

Теория упругости

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИНОРОДНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

В.М. МИРСАЛИМОВ, *д-р ф.-м. наук, профессор,*
Ф.Ф. ГАСАНОВ, *канд. техн. наук, доцент*
Азербайджанский технический университет,
Азербайджан, AZ1073, Баку, пр. Г. Джавида, 25, mir-vagif@mail.ru

Рассматривается упругая среда, ослабленная периодической системой круглых отверстий, заполненных шайбами из однородного упругого материала, поверхность которых покрыта цилиндрической пленкой. Среда (связующее) ослаблена двумя периодическими системами прямолинейных трещин со связями между берегами в концевых зонах. Строятся общие представления, описывающие класс задач с периодическим распределением напряжений вне круговых отверстий и трещин при продольном сдвиге. Анализ предельного равновесия трещин в рамках модели концевой зоны выполняется на основе нелокального критерия разрушения с силовым условием продвижения вершины трещины и деформационным условием для определения продвижения края концевой зоны трещины.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: инородные включения; когезионные трещины; продольный сдвиг; напряжения в связях.

На стадии проектирования новых машин и конструкций необходимо учитывать случаи, когда в отдельных узлах машин и конструкций могут возникнуть трещины. Это особенно проявляется в деталях новой техники, в которых наибольшее применение находят высокопрочные конструкционные материалы, имеющих периодическую структуру (композиты), и склонные к хрупкому разрушению. Их работоспособность в значительной степени определяется уровнем концентрации напряжений на контурах раздела различных сред. Достаточно полное представление о характерном распределении напряжений в микроструктуре линейно армированных материалов можно получить, исследуя распределение напряжений при сдвиге. Решение этой задачи открывает новые возможности прогнозирования механических свойств композитных материалов по данным исходным характеристикам для составляющих компонентов и виду микроструктуры. В структурно-неоднородных материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается значительная часть трещины. В этом случае зону разрушения можно рассмотреть как некоторую концевую зону, примыкающую к трещине с материалом с частично нарушенными межчастичными связями.

Принято, что берега трещин в концевых зонах взаимодействуют, причем силы этого взаимодействия, называемыми силами сцепления, распределены таким образом, что вершина трещины является особой точкой напряженно-деформированного состояния.

Пусть имеется упругая плоскость (связующее), ослабленная периодической системой круглых отверстий, имеющих радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры этих отверстий находятся в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$.

Круговые отверстия плоскости (связующего) заполнены волокнами (шайбами) из другого однородного упругого материала, поверхность которых равномерно покрыта однородной цилиндрической пленкой. Плоскость ослаблена

двумя периодическими системами прямолинейных трещин с концевыми зонами со связями между берегами (рис. 1). Берега трещин сдвига вне концевых зон свободны от внешних нагрузок, а на композит действуют напряжения $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (продольный сдвиг на бесконечности).

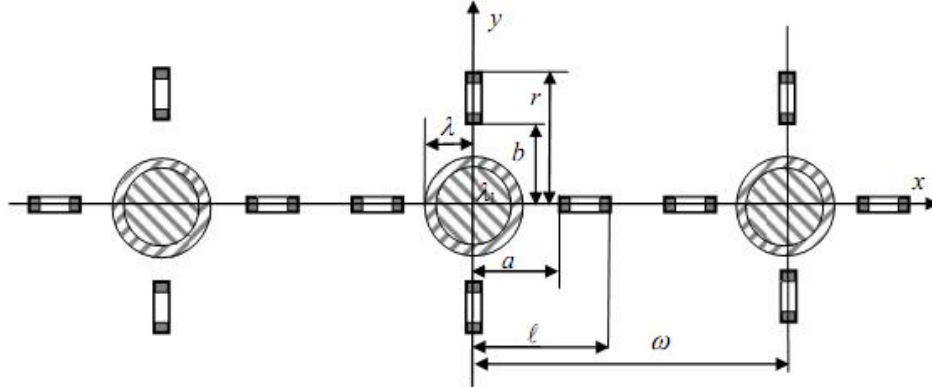


Рис. 1. Расчетная схема задачи

По мере возрастания внешней нагрузки τ_y^∞ на продолжении трещин будут возникать зоны ослабленных межчастичных связей материала (зоны предразрушения). Используется модель трещины со связями между берегами в концевых зонах предразрушения [1].

