

Расчет конструкций из композитных материалов

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛИТ С АРМИРУЮЩИМ СЛОЕМ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

О.В. ИНОЗЕМЦЕВА, канд. техн. наук, доцент

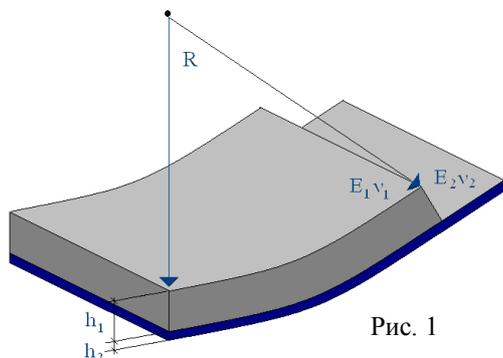
А.С. ИГНАТЬЕВ, ассистент

Саратовский государственный технический университет,
410054, Саратов, ул. Политехническая, 77

В статье представлена кинематическая модель деформации двухслойной плиты с армирующим слоем из композитного материала. Модель рассматривает деформации поперечного сечения одного из слоев двухслойной пластины, таким образом деформация другого слоя подчиняется классической гипотезе прямых нормалей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: двухслойная пластина, модели изменения, модель прямых нормалей.

Внешнее армирование изгибаемых плитных конструкций выполняется из материала, имеющего значительную прочность при растяжении, и модуль упругости, превышающий модуль упругости основного материала плиты. К материалам, обеспечивающим эффективное выполнение внешнего армирования, относятся новые современные наноструктурированные материалы типа углепластика УОЛ 300. Его нормативная прочность при растяжении составляет 3155 МПа. Модуль упругости равен 240 ГПа. Этот материал в виде лент наклеивается на растянутой зоне изгибаемого элемента, образуя композитный слой. Таким образом, получается расчетная схема изгибаемого элемента в виде двухслойной плиты средней толщины (рис. 1).



Особенность работы композитного слоя внешнего армирования плиты обусловлена различием жесткостных свойств в продольном и поперечном направлениях. В продольном направлении жесткостные свойства композитного слоя создаются армирующим материалом (углепластиком), а в поперечном направлении сдвиговая жесткость создается клеевым связующим.

Такой композитный слой отличается высокой жесткостью в продольном направлении и относительно низкой сдвиговой жесткостью в поперечном направлении. Материал основного слоя двухслойной плиты будем считать изотропным. Указанные обстоятельства требуют построения соответствующей уточненной расчетной модели такой двухслойной плиты, учитывающей деформации поперечного сдвига для композитного слоя внешнего армирования (рис. 2). При этом для основного слоя двухслойной плиты принимается классическая гипотеза прямых нормалей.

Учет деформаций поперечного сдвига возможен с помощью разложения перемещений в степенной ряд по нормальной координате. Кинематическая гипотеза об изменении перемещений в эквидистантных поверхностях строится исходя из непрерывности касательных перемещений на поверхности контакта

слоев, при этом получается, касательные напряжения претерпевают разрыв при переходе через поверхность контакта.

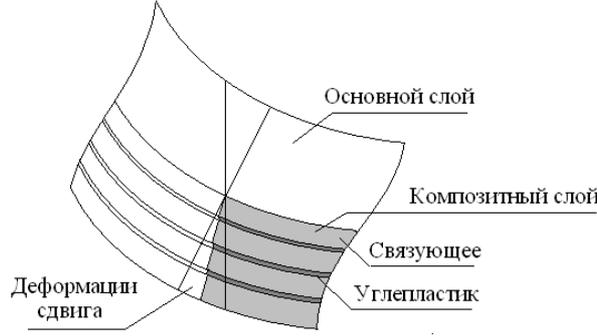


Рис. 2

Кинематическая гипотеза заключается в разложении перемещений в эквидистантных поверхностях:

$$U_i^k(x, y, z) = U_i^0(x, y) + x_3 \gamma_{0i}^k(x, y) + x_3^2 \gamma_{1i}^k(x, y) + x_3^3 \gamma_{2i}^k(x, y); \quad (i=1,2); \quad (1)$$

здесь U_i^k, U_i^0 - перемещения в эквидистантных и координатной поверхностях соответственно, γ_{ij}^k - искомые функции сдвига ($i=1,2$), k - номер слоя.

Связь деформаций с перемещениями имеет вид:

$$\xi_{ij}^k = (U_{i,j}^k + U_{j,i}^k) / 2; \quad \xi_{i3}^k = (U_{3,i}^0 + U_{i,3}^k) / 2; \quad (2)$$

здесь и в дальнейшем частные производные обозначены запятыми в индексах с последующим указанием аргументов, по которым берутся производные. Индексы i, j, k , если не оговорено, принимают значения 1 и 2.

Касательные напряжения

$$\sigma_{i3}^k = G_{i3}^k \xi_{i3}^k; \quad (3)$$

здесь G_{i3}^k - сдвиговой модуль k -го слоя.

