

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ИЖЕСТКОГО ОСНОВАНИЯ

С.Г. КУДРЯВЦЕВ, канд. техн. наук, доцент

Ю.М. БУЛДАКОВА, аспирант

Марийский государственный технический университет,  
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3.

Приводятся результаты анализа напряженного состояния в анизотропной полосе при смешанных граничных условиях. Решение задачи проводится операторным методом в сочетании с интегральным преобразованием Фурье.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: полоса, перемещения, напряжения, анизотропия.

Задача о распределении напряжений и перемещений в упругой однородной анизотропной полосе постоянной высоты  $h$ , при действии уравновешенных нагрузок и малых деформациях, решалась в ряде работ, например [1].

Рассмотрим полосу из ортотропного материала бесконечной длины. Направления осей ортотропии совпадают с координатными осями. Направим ось  $x$  вдоль нижней плоскости полосы, ось  $y$  - перпендикулярно к границе. Положительные направления нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и касательного  $\tau_{xy}$  напряжений, перемещений  $u$  и  $v$ , совпадают с обозначениями [2].

Исходя из дифференциальных уравнений равновесия, кинематических соотношений Коши, обобщенного закона Гука получим разрешающие уравнения относительно перемещений:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0, \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + s_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$s_{1,2}^2 = \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \pm \sqrt{\left( \frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{2\beta_{11}} \right)^2 - \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}}}.$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния  $\beta_{ij}=a_{ij}$ , для плоской деформации  $\beta_{ij}=a_{ij}-a_{i3}a_{j3}/a_{33}$ , где  $a_{ij}$  - коэффициенты деформации. Доказано [2], что коэффициенты  $s_1, s_2$  не могут быть чисто мнимыми числами. Возможны следующие три варианта: а)  $s_1 \neq s_2$ ; б)  $s_1 = s_2 = s$ ; в)  $s_1, s_2$  - комплексные числа.

Используя операторный метод [3], проинтегрируем уравнения (1), например, для варианта  $s_1 \neq s_2$ , тогда

$$\begin{cases} u = \cos s_1 y \partial \cdot C_1(x) + \sin s_1 y \partial \cdot C_2(x) + \cos s_2 y \partial \cdot C_3(x) + \sin s_2 y \partial \cdot C_4(x), \\ v = \cos s_1 y \partial \cdot B_1(x) + \sin s_1 y \partial \cdot B_2(x) + \cos s_2 y \partial \cdot B_3(x) + \sin s_2 y \partial \cdot B_4(x), \end{cases} \quad (2)$$

где  $C_i(x), B_i(x)$ - произвольные функции интегрирования, а производная по  $x$  обозначена через  $\partial (\partial = \partial/\partial x)$ .

Точки в (2) и последующих выражениях отделяют дифференциальные операторы от функций, к которым они применяются.

Функции перемещений при интегрировании уравнений (1) для двух других вариантов параметров  $s_1, s_2$  записываются в аналогичной форме.

Обозначим на нижней плоскости полосы функции перемещений

$u(x,y=0)=u_0(x)$ ,  $v(x,y=0)=v_0(x)$ , функции напряжений  $\sigma_y(x,y=0)=q_0(x)$ ,  $\tau_{xy}(x,y=0)=\tau_0(x)$ . Используя указанные обозначения, определим произвольные функции интегрирования и составим выражения для перемещений:

$$\begin{aligned} \mu u = & -(\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \cdot u_0 + \left( \frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot v_0 + \\ & + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} q_0 + \left( \frac{\mu_1^2}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2^2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \frac{1}{\partial} \tau_0, \quad (3) \\ \mu v = & (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \cdot u_0 + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot v_0 - \\ & - (s_1 \mu_2^2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1^2 \sin s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} q_0 + \mu_1 \mu_2 (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \frac{1}{\partial} \tau_0, \end{aligned}$$