Концевые зоны трещин моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале связующего. В том случае, когда длина концевой зоны трещины не является малой по сравнению с размером трещины, методы оценки сопротивления материала разрушению, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой зоной, неприменимы. В этих случаях нужно моделирование напряженно-деформированного состояния в концевой зоне трещины проводить с учетом деформационных характеристик связей и применения двухпараметрического критерия [2, 3] разрушения, описывающего как развитие вершины трещины, так и изменение размера концевой зоны трещины при ее росте. Если процессы деформирования и разрушения в концевых зонах трещин включают несколько физических механизмов, как например, в композиционных материалах, то в таких случаях эффективным является использование модели концевой зоны с сингулярностью напряженного состояния в вершине трещины. Для однородных материалов такая модель трещины рассмотрена в работах [2, 4 – 8] и дано развитие [3, 9] для трещин с концевой областью на границе раздела материалов с различными свойствами.

Моделирование концевых зон состоит в рассмотрении их как части трещин и в явном приложении к поверхности трещин в концевых зонах сил сцепления, сдерживающих их сдвиг. Размеры концевых зон трещин считаются соизмеримыми по сравнению с длиной трещин. Взаимодействие берегов концевых зон моделируется путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры зон предразрушения зависят от вида материала.

Анализ предельного равновесия трещин в композитах с периодической структурой в рамках предлагаемой модели концевой зоны при продольном сдвиге выполняется на основе нелокального критерия разрушения с силовым условием продвижения вершины трещины и кинематическим условием для определения продвижения края концевой зоны трещины и включает: 1) установление зависимости сил сцепления от сдвига берегов зоны предразрушения; 2)

оценку напряженного состояния вблизи зоны предразрушения с учетом внешних нагрузок и сил сцепления, а также расположения волокон; 3) определение зависимости предельных внешних нагрузок от геометрических параметров составной среды, при которых происходит рост трещина.

При действии внешней нагрузки τ_y^∞ на составное тело в связях, соединяющие берега концевых зон трещин, будут возникать касательные напряжения $q_y(x)$ и $q_x(y)$ соответственно. Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

В случае идеального контакта на границах раздела сред перемещения и напряжения равны между собой. В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом ω .

Используя представление напряжений и смещения через одну аналитическую функцию $f(z)$

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z),$$

где μ – постоянная материала среды; $i = \sqrt{-1}$, граничные условия рассматриваемой задачи запишем в следующем виде:

$$f_b(\tau_1) + \overline{f_b(\tau_1)} = f_t(\tau_1) + \overline{f_t(\tau_1)}, \quad (1)$$

$$\mu_b \frac{d}{ds} [f_b(\tau_1) - \overline{f_b(\tau_1)}] = \mu_t \frac{d}{ds} [f_t(\tau_1) - \overline{f_t(\tau_1)}], \quad f_t(\tau) + \overline{f_t(\tau)} = f_s(\tau) + \overline{f_s(\tau)}, \quad (2)$$

$$\mu_t \frac{d}{ds} [f_t(\tau) - \overline{f_t(\tau)}] = \mu_s \frac{d}{ds} [f_s(\tau) - \overline{f_s(\tau)}], \quad F_s(t) - \overline{F_s(t)} = f_y(t),$$

$$F_s(t_1) - \overline{F_s(t_1)} = f_x(t_1), \quad (3)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$; $\tau_1 = (\lambda - h)e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t и t_1 – аффиксы точек берегов трещин с концевыми зонами предразрушения, направленные коллинеарно осям абсцисс и ординат, соответственно; h – толщина покрытия; величины, относящиеся к покрытию, волокну и связующему обозначаются соответственно индексами t, b, s ; $f_y(t) = 0$ – на свободных берегах трещины; $f_y(t) = -2iq_y(t)$ – на берегах концевых зон трещин, направленных по осям абсцисс; $f_x(t_1) = 0$ – на свободных берегах трещин; $f_x(t_1) = -2iq_x(t_1)$ – на берегах концевых зон трещин, направленных коллинеарно оси ординат.