Примем параболический закон изменения касательных напряжений справедливый даже при изгибе толстых плит. Тогда касательные напряжения на граничных поверхностях $x_3 = (-1)^k h_k$

$$\sigma_{i3}^{*k} = G_{i3}^k \xi_{i3}^k = G_{i3}^k (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^k + 2h_k \gamma_{1i}^k + 3(h_k)^2 \gamma_{2i}^k); \quad (k, i=1,2); \quad (4)$$

и совпадение закона для изменения касательных напряжений по толщине плиты с квадратной параболой позволяют записать систему восьми алгебраических уравнений относительно сдвиговых функций:

$$\begin{aligned} (-1)^k 2h_k \gamma_{1i}^k + 3(h_k)^2 \gamma_{2i}^k &= -(U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^k) + \sigma_{i3}^{*k} / G_{i3}^k; \quad (k, i=1,2); \\ 2\gamma_{1i}^k + 3\delta_i \gamma_{2i}^k &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

тогда для $\gamma_{1i}^k, \gamma_{2i}^k$ получим: $\gamma_{1i}^k = -3\delta_i \gamma_{2i}^k / 2$;

$$\gamma_{2i}^k = -\frac{1}{(h_k - (-1)^k \delta_i) 3h_k} (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^k); \quad (k, i=1,2); \quad (6)$$

С учетом (5) выражение для перемещений U_i^k примет вид (рис. 3):

$$U_i^k = U_i^0 + x_3 \gamma_{0i}^k + \left(x_3^2 \frac{3\delta_i}{2} - x_3^3 \right) \frac{1}{(h_k - (-1)^k \delta_i) 3h_k} (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^k); \quad (i=1,2); \quad (7)$$

здесь h_k толщина k -го слоя, постоянные δ_i определяют положение нейтральной поверхности и находят из условия, что при чистом изгибе двухслойной плиты усилия равны нулю:

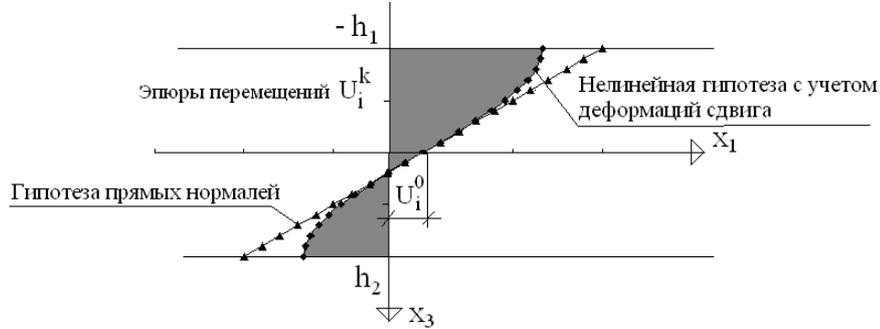


Рис. 3

$$\delta_i = \frac{B_{ii}^2(h_2)^2 - B_{ii}^1(h_1)^2}{B_{ii}^1 h_1 + B_{ii}^2 h_2}; \quad (8)$$

где $B_{ij}^k = E_i^k / (1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k)$ - коэффициенты упругости ортотропного материала, E_i^k - модуль упругости в направлении x_1 и x_2 , ν_{ij}^k ($i, j = 1, 2; i \neq j$) - коэффициенты Пуассона. На поверхностях $x_3 = \delta_i$ напряжения σ_{i3} приобретают экстремальные значения.

Будем считать, что касательные напряжения σ_{i3}^{*k} на граничных поверхностях $z = (-1)^k h_k$ отсутствуют. Тогда, разрешая (4) относительно $\gamma_{1i}^k, \gamma_{2i}^k$ и используя выражения (1) и (2) находим:

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^k = & \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^0 + U_{j,i}^0 + \left(x + \frac{\frac{3\delta_i}{2} x_3^2 - x_3^3}{(h_k - (-1)^k \delta_i) \beta h_k} \right) \gamma_{0i,j}^k + \left(x + \frac{\frac{3\delta_j}{2} x_3^2 - x_3^3}{(h_k - (-1)^k \delta_j) \beta h_k} \right) \gamma_{0j,i}^k \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{3\delta_i}{2} x_3^2 - x_3^3}{(h_k - (-1)^k \delta_i) \beta h_k} U_{3,i,j}^0 + \frac{\frac{3\delta_j}{2} x_3^2 - x_3^3}{(h_k - (-1)^k \delta_j) \beta h_k} U_{3,i,j}^0 \right]; \\ \xi_{i3}^k = & \left(1 + \frac{(\delta_i x - x_3^2)}{(h_k - (-1)^k \delta_i) h_k} \right) (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^k), \quad (i, j, k = 1, 2); \end{aligned} \quad (8)$$

Эюра деформаций сдвига по толщине симметричной двухслойной плиты показана кривой на 1 рис. 4.

Эюра деформаций сдвига по толщине несимметричной плиты (при $h_1 = h_2; 1.5E_1 = E_2$) показана кривой 2 на рис.4.

При большей несимметричности двухслойного пакета плиты (при $h_1 = h_2; 1.9E_1 = E_2$) эюра деформаций сдвига по толщине плиты приобретает более несимметричный характер, показанный кривой 3 на рис.4.

