d\xi = 0 \ . \tag{20}$$

Учитывая, что на краю при $\xi = 1$:

$$Q^{(II)} = -p, \quad T_1^{II}(1) = 0,$$

(p – заданное усилие), имеем вариационную формулу

$$1.105956\ p - \int_0^{\xi_0} T_1^I \left(\omega^I\right)^2 \xi d\xi - \int_{\xi_0}^1 \left[-\frac{4D}{a^2}\frac{\omega^{II}}{\xi} + T_1^{II}\left(\omega^{II}\right)^2 \right] \xi d\xi = 0 \qquad (21)$$

Вычисления дают

$$\int_0^{\xi_0} T\left(\omega^I\right)^2 \xi d\xi = 0.0024374, \quad 4\int_{\xi_0}^1 \omega^{II} d\xi = -4.42382509, \quad \int_{\xi_0}^1 T_1^{II}\left(\omega^{II}\right)^2 \xi d\xi = 0.173483.$$

В результате имеем следующее уравнение относительно величины $A = f/a$

$$0.17592036\ EhA^3 + 4.423825085\ \frac{D}{a^2} A - 1.10596\ p = 0 \qquad (22)$$

По уравнению (22) были выполнены числовые расчеты при следующих данных:

$a = 5.5$ см, $h = 0.05$ см, $\xi_0 = 0.181818$, $E = 200000$ МПа, $\nu = 0.3$,
$D = 22.893$ кг/см, $B = 109890$ кг см.

В начале решена линейная задача при $p = 0.01$ кг/см. Прогиб края $\xi = 1$ оказался равным 0.02 см, что составляет $0.4h$. Затем с шагом $\Delta p = 0.01$ кг/см решалось уравнение (22).

Результаты решения приведены в табл. 1.

Таблица 1. Прогибы при $\xi = 1$

p(кг/см)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
-w(см)	0.0191	0.0344	0.0462	0.0537	0.0637

p(кг/см)	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
-w(см)	0.0705	0.0766	0.0821	0.0871	0.0916

p(кг/см)	0.12	0.15	0.17	0.20	0.22
-w(см)	0.0998	0.1104	0.1165	0.125	0.1305

На рис. 2 представлена зависимость «давление – прогиб» для линейного (сплошная линия) и нелинейного (обозначены точками) случаев.

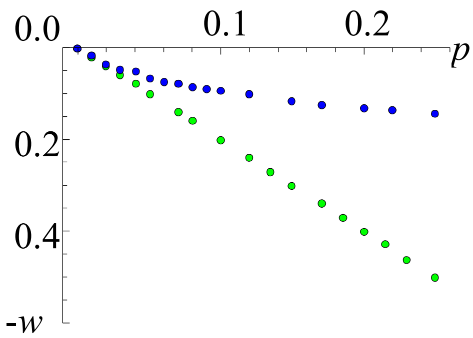

Рис.2

Из рис.2 видно существенное отличие нелинейного решения от линейного решения. Т.е. при определении напряжений необходимо использовать нелинейное решение задачи.

Л и т е р а т у р а

1. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* Effect of a Magnetic Field on Corrosive Wear // ISSN 1028_3358, Doklady Physics, 2012, Vol.57, No.3, pp.104-106.

2. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* Influence of the magnetic field on corrosive wear // 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. Kazan, Russia, 26-31 August, 2012. 203_proceeding.pdf.

3. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* Effect of Ultraviolet Radiation on the Corrosive Wear of Steel Samples // ISSN 1028_3358, Doklady Physics, 2012, Vol.57, No.10, pp.393-395.

4. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* The Influence of the Character of Deformation of Structural Element Surfaces on the Corrosive Wear // Strength of materials, 2012, pp.1-7.

5. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R., Yakupov S.N.* Corrosion on the deformed surfaces // 19th European Conference on Fracture: Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. Kazan, Russia, 26-31 August, 2012. 347_proceeding.pdf.

6. *Yakupov N.M., Giniyatullin R.R, Yakupov S.N.* Expedient and the device for diagnostics of mechanical characteristics of the loaded thin-walled elements in the conditions of a flow // XVI International Conference on the Methods of Aerophysical Research – ICMAR-2012. Abstracts. Part 1. Kazan, August 19-25, 2012. Pp.256-257.

7. *Якупов Н.М., Велиюлин И.И., Антонов В.Г., Нуруллин Р.Г., Гиниятуллин Р.Р., Якупов С.Н.* Способ испытания тонкостенных образцов под напряжением и устройство «Летающая тарелка» для его осуществления. Патент на изобретение РФ №243707.

8. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат. Казань, 1957. С.431.

NONLINEAR DEFORMATION OF CIRCULAR PLATES, PIVOTALLY SUPPORTED ON THE SUPPORT RING AND LOADED BY A DISTRIBUTED FORCE ALONG THE EDGE

N.K. GALIMOV

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center,
Russian Academy of Sciences

The solution to the problem of nonlinear deformation of a circular plate pivotally supported on the support ring and loaded by a distributed force along the edge. The problem has arisen with the need for a more accurate assessment of the stress level on the surface of the sample in the study of the loaded samples in corrosive environment.

KEYWORDS: round plate, annular bearing, the Bubnov - Galerkin method, the deflection compatibility of deformations