

Геометрия поверхностей и кривых

АЛГОРИТМ СОПРЯЖЕНИЯ УЧАСТКОВ ГЛАДКИХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.Е. МИСЮРА *, старший преподаватель,

С.С. ЖИЛИН **, магистр

*Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,

**ООО «Эксперт-девелопмент»

Предлагается метод гладкого сопряжения аналитических поверхностей и приводится пример его применения в архитектуре. Данный метод демонстрируется на сопряжении поверхности вращения с образующей в форме кубической параболы и поверхности переноса с образующей кривой Гвидо Гранди. На том же примере демонстрируются торсионное формообразование для придания динамического эффекта, и приводится матрица торсионных преобразований.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Математическое моделирование в архитектуре, сопряжение аналитических поверхностей, торсионное формообразование, матрица торсионного преобразования.

Многообразие форм аналитических поверхностей [1,2] позволяет решать различные задачи геометрического моделирования в графическом дизайне [3], архитектурно-строительной сфере [4-7], судо- и авиастроении [8-11], машиностроении [12], а также во многих других отраслях, где возникают задачи формообразования и оптимизации геометрических структур по эстетическим, технологическим или конструктивным признакам. Расширению возможности аналитических методов в задачах формообразования может способствовать гладкое сопряжение поверхностей, при котором, будучи заданные разными аналитическими выражениями, ее элементы воспринимаются как единое целое (по сути таковым являющееся, в силу удовлетворения специальных краевых условий, обеспечивающих нужную гладкость). Алгоритм гладкого сопряжения при разработке системы геометрического моделирования машиностроительных деталей на базе использования метода Безье для представления кривых и поверхностей в параметрическом виде рассмотрен в работе [13]. Базовые критерии оценки качества функциональных поверхностей и схема моделирования кривой высокого качества на множестве геометрически аналитических кривых разрабатывались в работе [14]. В данной работе на примере гладкого сопряжения поверхности вращения и поверхности переноса рассматривается метод гладкого сопряжения аналитических поверхностей.

Пусть задан элемент поверхности переноса:

$$\vec{r}_1 = \{R_1(z, \varphi) \cos \varphi, R_1(z, \varphi) \sin \varphi, z\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq z_1$$

и элемент поверхности вращения

$$\vec{r}_2 = \{R_2(z) \cos \varphi, R_2(z) \sin \varphi, z\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z_1 \leq z \leq z_2.$$

Сопряжение элементов поверхностей $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(z, \varphi)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(z, \varphi)$ осуществляется при выполнении условия

$$\vec{r}_1(z_1, \varphi) = \vec{r}_2(z_1, \varphi). \quad (1)$$

Сопряжение первого порядка гладкости обеспечивается при условии

$$\left. \frac{\partial R_1}{\partial z} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{dR_2}{dz} \right|_{z=z_1}. \quad (2)$$

При выполнении дополнительного условия

$$\left. \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{d^2 R_2}{dz^2} \right|_{z=z_1} \quad (3)$$

сопряжение поверхностей будет обладать свойством гладкости второго порядка. Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются, если функции $R_1(z, \varphi)$ и $R_2(z)$ заданы уравнениями

$$R_1(z, \varphi) = R(z) - (R(z) - R(z_1))^n f(\varphi), \quad R_2(z) = R(z),$$

где $R(z)$ произвольная непрерывная дважды дифференцируемая функция.

При $n = 1$ выполняется условия (1), при $n = 2$ выполняются условия (1) и (2), а при $n = 3$ выполняются условия (1)-(3).

Примером применения технологии сопряжения поверхностей при создании эскизных архитектурных проектов может служить реализация призового эскизного предложения реконструкции телевизионной башни г. Екатеринбурга «Глобальный маяк» (рис.1), выполненного в рамках Международного конкурса с участием более чем восьмидесяти ведущих зарубежных и российских архитекторов.



Рис. 1. Призовой проект реконструкции телебашни г. Екатеринбурга, 2013год.