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить соотношениями, связывающими сдвиг берегов зон предразрушения и касательные напряжения в связях. Без потери общности эти соотношения представим в виде

$$w_s^+(x, 0) - w_s^-(x, 0) = C(x, q_y(x))q_y(x) \quad (4)$$

для концевых зон, коллинеарных оси абсцисс,

$$w_s^+(0, y) - w_s^-(0, y) = C(y, q_x(y))q_x(y)$$

для концевых зон, коллинеарных оси ординат, где функции $C(x, q_y(x))$ и $C(y, q_x(y))$ – эффективные податливости связей; $(w_s^+ - w_s^-)$ – сдвиг берегов концевых зон трещин.

После некоторых преобразований систему краевых условий (1) – (2) можно привести к следующему виду:

$$\left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) f_b(\tau_1) + \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \overline{f_b(\tau_1)} = 2f_t(\tau_1), \quad (5)$$

$$\left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) f_t(\tau) + \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \overline{f_t(\tau)} = 2f_s(\tau). \quad (6)$$

Решение краевой задачи ищем в виде:

$$f_s(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z), \quad (7)$$

$$f_1'(z) = F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (8)$$

$$f_2'(z) = F_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-z) dt, \quad (9)$$

$$f_3'(z) = F_3(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_2} g_1(t_1) \zeta(it_1 - z) dt_1,$$

$$f_b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, \quad f_t(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{2k} z^{2k+1}, \quad (10)$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi z}{\omega}} - \frac{1}{3} \right], \quad \zeta(t) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t; \quad \zeta(t_1) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t_1,$$

где интегралы в (9) берутся по линиям $L_1 = \{[-\ell, -a] + [a, \ell]\}$; $L_2 = \{[-r, -b] + [b, r]\}$,

$$g(x) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dx} [w_s^+(x, 0) - w_s^-(x, 0)] \text{ на } L_1; \quad g_1(y) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dy} [w_s^+(0, y) - w_s^-(0, y)] \text{ на } L_2.$$

К основным представлениям (7) – (10) необходимо добавить дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи:

$$\int_{-\ell}^{-a} g(t) dt = 0; \quad \int_a^{\ell} g(t) dt = 0; \quad \int_{-r}^{-b} g_1(t_1) dt_1 = 0; \quad \int_b^r g_1(t_1) dt_1 = 0. \quad (11)$$

Неизвестные функции $g(x)$ и $g_1(y)$, а также постоянные a_{2k} , b_{2k} , α_{2k} должны быть определены путем удовлетворения краевым условиям (5) и на L_1 и L_2 . Для этого подставим в краевые условия (5) вместо $f_b(z)$, $f_t(z)$, $f_1(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а вместо $f_2(z)$ и $f_3(z)$ – ряды Фурье на контуре $|\tau| = \lambda$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$, получим после некоторых преобразований совокупность нескольких бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$b_{2k} = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \frac{a_{2k}}{2(2k+1)}, \quad b_{-2k-2} = \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \frac{(\lambda - h)^{2(2k+1)}}{2(2k+1)} \bar{a}_{2k}, \quad (12)$$