и напряжений:

$$\begin{aligned} \mu \sigma_x = & (s_1^2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \cos s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 - (s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \partial v_0 - \\ & - (s_1^2 \mu_2 \cos s_1 y \partial - s_2^2 \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot q_0 - (s_1 \mu_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \tau_0, \\ \mu \sigma_y = & -(\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 + \left( \frac{1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{1}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \partial v_0 + \quad (4) \\ & + (\mu_2 \cos s_1 y \partial - \mu_1 \cos s_2 y \partial) \cdot q_0 + \left( \frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 y \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 y \partial \right) \cdot \tau_0, \\ \mu \tau_{xy} = & -(s_1 \sin s_1 y \partial - s_2 \sin s_2 y \partial) \cdot \partial u_0 - (\cos s_1 y \partial - \cos s_2 y \partial) \cdot \partial v_0 + \\ & + (s_1 \mu_2 \sin s_1 y \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 y \partial) \cdot q_0 - (\mu_1 \cos s_1 y \partial - \mu_2 \cos s_2 y \partial) \cdot \tau_0, \end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \beta_{12} - \beta_{11} \cdot s_1^2, \quad \mu_2 = \beta_{12} - \beta_{11} \cdot s_2^2, \quad \mu = \mu_2 - \mu_1 = \beta_{11} \cdot (s_1^2 - s_2^2).$$

На каждой из двух плоскостей полосы могут быть заданы или поверхностные нагрузки, или перемещения, или одна составляющая напряжения и одна проекция перемещения. Данных условий достаточно для определения функций перемещений  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$  и напряжений  $q_0(x)$ ,  $\tau_0(x)$ .

Выражения для перемещений и напряжений в полосе из изотропного материала [4] получим, принимая в уравнениях (3) и (4) значения  $s_1 = s_2 = 1$ .

Определим, используя уравнения (3) и (4), напряжения и перемещения в полосе, скрепленной с жестким основанием.

Пусть на верхней плоскости полосы действуют поверхностные нагрузки  $q(x)$  и  $\tau(x)$ . Считаем, что интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau(x)| dx$  ограничены. Полагая в выражениях (4) для  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  значение  $y=h$ , функции  $u_0(x)=v_0(x)=0$ , получим систему двух уравнений относительно неизвестных  $q_0(x)$  и  $\tau_0(x)$ . Выполнив преобразования, найдем

$$\begin{aligned} q_0(x) = & \frac{2\mu s_1 s_2}{\tilde{D}} \left[ (\mu_1 \cos s_1 h \partial - \mu_2 \cos s_2 h \partial) \cdot q(x) + \left( \frac{\mu_1}{s_1} \sin s_1 h \partial - \frac{\mu_2}{s_2} \sin s_2 h \partial \right) \cdot \tau(x) \right], \\ \tau_0(x) = & \frac{2\mu s_1 s_2}{\tilde{D}} \left[ (s_1 \mu_2 \sin s_1 h \partial - s_2 \mu_1 \sin s_2 h \partial) \cdot q(x) + (\mu_2 \cos s_1 h \partial - \mu_1 \cos s_2 h \partial) \cdot \tau(x) \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & 4\mu_1\mu_2s_1s_2 + (s_1 - s_2)(s_1\mu_2^2 - s_2\mu_1^2)\cos(s_1 + s_2)h\partial - \\ & - (s_1 + s_2)(s_1\mu_2^2 + s_2\mu_1^2)\cos(s_1 - s_2)h\partial. \end{aligned}$$

Предполагаем, что существуют интегральные преобразования Фурье от функций  $q(x)$  и  $\tau(x)$ . Разделим функции  $q(x)$ ,  $\tau(x)$  на симметричные  $q_s(x)$ ,  $\tau_s(x)$  и кососимметричные  $q_a(x)$ ,  $\tau_a(x)$  составляющие [5]. Тогда

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) + i\tilde{q}_a(\tilde{\lambda})] \cdot e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \\ \tau_x(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\tau}_s(\tilde{\lambda}) + i\tilde{\tau}_a(\tilde{\lambda})] \cdot e^{-i\tilde{\lambda}x} d\tilde{\lambda}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad \tilde{q}_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx, \\ \tilde{\tau}_s(\tilde{\lambda}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_s(x) \cos(\tilde{\lambda}x) dx, \quad \tilde{\tau}_a(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_a(x) \sin(\tilde{\lambda}x) dx, \end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}$  - любое положительное вещественное число.