В парадигме математического дизайна концепция модели Глобального маяка включает создание узнаваемого образа традиционного маяка в виде ограниченной в основании конической башни с горловиной, несущей на своей вершине световое оборудование. Инструментами в ее создании вместо традиционного или виртуального карандаша являются аналитические выражения – формулы, которые связаны между собой в логической последовательности и формируют нужный образ.

При создании математической модели башни ее форма ищется в виде волнообразной поверхности переноса, образованной вертикальным движением непрерывного изменяющегося фигурного каркаса. Фигурный каркас, задающий форму горизонтального сечения башни, при этом плавно переходит в окружность при достижении заданной высоты. Образующая кривая (каркас) в математической модели задается уравнением «розы» (кривой Гвидо Гранди) [15,16], а профиль башни формирует кубическая парабола. В окончательном виде математическая модель башни принимает вид:

$$\begin{aligned} x(z, \varphi) &= (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2 m\varphi) \cos \varphi, & 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ y(z, \varphi) &= (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2 m\varphi) \sin \varphi; \\ x(z, \varphi) &= R(z) \cos \varphi, & h \leq z \leq H, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ y(z, \varphi) &= R(z) \sin \varphi; \end{aligned}$$

где $R(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$, h – высота перехода от фигурного сечения к круглому, H – высота башни, m, a, a_0, a_1, a_2, a_3 – параметры математической модели, связанные с конструктивными параметрами башни.

Графический образ получаемой в результате геометрического моделирования с сопряжением поверхностей представлен на рис.2

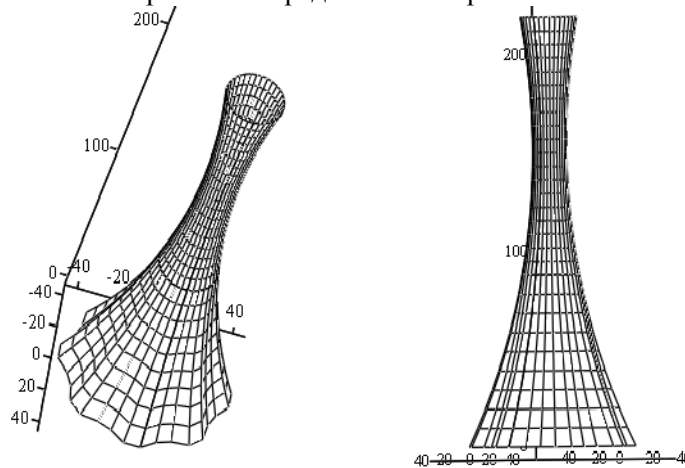


Рис. 2. Сопряжение поверхностей в геометрической модели Глобального маяка.

Предусмотренное математической моделью применение торсионного преобразования [17]

$$\begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{z}{h} \varphi & -\sin \frac{z}{h} \varphi & 0 \\ \sin \frac{z}{h} \varphi & \cos \frac{z}{h} \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(u, v) \\ y'(u, v) \\ z'(u, v) \end{pmatrix}$$

позволяет выполнить необходимую коррекцию с целью достижения большей архитектурной выразительности Глобального маяка – созданию динамического эффекта зарождающегося смерча. Графический образ получаемой в результате торсионного преобразования представлен на рис.3.

Конструктивными параметрами Глобального маяка являются: 1. Высота. 2. Максимальный радиус основания. 3. Количество граней. 4. Амплитуда волны фигурного профиля в основании. 5. Радиус верхнего среза. 6. Высота до горловины. 7. Радиус горловины. 8. Угол наклона касательной к образующей в основании башни. 9. Высота перехода от фигурного сечения к круглому. 10. Погонный угол закручиваний маяка вокруг вертикальной оси.

Введенные десять параметров позволяют создать зрительный образ изящной конструкции, наследующей (поглощающей) образ бывшей телебашни, удовлетворяющий необходимым эстетическим (образ маяка) и техническим требованиям (площадь помещений $\approx 70\,000 \text{ м}^3$).