$$\frac{a_0}{4} (G_1 + f^2 h_1) = \tau_y^\infty + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k} r_{0,k}, \quad \frac{a_0}{4} (h_2 f^2 + G_2) = -\alpha_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k}}{4} [G_1 + f^{4k+2} h_1] &= \lambda^2 \alpha_{2k} r_{k,0} + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{2p+2} r_{k,p} \lambda^{2p+2} + \frac{c_{2k}}{\lambda^{2k}}, \\ \frac{\bar{a}_{2k} \lambda^{2k}}{4} [G_2 + f^{4k+2} h_2] &= -\alpha_{2k+2}, \quad c_{2k} = c'_{2k} + c''_{2k}, \\ \text{где } c'_{2k} &= -\frac{1}{\pi i} \int_{L_1} g(t) f_{2k}(t) dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad c''_{2k} = -\frac{1}{\pi i} \int_{L_2} g_1(t_1) \varphi_{2k}(it_1) dt_1, \\ f_{2k}(t) &= \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \zeta^{2k}(t); \quad \varphi_{2k}(it_1) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \zeta^{2k}(it_1), \\ G_1 &= \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right); \quad G_2 = \left(1 + \frac{\mu_b}{\mu_t}\right) \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right), \\ h_1 &= \left(1 - \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right); \quad h_2 = \left(1 + \frac{\mu_t}{\mu_s}\right) \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_t}\right), \\ r_{p,k} &= \frac{(2p+2k+1)! g_{p+k+1}^*}{(2p)!(2k+1)! 2^{2p+2k+1}}; \quad r_{0,0} = 0, \\ g_{p+k+1}^* &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2(p+k+1)}}; \quad f = \frac{\lambda - h}{\lambda}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь, требуя, чтобы функции (7) удовлетворяли краевым условиям на берегах трещин с концевыми зонами, после некоторых преобразований, получаем систему двух сингулярных интегральных уравнений относительно $g(x)$ и $g_1(y)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_{L_1} g(t) \zeta(t-x) dt - \text{Im}[F_*(x)] &= f_y^*(x) \quad \text{на } L_1, \\ \frac{1}{\omega} \int_{L_2} g_1(t_1) K(t_1-y) dt_1 - \text{Im}[F_0(y)] &= f_x^*(y) \quad \text{на } L_2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $F_*(x) = F_1(x) + F_3(x)$; $F_0(y) = F_1(y) + F_2(y)$; $K(y) = \text{Re}[i\zeta(iy)]$; $f_y^*(x) = 0$ на свободных берегах трещины, коллинеарных оси абсцисс; $f_y^*(x) = q_y(x)$ на берегах концевых зон трещины, коллинеарных оси абсцисс; $f_x^*(y) = 0$ на свободных берегах трещины, коллинеарных оси ординат; $f_x^*(y) = q_x(y)$ на берегах концевых зон трещины, коллинеарных оси ординат.

Алгебраическая система (12) совместно с сингулярными интегральными уравнениями (14) являются основными разрешающими уравнениями задачи, решение которых позволяет определить $g(x)$, $g_1(y)$ и коэффициенты a_{2k} , b_{2k} , α_{2k} . Алгебраическая система и интегральное уравнение оказались связанными между собой и должны решаться совместно.

Зная функции $f_b(z)$, $f_t(z)$ и $f_1(z)$, можно найти напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной среды.

Воспользуемся разложением функции $\zeta(z)$ в основном параллелограмме периодов. В результате этого первое интегральное уравнение (14) можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{g(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} g(t) K(t-x) dt - \text{Im} F_*(x) = f_y^*(x), \quad K(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{2^{2j+2}}. \quad (15)$$

В дальнейшем преобразуем интегральное уравнение (15) к виду, удобному для нахождения его численного решения. Используя условие $g(x) = -g(-x)$, уравнение (15) примет вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 \frac{\xi p(\xi) d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^1 K_0(\xi, \xi_0) p(\xi) d\xi - \text{Im}[F_*(\xi_0)] = f_y^*(\xi_0),$$

$$p(\xi) = g(t); \quad K_0(\xi, \xi_0) = K(\xi - \xi_0) + K(\xi + \xi_0),$$

$$\xi = \frac{t}{\ell}; \quad \xi_0 = \frac{x}{\ell}; \quad \lambda_1 = \frac{a}{\ell}; \quad \lambda_1 \leq \xi_0 \leq 1.$$

Чтобы перейти к стандартному отрезку интегрирования $[-1, 1]$ сделаем замену переменных

$$\xi^2 = u = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\tau + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi_0 = u_0 = \frac{1 - \lambda_1^2}{2}(\eta + 1) + \lambda_1^2. \quad (16)$$

В результате преобразованное уравнение (15) принимает форму

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau - \text{Im} F_*(\eta) = q_y(\tau). \quad (17)$$

Здесь $p(\tau) = p(\xi); \quad B(\eta, \tau) = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \left(\frac{\ell}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j,$

$$A_j = \left\{ (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{u_0}\right) + \dots + \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right\}.$$