Подставим соотношения(5),(6) в выражения (3) и (4). Воздействуем дифференциальными операторами на функции  $q(x)$ ,  $\tau(x)$  и, учитывая, что перемещения и напряжения являются действительными величинами, получим формулы для определения перемещений и напряжений.

Рассмотрим случай, когда на верхней плоскости в сечении  $x=0$  действует сила перпендикулярно границе. Сила равномерно распределена вдоль прямой параллельной оси  $z$ , а ее интенсивность равна  $(-F)$ . При симметричной нагрузке  $q_a(x)=0$ . Трансформанта Фурье от сосредоточенной силы

$$\tilde{q}_s(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(-F) \cos \tilde{\lambda}x dx = -\frac{F}{\sqrt{2\pi}}, \quad (7)$$

здесь  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Используя выражения (4), (5), (6) и (7), найдем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \int_0^{\infty} \left[ A_1(s)(s_1^2\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - s_2^2\mu_1chs_2\lambda\tilde{y}) - A_2(s)(s_1\mu_1shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_2shs_2\lambda\tilde{y}) \right] \frac{\cos(\lambda\tilde{x})}{D} d\lambda, \\ \tilde{\sigma}_y &= -\int_0^{\infty} \left[ A_1(s)(\mu_2chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_1chs_2\lambda\tilde{y}) - A_2(s) \left( \frac{\mu_1}{s_1}shs_1\lambda\tilde{y} - \frac{\mu_2}{s_2}shs_2\lambda\tilde{y} \right) \right] \frac{\cos(\lambda\tilde{x})}{D} d\lambda, \quad (8) \\ \tilde{\tau}_{xy} &= \int_0^{\infty} \left[ A_1(s)(s_1\mu_2shs_1\lambda\tilde{y} - s_2\mu_1shs_2\lambda\tilde{y}) - A_2(s)(\mu_1chs_1\lambda\tilde{y} - \mu_2chs_2\lambda\tilde{y}) \right] \frac{\sin(\lambda\tilde{x})}{D} d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x\pi h}{F}, \quad \tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y\pi h}{F}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}\pi h}{F}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \lambda = \tilde{\lambda}h, \\ A_1(s) &= \mu_1chs_1\lambda - \mu_2chs_2\lambda, \quad A_2(s) = s_1\mu_2shs_1\lambda - s_2\mu_1shs_2\lambda, \end{aligned}$$

$$D = \frac{1}{2s_1s_2} \left[ 4\mu_1\mu_2s_1s_2 + (s_1 - s_2)(s_1\mu_2^2 - s_2\mu_1^2)ch(s_1 + s_2)\lambda - (s_1 + s_2)(s_1\mu_2^2 + s_2\mu_1^2)ch(s_1 - s_2)\lambda \right]$$

Формулы (8) при  $s_1=s_2=1$  совпадают с выражениями напряжений, приведенными в [6] для полосы из изотропного материала.

На рисунках 1 и 2 представлены результаты численного расчета изменения безразмерного параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  в зависимости от характеристик материала и величины  $\tilde{y}$ . Количественная и качественная картина показана для полосы в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (ширина полосы  $b=1$ ). Кривая 1 соответствует изотропному материалу (коэффициент Пуассона  $\nu=0,25$ ). Кривые 2 и 3 построены для слоистого стеклопластика ортогонального армирования при значениях упругих постоянных  $E_1=3,68 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2=2,68 \cdot 10^4$  МПа,  $G_{12}=5 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_1=0,105$  приведенных в [2]. Цифрой 2 отмечены кривые, когда наибольшее значение модуля упругости направлено по оси  $x$ , цифрой 3 – по  $y$ .