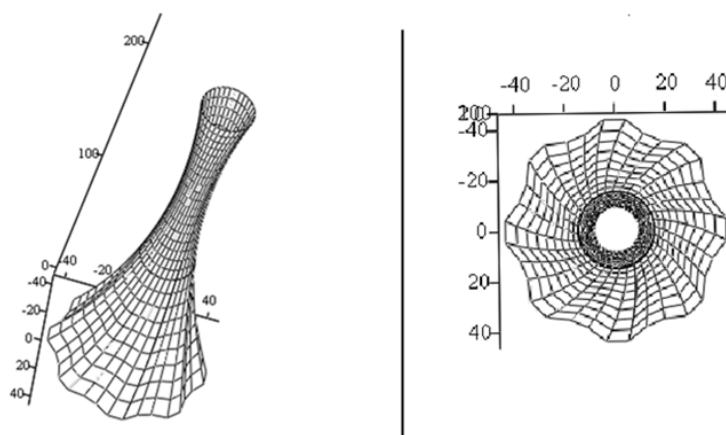


Рис. 3. Геометрическая модель Глобального маяка после торсионного преобразования

Л и т е р а т у р а

1. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 560 с.
2. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование. – М.: Изд-во Физико-математической литературы. – 2002. – 472 с.
3. *Rifkat I. Nabiyeu, Rushan Ziatdinov.* A mathematical design and evaluation of Bernstein-Bézier curves' shape features using the laws of technical aesthetics // *Mathematical Design & Technical Aesthetics.* – 2014. – Vol. 2/1. – P. 6-13.
4. *Krivoshapko S.N.* Geometry and strength of general helicoidal shells// *Applied Mechanics Reviews.* – Vol.52. – No 5. – May 1999. – P. 161-175.
5. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Классификация циклических поверхностей// *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* – 2006. – № 2. – С. 25-34.
6. *Иванов В.Н.* Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса// *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* – 2007. – № 4. – С. 5-10.
7. *Митюшов Е.А.* Геометрическое моделирование пространственных конструкций / Е.А. Митюшов, З.В. Беляева. – LAP Lambert Academic Publishing. – 2011. – 134 p.
8. *Пашин В.М.* Оптимизация судов / В.М. Пашин - Л.: Судостроение, 1983. – 296с.
9. *Базилевский, Ю.С.* Проектирование формы корпуса судна/ Ю.С. Базилевский, Н.А. Вальдман, И.О. Мизин, Г.В. Савинов// *Судостроение.* – 1996. – №1. – С. 3-7.
10. *Карпов. П.П.* Аналитическое описание судовых обводов /П.П. Карпов // Исследования по вопросам повышения эффективности судостроения и судоремонта. – Владивосток: ДВГТУ, 2006. – Вып. 46. – С. 160 - 164.
11. *Битюков Ю.И., Калинин В.А., Токсанбаев М.С., Литвинов В.Б.* Создание модели поверхности вентиляторной лопасти для перспективного двигателя нового поколения // *Авиационная промышленность.* – 2007. – №2. – С. 7-11.
12. Рекомендации. САПР. Типовые методы геометрического моделирования объектов проектирования. Р 50-34-87 / М: Государственный комитет СССР по стандартам, 1988, дата введения 01.01.1989, дата актуализации 01.12.2013. – С.113
13. *Куреннов Д.В., Партин А.С.* Алгоритм гладкого сопряжения поверхностей // *Программные продукты и системы.* – 2009. – №3. – С. 62-64.
14. *Муфтеев В.Г., Марданов А.Р.* Изогометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по базовым критериям плавности // *Науковi праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка»,* вып. 10 (153), Донецк, ДонНТУ. – 2009. – С.131-145.
15. *Савёлов А.А.* Плоские кривые: Систематика, свойства, применение: Справочное руководство. – М.: URSS. – 2010. – 296 с.

16. Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Применение нормальных поверхностей в графическом дизайне и проектировании виражей горок и санных трасс // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 4. – С. 3 -9.

17. Мисюра Н.Е., Жилин С.С. Матрицы торсионных преобразований // Сборник статей XII Международной научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире». – Новосибирск: СибАк. – 2013. – С. 92 -102.