Решение интегрального уравнения (17) ищем в виде [10, 11]:

$$p(\eta) = \frac{p_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (18)$$

где $p_0(\eta)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем она аппроксимируется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Используя квадратурные формулы [10, 11]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - \eta} = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{k=1}^n p_k^0 \sum_{m=0}^{n-1} \cos n\theta_k \sin m\theta, \quad (19)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n p_k^0 B(\eta, \tau_k); \quad \tau_k = \eta_k = \cos \theta_k;$$

$$\theta_m = \frac{2m-1}{2n} \quad (m = 1, 2, \dots, n),$$

$$c'_{2k} = -\frac{1 - \lambda_1^2}{2} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n p_k^0 f_{2k}^*(\tau_k); \quad p_k^0 = p_0(\cos \theta_k),$$

$$f_{2k}^*(\tau) = f_{2k}^*(\xi^2); \quad \xi f_{2k}^*(\xi^2) = (\pi/\omega)\ell f_{2k}(t),$$

сведем основные разрешающие уравнения (12) и (15) к совокупности бесконечных

систем линейных алгебраических уравнений и к двум конечным системам относительно приближенных значений p_k^0 ($k=1, 2, \dots, n$) и R_v^0 ($v=1, 2, \dots, n$) искомым функций в узловых точках.

Конечные системы уравнений относительно неизвестных p_k^0 и R_v^0 имеют вид

$$\sum_{k=1}^n a_{m,k} p_k^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}[F_*(\eta_m)] = f_y^*(\eta_m) \quad (m=1, 2, \dots, n-1), \quad (20)$$

$$\sum_{v=1}^n a_{m,v}^* R_v^0 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}[F_0(\eta_m)] = f_x^*(\eta_m),$$

$$a_{m,k} = \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\eta_m, \tau_k) \right].$$

Аналогично определяются коэффициенты $a_{m,v}^*$.

К системе (20) необходимо добавить дополнительные условия (11), которые в дискретном виде имеют следующий вид:

$$\sum_{k=1}^n \frac{p_k^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_1^2)(\tau_k+1)+\lambda_1^2}} = 0, \quad \sum_{v=1}^n \frac{R_v^0}{\sqrt{1/2(1-\lambda_2^2)(\tau_v+1)+\lambda_2^2}} = 0. \quad (21)$$

В правую часть полученных систем входят неизвестные значения напряжений $q_y(\eta_r)$ и $q_x(\eta_r)$ в узловых точках, принадлежащих конечным зонам L_1 и L_2 соответственно. Неизвестные напряжения в связях $q_y(\eta_r)$ и $q_x(\eta_r)$ определяются из дополнительных условий (4). Используя полученное решение, имеем

$$g(x) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dx} [C(x, q_y(x)) q_y(x)], \quad (22)$$

$$g_1(y) = \frac{\mu_s}{2} \frac{d}{dy} [C(y, q_x(y)) q_x(y)]. \quad (23)$$

Требую выполнения условий (22) и (23) в узловых точках, принадлежащих конечным зонам L_1 и L_2 соответственно, получим еще две системы из M_1 и M_2 уравнений каждая для определения значений $q_y(\eta_r)$ и $q_x(\eta_r)$ соответственно. При этом используется метод конечных разностей. Полученная система уравнений (20) – (23) является связанной (замыкается) с бесконечными системами (12), в которых вместо c_{2k} подставлена формула (19). Система уравнений (12), (20) – (24) полностью определяет решение задачи.

После определения значений p_k^0 и R_v^0 коэффициенты интенсивности напряжений K_{III} находятся на основании соотношений:

$$K_{III}^a = \sqrt{\frac{\pi \ell (1-\lambda_1^2)}{\lambda_1}} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} p_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2}; \quad (24)$$

$$K_{III}^b = \sqrt{\frac{\pi r (1-\lambda_2^2)}{\lambda_2}} \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^n (-1)^{v+n} R_v^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_v}{2};$$

$$K_{III}^l = \sqrt{\pi \ell (1-\lambda_1^2)} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k p_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}; \quad K_{III}^r = \sqrt{\pi r (1-\lambda_2^2)} \frac{1}{2n} \sum_{v=1}^n (-1)^v R_v^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_v}{2}.$$

Меняя отношение жесткости волокна к жесткости связующего, можно получить все варианты, начиная со свободного от сил кругового отверстия и кончая абсолютно жестким включением.