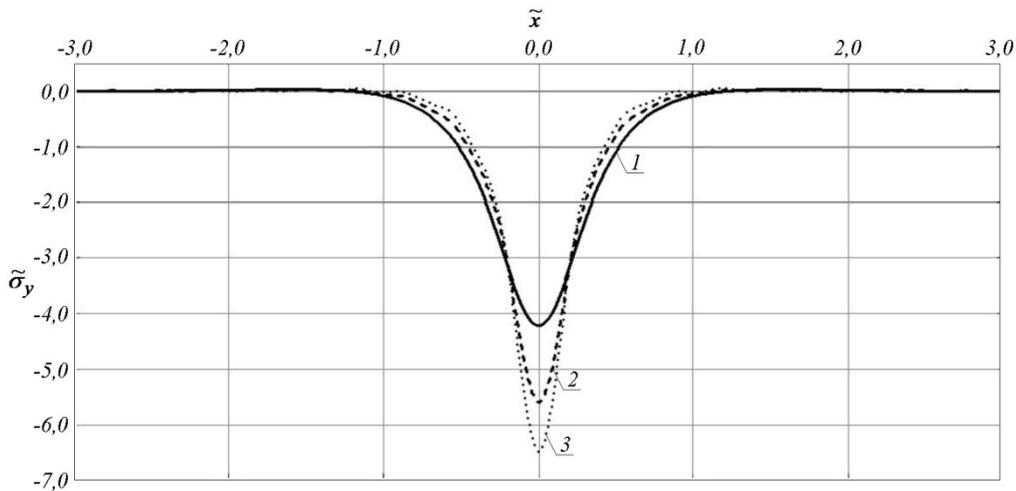


Рис. 1. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0,5$ )

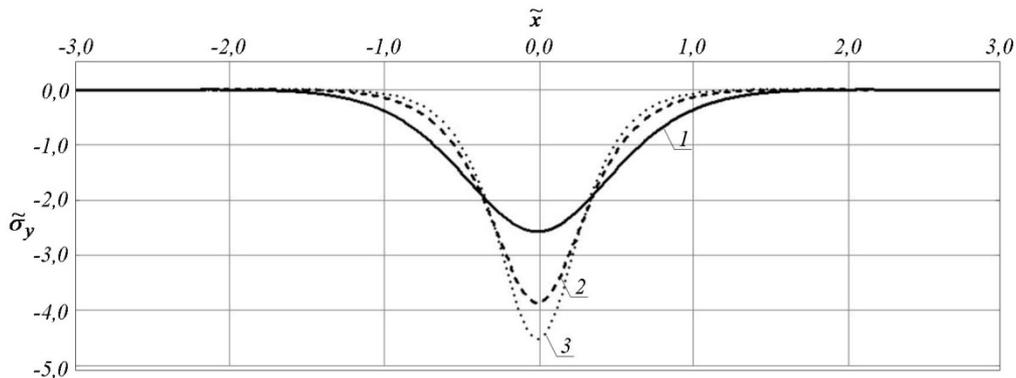


Рис. 2. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0$ )

Видно, что значения  $\tilde{\sigma}_y$  для стеклопластика в сечении  $\tilde{x}=0$  больше, чем для изотропного материала. Зона распространения  $\tilde{\sigma}_y$  по длине полосы для стеклопластика меньше. С увеличением параметра  $\tilde{y}$  величина  $\tilde{\sigma}_y$  при  $\tilde{x}=0$  возрастает для обоих материалов, а область распространения по оси  $\tilde{x}$  уменьша-

ется. Из сравнения кривых 2 и 3 следует, что значения параметра  $\tilde{\sigma}_y$  получаются меньше, если направление наибольшего значения модуля упругости перпендикулярно приложенной к полосе нагрузке.

На рисунке 3, в увеличенном масштабе, показан график изменения параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  при  $\tilde{y}=0,5$ . При значениях, указанных на рисунке, параметр  $\tilde{\sigma}_y=0$ , а далее сжатие сменяется растяжением.