References

1. Krivoshapko, SN, Ivanov, VN (2010). *Encyclopedia of Analytic Surfaces*. M.: Knizhniy dom "LIBROCOM", 560 p.
2. Golovanov, NN (2002). *Geometric Modeling*. M.: Izd-vo FML, 472 p.
3. Rifkat, I, Nabyev, Rushan, Ziatdinov (2014). A mathematical design and evaluation of Bernstein-Bézier curves' shape features using the laws of technical aesthetics. *Mathematical Design & Technical Aesthetics*, Vol. 2/1, p. 6-13.
4. Krivoshapko, SN (1999). Geometry and strength of general helicoidal shells. *Applied Mechanics Reviews*, Vol.52, No 5, p. 161-175.
5. Krivoshapko, SN, Ivanov, VN (2006). Classification of cyclic surfaces. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 2, p. 25-34.
6. Ivanov, VN (2007). Architectural compositions based on surfaces of Coons. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Building*, № 4, p. 5-10.
7. Mityushov, EA, Belyaev, ZV (2011). *Geometric Modeling of Spatial Structures*. LAP Lambert Academic Publishing, 134 p.
8. Pashin, VM (1983). *Optimization of Ships*. L.: Shipbuilding, 296 p.
9. Bazilevsky, YS, Wal'dman, NA, Mizin, IO, Savinov, GV (1996). Design of the form of the hull. *Shipbuilding*, №1, p. 3-7.
10. Karpov, PP (2006). Analytical description of ship contours. *Issledovaniya po voprosam povysheniya effektivnosti sudostroeniya i sudoremonta, Vladivostok: FESTU*, p. 160 - 164.
11. Bityukov, YI, Kalinin, VA, Toksanbaev, MS, Litvinov, VB (2007). Creating of a surface of model of fan blade for a new generation of advanced engine. *Aviatzionnaya Promyshlennost*, №2, p. 7-11.
12. Recommendation. CAD. Typical methods of geometric modeling design objects. R 50-34-87. M: USSR State Committee on Standards, 1988, the date of introduction of 01.01.1989, 01.12.2013 Date of update, p.113
13. Kurennov, DV, Partin, AS (2009). Algorithm for smooth mating surfaces. *Programmie Produkty i Sistemy*. № 3, p. 62-64.
14. Mufteev, VG, Mardanov, AR (2009). Isogeometric modeling of curves and surfaces of high quality on the basic criteria of smoothness. *Naukovi pratsi Donetskogo natsionalnogo tehniknogo universiteta*, Seriya "Informatika, kibernetika ta obchislyuval'na tehnika", Donetsk: DonNTU, Vol. 10 (153), p. 131-145.
15. Savyolov, AA (2010). *Plane curves: Systematics, properties and application: Reference Guide*. M.: Izd-vo URSS, 296 p.
16. Misyura, NE, Mityushov, EA (2014). The application of normal surfaces in graphic design and in construction of roller coaster and bends toboggan runs. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, p. 3 -9
17. Misyura, NE, Zhilin, SS (2013). Matrixes of torsion transformations. *Collection of Papers of XIIIth International Scientific-and-Practical Conference "Natural and Mathematical Sciences in the Modern World"*, Novosibirsk: SibAk, p. 92 -10.

ALGORITHM OF JOINT OF SECTIONS OF THE REGULAR SMOOTH SURFACES

*MISYURA N.E., **ZHILIN S.S.

*the Ural Federal University named after the first Russian president B.N. Eltzin,

**Expert-development

This paper presents the method of joint of smooth analytic surfaces and an example of its application in architecture is given. This method is demonstrated on the mating surface of revolution formed by the generatrix curve in the form of a cubic parabola and the translation surface formed of the curve in the form of Guido Grandi. The same example shows torsion shaping for giving of a dynamic effect, and a matrix of torsion transformation is presented.

KEYWORDS: Mathematical modeling in architecture, interfacing of analytic surfaces, shaping torsion, torsion transformation matrix