Для анализа предельного равновесия трещин с концевыми зонами необходимы два условия (двухпараметрический критерий) разрушения. Первый критерий это условие продвижение вершины трещины, а второй это условие разрыва связей на краю концевой зоны. В качестве первого условия разрушения используем силовой критерий разрушения Ирвина. Состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует выполнение условия

$$K_{III} = K_{IIIc}, \quad (25)$$

где K_{IIIc} – постоянная материала, определяемая опытным путем.

В качестве второго условия разрушения используем критерий критического сдвига трещины и считаем, что предельный сдвиг связей на краю концевой зоны ($x_* = \ell - \ell_*$ и $x_* = a_* - a$ или $y_* = r - r_*$ и $y_* = \ell_* - \ell$) происходит при выполнении условий

$$V(x_*) = w_s^+(x_*, 0) - w_s^-(x_*, 0) = \delta_{IIIc}, \quad (26)$$

$$V(y_*) = w_s^+(0, y_*) - w_s^-(0, y_*) = \delta_{IIIc},$$

где δ_{IIIc} – трещиностойкость материала связующего.

Решение системы полученных алгебраических уравнений позволяет (при заданной длине трещин и характеристик связей) найти критическую внешнюю нагрузку τ_{xy}^∞ и предельный сдвиг берега концевой зоны в состоянии предельного равновесия трещин. Для заданных размеров трещин и концевых зон, используя предельные значения K_{IIIc} и δ_{IIIc} можно выделить режимы равновесия и роста трещин при монотонном нагружении. Если выполняются условия $K_{III} \geq K_{IIIc}$, $V(x_*)$ и $V(y_*) < \delta_{IIIc}$, то происходит продвижение вершины трещины с одновременным увеличением длины концевой зоны без разрыва связей. Этот этап развития трещин продольного сдвига можно рассматривать, как процесс приспособляемости к заданному уровню внешних нагрузок.

Рост вершины трещины с одновременным разрушением связей на краю концевой зоны будет происходить при выполнении условий

$$K_{III} \geq K_{IIIc}, \quad V(x_* \text{ или } y_*) \geq \delta_{IIIc}$$

Так, например, при выполнении условий $K_{III} < K_{IIIc}$, $V(x_* \text{ или } y_*) \geq \delta_{IIIc}$ происходит разрушение связей без продвижения вершины трещины и размер концевой зоны сокращается, стремясь к критическому значению для данного уровня нагрузки. При выполнении условий $K_{III} < K_{IIIc}$, $V(x_* \text{ и } y_*) < \delta_{IIIc}$ положение вершины трещины и концевой зоны не будут изменяться.

На основании полученных результатов на рис. 2 в случае жесткого включения при $\nu_s = 0,3$ построены графики зависимости критической нагрузки $\tau_* = \tau_y^\infty \sqrt{\omega} / K_{IIIc}$ от расстояния $a_* = a - \lambda$ для обоих концов трещины, вдоль оси абсцисс (кривая 1 соответствует левому концу) при $\lambda = 0,3$.

Штриховой линией для сравнения показана зависимость τ_* при отсутствии включений и покрытий (материал включения, покрытия и связующего одинаков) при той же геометрии трещин, вычисленная по описанной методике. Там

же штрих пунктиром представлена зависимость в случае абсолютно гибкого включения (отверстия ничем не заполнены). Для любого упругого включения картина напряженного состояния будет занимать промежуточное положение между этими двумя предельными случаями.