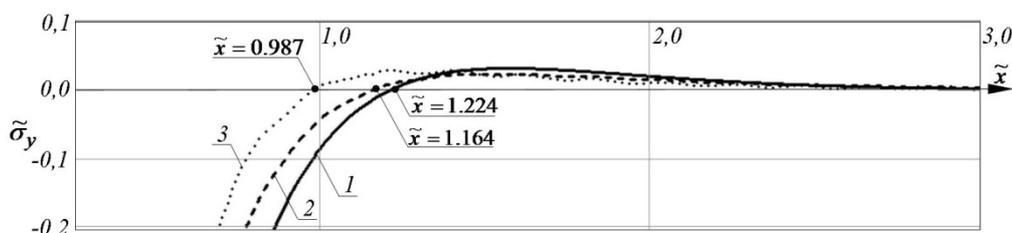


Рис. 3. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0,5$ )

Графики изменения параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_x$  по высоте полосы и разных значениях  $\tilde{x}$  представлены на рис. 4. При  $\tilde{y}=1$  в области, примыкающей к линии действия силы, параметр  $\tilde{\sigma}_x$  имеет отрицательные значения, которые, при определенном значении  $\tilde{x}$ , меняются на положительные. Для изотропного материала (кривая 1) параметр  $\tilde{\sigma}_x=0$  при значении  $\tilde{x}=0,278$ . Параметр  $\tilde{\sigma}_x$  для анизотропного материала (кривые 2 и 3) принимает на верхней плоскости полосы значения равные нулю при  $\tilde{x}=0,268$  и  $\tilde{x}=0,263$ , соответственно.

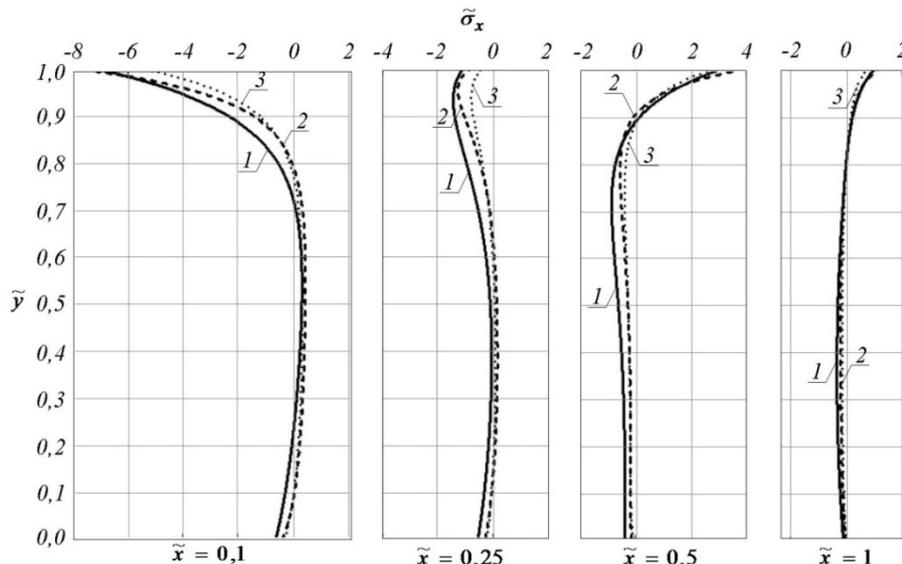


Рис.4. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_x$  по высоте полосы и разных значениях параметра  $\tilde{x}$

На рисунках 5 ибпоказаны результаты расчета изменения параметра касательного напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по длине полосы. Нумерация кривых соответствует обозначениям на предыдущих графиках. Сравнивая кривые, заключаем, что значения параметра  $\tilde{\tau}_{xy}$  и область его распространения по оси  $x$  для стеклопла-

стика меньше, чем у изотропного материала. Максимальное значение  $\tilde{\tau}_{xy}$  для стеклопластика смещается к линии приложения силы.