Построим кинематическую гипотезу для двухслойной плиты с изотропным слоем, описываемым на основе классической гипотезы Кирхгофа-Лява и компо-

зитным слоем, уточненной нелинейной модели с учетом деформаций поперечного сдвига:



Рис. 4

$$U_i^{(1)} = U_i^0 - x_3 U_{3,i}^0; \quad (9)$$

$$U_i^{(2)} = U_i^0 + x\gamma_{0i}^{(2)} + \left(x_3^2 \frac{3\delta_i}{2} - x_3^3 \right) \frac{1}{(h_2 - (-1)^{(2)} \delta_i) \beta h_k} (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^{(2)}) \quad (i = 1, 2);$$

тогда:
$$\xi_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^0 + U_{j,i}^0 - x_3 (U_{3,ij}^0 + U_{3,ji}^0))$$

$$\xi_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(U_{i,j}^0 + U_{j,i}^0 + \left(x_3 - \frac{x_3^3 - \frac{3\delta_i}{2} x_3^2}{(h_2 - \delta_i) \beta h_2} \right) \gamma_{0i,j}^{(2)} + \left(x_3 - \frac{x_3^3 - \frac{3\delta_j}{2} x_3^2}{(h_2 - \delta_j) \beta h_2} \right) \gamma_{0j,i}^{(2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{z^3 - \frac{3\delta_i}{2} z^2}{(h_2 - \delta_i) \beta h_2} U_{3,ij}^0 + \frac{z^3 - \frac{3\delta_j}{2} z^2}{(h_2 - \delta_j) \beta h_2} U_{3,ij}^0 \right); \right.$$

$$\xi_{i3}^{(2)} = \left(1 - \frac{z^2 - \delta_i z}{(h_2 - \delta_i) h_2} \right) (U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^{(2)}) \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (10)$$

Тогда эпюра продольных перемещений по сечению несимметричной двухслойной плиты будет иметь вид (рис.5).

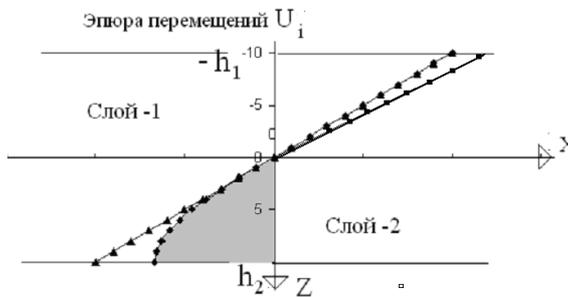


Рис. 5

Несимметрия пакета слоев обусловлена высокой сдвиговой жесткостью материала первого слоя и низкой сдвиговой жесткостью материала второго слоя. Только в этом случае поперечное сечение первого слоя при изгибе остается прямолинейным, сечение второго слоя искривляется в процессе изгибной деформации вследствие возникновения деформаций поперечного сдвига во втором

слое. Естественно, что построенные здесь эпюры носят качественный характер.

Введем обозначения:

$$t_i = \left(\frac{z^3 - 3\delta_i z^2 / 2}{(h_2 - \delta_i) 3h_2} \right); \quad l_i = \left(\frac{(z^2 - \delta_i z)}{(h_2 - \delta_i) h_2} \right); \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (11)$$

С учетом (11), получим:

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^{(1)} &= (U_{i,j}^0 + U_{j,i}^0 - zU_{3,ij}^0 - zU_{3,ji}^0) / 2; \\ \xi_{ij}^{(2)} &= (U_{i,j}^0 + U_{j,i}^0 + (z - t_i)\gamma_{0i,j}^{(2)} + (z - t_j)\gamma_{0j,i}^{(2)}) / 2 - (t_i U_{3,ij}^0 + t_j U_{3,ji}^0) / 2; \\ \xi_{i3}^{(2)} &= (1 - l_i)(U_{3,i}^0 + \gamma_{0i}^{(2)}) \quad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned}$$

Полученные выражения для деформаций соответствуют уточненной модели двухслойной пластины, один из слоев которой обладает низкой сдвиговой жесткостью.

Л и т е р а т у р а

1. *Reissner E.*, On a variational theorem in elasticity, J.Math and Phys., №2, 1950.
2. *Прусаков А.П.* Нелинейные уравнения изгиба пологих многослойных оболочек : Прикл. механика , 1976, т.7, №3, с.3-8.
3. *Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига, Зинатке, 1974, 310с.
4. *Расказов А.О.* К теории многослойных ортотропных пологих оболочек: Прикл. механика, 1976, т.12, №11, с.50-56.

KINEMATIC MODEL OF TWO-LAYER PLATES WITH THE REINFORCING LAYER FROM THE COMPOSITE MATERIAL

O.V. Inozemtseva, A.S. Ignatyev

In the article, the kinematic model of deformation of a bent two-layer plate one of which is a composite lay, having low shift rigidity is under construction. The model considers deformations of cross-section shift of one of layers of a two-layer plate, thus deformation of other layer submits to a classical hypothesis of direct normals.

KEY WORDS: two-layer plate, shift models, model of direct normals.