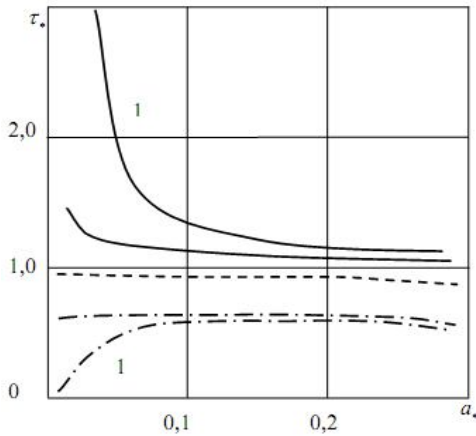


Рис. 2. Зависимости распределения критической нагрузки τ_* от расстояния a_* от обоих концов трещины вдоль оси абсцисс

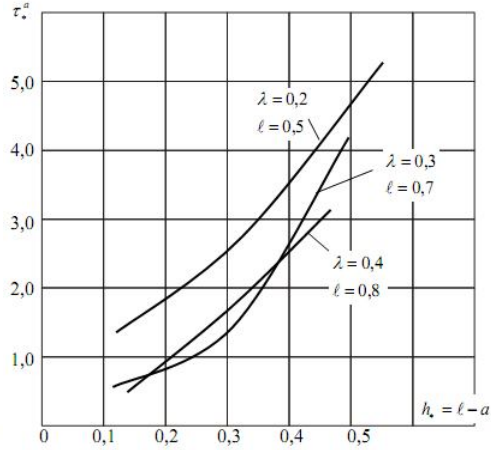


Рис. 3. Зависимости предельной нагрузки τ_*^a от длины трещины h_* для левого конца трещины

На рис. 3 – 4 представлены графики зависимости предельной нагрузки τ_* от длины трещины. При расчетах было принято $\mu_b/\mu_s = 25$; $\mu_b/\mu_t = 50$.

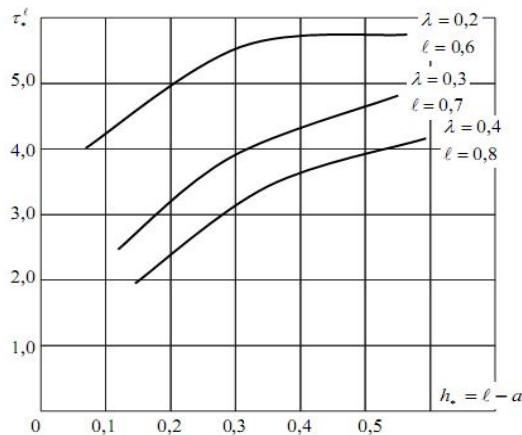


Рис. 4. Зависимости предельной нагрузки τ_*^ℓ от длины трещины h_* для правого конца трещины

Как видно, при некоторых значениях радиуса отверстия λ возможно устойчивое развитие системы трещин (их взаимное упрочнение). Проведенный параметрический анализ задачи показал, что концентрация напряжений около включений в связующем оказывает существенное влияние на развитие очень малых трещин. С ростом длины трещин с концевыми зонами это влияние затухает и уже при $\ell - \lambda > \lambda$ и $r - \lambda > \lambda$ им можно пренебречь, однако при этом начинается сказываться взаимодействие трещин. В зависимости от геометрических и физических параметров задачи наблюдается устойчивое развитие трещин с концевыми зонами.

Наличие гибкого включения повышает коэффициент интенсивности напряжений, тогда как жесткие включения по сравнению с материалом связующего уменьшают его. Влияние включения особенно эффективно сказывается на близко расположенную вершину трещины.

Таким образом, анализ показывает, что величина внешней нагрузки τ_y^∞ и критические параметры K_{IIIc} , δ_{IIIc} определяют характер разрушения:

- 1) рост вершины трещины с продвижением концевой зоны;
- 2) сокращение размера концевой зоны без роста вершины трещины;
- 3) рост вершины трещины с одновременным разрушением связей на крае концевой зоны.

Модель трещины с концевыми зонами позволяет исследовать закономерности распределения усилий в связях при различных законах деформирования, проводить анализ предельного равновесия трещин с учетом деформационного и силового критерия разрушения, а также прогнозировать критическую внешнюю нагрузку и трещиностойкость составного тела (композита).