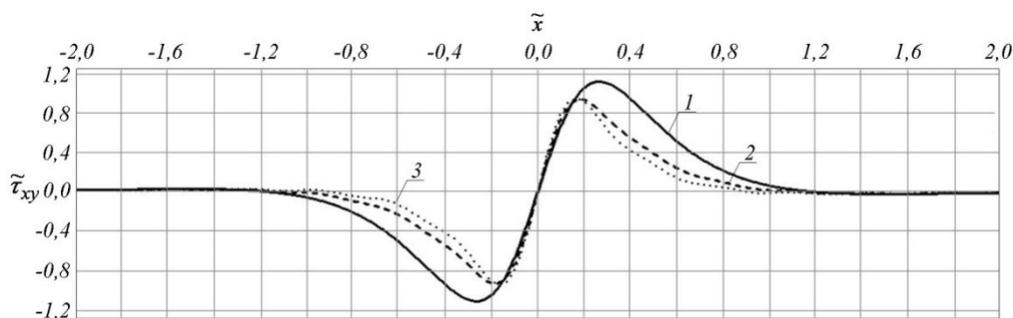


Рис. 5. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0,5$ )

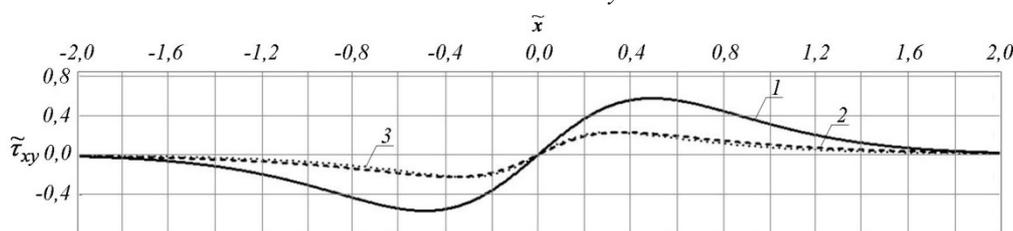


Рис. 6. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0$ )

Графики изменения параметра касательного напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по высоте полосы и разных значениях  $\tilde{x}$  представлены на рисунке 7.

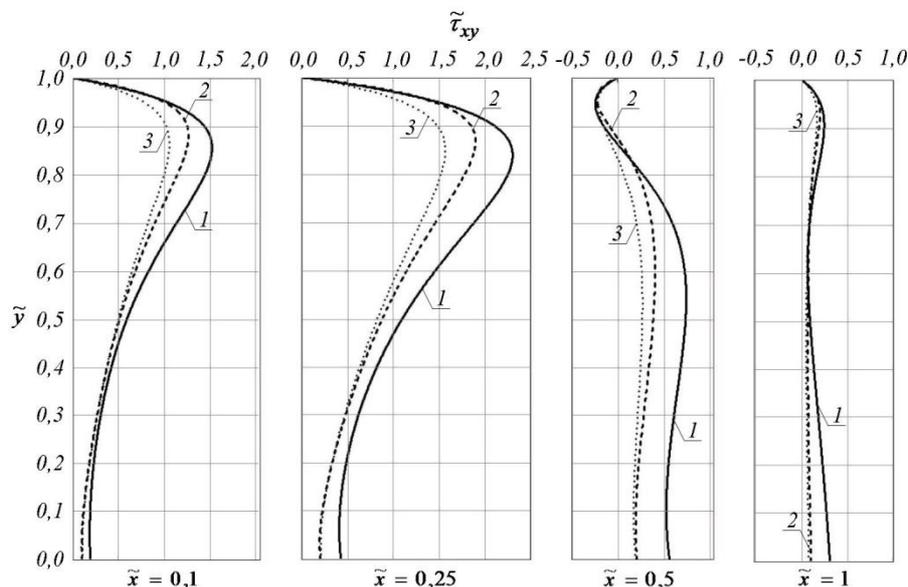


Рис. 7. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по высоте полосы и разных значениях параметра  $\tilde{x}$

Используя предложенный метод, можно проанализировать характер напряженного и деформированного состояния при других вариантах поверхностной нагрузки. Например, на рисунках 8 и 9 представлен характер изменения параметров нормального  $\tilde{\sigma}_y$  и касательного  $\tilde{\tau}_{xy}$  напряжений по длине полосы

при  $\tilde{y}=0,5$ , когда в сечении  $\tilde{x}=0$  приложена, в положительном направлении оси  $\tilde{x}$ , сосредоточенная сила  $T$ , касательная к границе верхней плоскости. Графики построены в безразмерных параметрах:

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{\sigma_y \pi h}{T}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} \pi h}{T}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{h}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}.$$

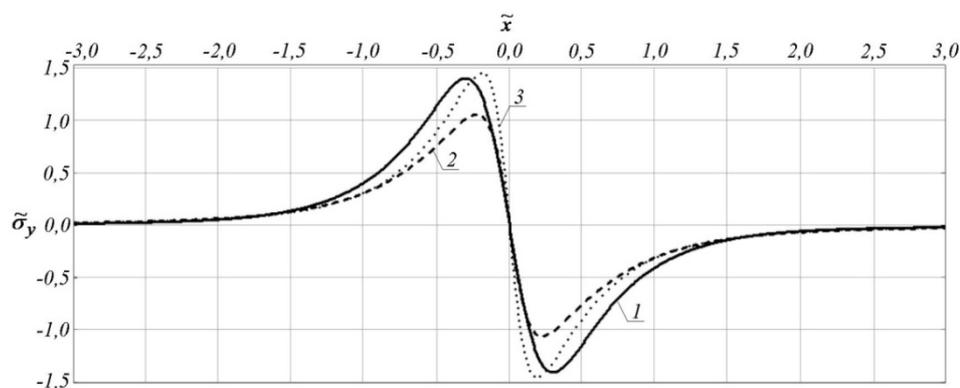


Рис. 8. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\sigma}_y$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0,5$ )

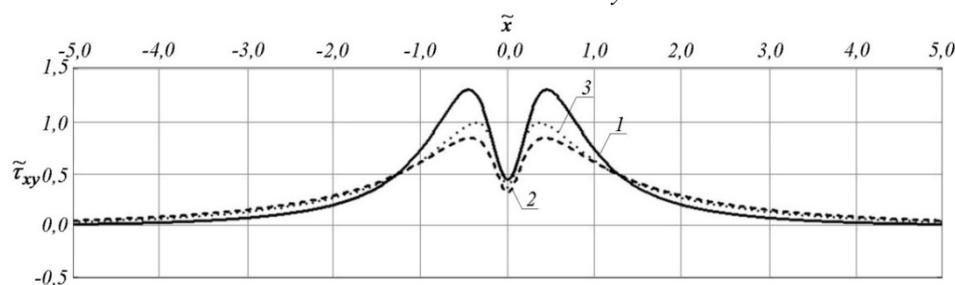


Рис. 9. Изменение параметра напряжения  $\tilde{\tau}_{xy}$  по длине полосы ( $\tilde{y}=0,5$ )

Учитывая формулы [2], для преобразования упругих постоянных при повороте координатных осей, несложно получить решение при несовпадении осей ортотропии материала с выбранной системой координат.

#### Литература

1. Лехницкий, С.Г. К задаче об упругом равновесии анизотропной полосы // Прикладная математика и механика. – 1963. – вып. 1. – С. 142-149.
2. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. - 416 с.
3. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. - М.: Наука, 1970. - 940 с.
4. Власов, В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – 492 с.
5. Новацкий, В. Теория упругости / В.Новацкий. - М.: изд-во «Мир», 1975. – 872 с.
6. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С. Уфлянд. - М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1963. – 368 с.

### INTERACTION OF ANISOTROPIC BAND AND RIGID BASE

Kudryavtsev S.G., Buldakova Yu.M.

The results of the analysis of the stress state in an anisotropic band with mixed boundary conditions are given. Problem solution is carried out by an operational method in combination with the integral Fourier transform.

KEY WORDS: band, displacements, stresses, anisotropy.