Л и т е р а т у р а

1. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – Vol. 70, – № 14. – P. 1741-1987.
2. Гаджиев В.Д., Мирсалимов В.М. Предельно-равновесное состояние детали типа втулки контактной пары при наличии трещин со связями между берегами // Оптимальное проектирование механических систем. – Баку. Элм, 1999. – С. 50-63.
3. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 1. – С. 94-112.
4. Rose L.R.F. Crack reinforcement by distributed // J. Mech. and Phys. Solids. – 1987. – Vol. 35. – № 4. – P. 383-405.
5. Budiansky B., Cui Y.L. On the tensile strength of a fiber-reinforced ceramic composite containing a crack like flaw // J. Mech. and Phys. Solids. – 1994. – Vol. 42. – № 1. – P. 1-19.
6. Cox B.N., Marshall D.B. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue // Acta metal mater. – 1994. – Vol. 42. – № 2. – P. 341-363.
7. Кадиев Р.И., Мирсалимов В.М. Торможение трещины со связями между берегами с помощью термоупругого поля напряжений // Прикл. мех. и техн. физика. – 2005. – Том. 46. – № 1. – С. 133-143.
8. Мирсалимов В.М., Рустамов Б.Э. Локальное разрушение горящего твердого ракетного топлива // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2010. – № 3. – С. 11-15.
9. Греков М.А., Морозов Н.Ф. О равновесных трещинах в композитах, армированных однонаправленными волокнами // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 6. – С. 1054-1066.
10. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 443 с.
11. Мирсалимов В.М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

R e f e r e n c e s

1. The special issue: Cohesive models. Eng. Fract. Mech. 2003. Vol. 70, № 14. P. 1741-1987.
2. Gadzhiev, VD and Mirsalimov, VM (1999). The limit equilibrium state of a component of the hub type of a contact pair with bridged crack. *The Optimal design of Mechanical systems*. Baku: Elm, pp. 50-63.
3. Goldstein, RV and Perelmuter, MN (2001). An interface crack with bonds between the surfaces. *Mechanics of Solids*. № 1, p. 77-92
4. Rose, LRF (1987). Crack reinforcement by distributed. *J. Mech. and Phys. Solids*, Vol. 35, №4. p. 383-405.
5. Budiansky, B, Cui, YL (1994). On the tensile strength of a fiber-reinforced ceramic composite containing a crack like flaw. *J. Mech. and Phys. Solids*, Vol. 42, № 1, p. 1-19.
6. Cox, BN, Marshall, DB (1994). Concepts for bridged cracks fracture and fatigue. *Acta metal mater.*, Vol. 42. № 2. p. 341-363.
7. Kadiev, RI, Mirsalimov, VM (2005). Retardation of a crack with connections between the faces using an induced thermoplastic stress field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 46, Issue 1, p. 108-116.
8. Mirsalimov, MV, Rustamov, BE (2010). Local Fracture of the Burning Solid Propellant. *Russian Aeronautics*, Vol. 53, Issue 3, p. 257-263.

9. Grekov, MA, Morozov, NF (2006). Equilibrium cracks in composites reinforced with unidirectional fibres. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 70, Issue 6, p. 945–955.

10. Panasyuk, VI, Savruk, MP, Datsyshyn, AP (1976). *The stress distribution around cracks in plates and shells*. Kiev Naukova Dumka, 443 p.

11. Mirsalimov, VM (1987). *Non-one-dimensional elastoplastic problems*. Moscow: Nauka, 256 p.

INTERACTION OF PERIODIC SYSTEM HETEROGENEOUS INCLUSIONS AND COHESIVE CRACKS UNDER LONGITUDINAL SHEAR

V.M. Mirsalimov, F.F. Hasanov

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

The elastic medium weakened by a periodic system of circular holes filled with washers from homogeneous elastic material is considered. The surface of circular holes is covered by a cylindrical film. Medium (binder) is weakened by two periodic systems of rectilinear cracks with bonds between the faces in end zones. General representations describing the class of problems with periodic stress distribution out circular holes and cracks under longitudinal shear are constructed. The analysis of cracks limit equilibrium using the end zone model is performed based on nonlocal fracture criterion with force condition of the crack tip advance and deformation condition for determination of the crack end zone face advance.

KEYWORDS: heterogeneous inclusions, cohesive cracks, longitudinal shear, forces in bonds.

