

Теория упругости

ПРИЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ К РАСЧЕТУ ПЛИТ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С РАЗЛИЧНЫМИ СРЕДАМИ

С. П. ИВАНОВ, докт. техн. наук, профессор

О. Г. ИВАНОВ, канд. техн. наук, доцент; М. Н. АХМЕТШИН, аспирант

Марийский государственный технический университет,

424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, дом 3.

Разработана методика решения физически нелинейной пространственной задачи теории упругости в перемещениях. Представлено приложение данной методики к расчету плит, взаимодействующих со средой, имеющих нелинейную диаграмму деформирования. Приведен пример расчета плиты.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пространственная задача, нелинейность, плита.

Получим уравнения для решения физически нелинейной пространственной задачи в перемещениях, и приложим их для составления уравнений изгиба плит, взаимодействующих с различными средами.

Роль такой среды могут выполнять различные материалы (бетон, композиты, в частности некоторые виды оснований и т. п.). Известно, из теории малых упругопластических деформаций, согласно теореме [1, 2] зависимость между

интенсивностями напряжений σ_i и деформаций e_i можно принять в виде полинома

$$\sigma_i = Ee_i - E_1 e_i^3, \quad (1)$$

где E и E_1 – некоторые постоянные, определяемые из экспериментальных данных. Для вывода уравнений используем известные соотношения между перемещениями и деформациями для среды:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

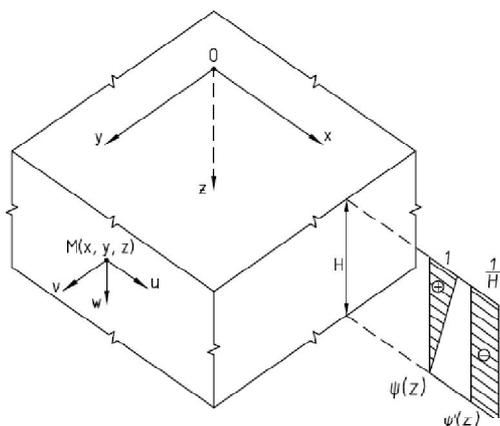


Рис. 1. Виды перемещений точки, графики координатной функции и ее производной

где

$u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$ – перемещения точки среды соответственно в направлениях осей координат x, y, z (рис. 1).

Запишем выражение для интенсивности деформаций

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{2(1+\nu)}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (3)$$

Определим удельную энергию для системы [2]:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{2}{3} \int_0^{e_i} (1+\nu) \sigma_i \cdot de_i, \quad (4)$$

где $K = \frac{E_0}{3 \cdot (1-2\nu)}$ – модуль объемного сжатия; $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – объемная деформация; ν – коэффициент Пуассона.

Перемещения запишем в виде разложений [3]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_i U_i(x, y) \cdot \varphi_i(z); (i = 1, 2, 3, \dots, m); \\ v(x, y, z) &= \sum_d V_d(x, y) \cdot \lambda_d(z); (d = 1, 2, 3, \dots, e); \\ w(x, y, z) &= \sum_k W_k(x, y) \cdot \psi_k(z); (k = 1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \quad (5)$$

где $U_i(x, y), V_d(x, y)$ и $W_k(x, y)$ – обобщенные функции перемещений, а $\varphi_i(z), \lambda_d(z)$ и $\psi_k(z)$ – координатные функции выбираются по физическому смыслу задачи. Запишем выражения полной энергии для системы, состоящей из работы внутренних и внешних сил p_x, q_y, q_z , действующих на систему в направлении x, y, z

$$\Pi = \iiint (\Phi - p_x u - q_y v - q_z w) dx dy dz. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (6) получим энергию Π , выраженную через обобщенные перемещения и их производные.

Определим минимум полной энергии, используя уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial U_{i,x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial U_{i,y}} - \frac{\partial F}{\partial U_i} &= 0; & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial V_{d,x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial V_{d,y}} - \frac{\partial F}{\partial V_d} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial W_{k,x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial W_{k,y}} - \frac{\partial F}{\partial W_k} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где F – подынтегральная функция выражения (6); индексы после запятой показывают частные производные по указанным переменным.

Раскрывая уравнения (7), получим:

$$\begin{aligned} &\sum_i a_{ji} \cdot \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 U_i}{\partial y^2} \right) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_i b_{ji} \cdot U_i + \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_d t_{jd} \frac{\partial^2 V_d}{\partial y \partial x} + \\ &+ \sum_k \left(\frac{\nu}{1-\nu} d_{jk} - \frac{1}{2(1-\nu)} c_{jk} \right) \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} p_j = \Phi_j^{нел}, (j = 1, 2, 3, \dots, m); \\ &\sum_d m_{\xi d} \cdot \left(\frac{\partial^2 V_d}{\partial y^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 V_d}{\partial x^2} \right) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_d n_{\xi d} \cdot V_d + \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_i t_{\xi i} \frac{\partial^2 U_i}{\partial y \partial x} + \\ &+ \sum_k \left(\frac{\nu}{1-\nu} t_{\xi k} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k_{\xi k} \right) \frac{\partial W_k}{\partial y} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q_\xi = \Phi_\xi^{нел}, (\xi = 1, 2, 3, \dots, e); \\ &- \sum_i \left(\frac{\nu}{1-\nu} d_{hi} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} c_{hi} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x} - \sum_d \left(\frac{\nu}{1-\nu} l_{hd} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k_{hd} \right) \frac{\partial V_d}{\partial y} + \\ &+ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_k r_{hk} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) - \sum_k s_{hk} \cdot W_k + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q_h = \Phi_h^{нел}, \\ &(h = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты линейной части уравнений (8) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{ji} &= a_{ij} = \int_z \varphi_j \cdot \varphi_i \cdot dz; & b_{ji} &= b_{ij} = \int_z \varphi'_j \cdot \varphi'_i \cdot dz; & c_{jk} &= \int_z \varphi'_j \cdot \psi_k \cdot dz; \\
d_{jk} &= \int_z \varphi_j \cdot \psi'_k \cdot dz; & r_{hk} &= r_{kh} = \int_z \psi_h \cdot \psi_k \cdot dz; & s_{hk} &= s_{kh} = \int_z \psi'_h \cdot \psi_k \cdot dz; \\
k_{hd} &= \int_z \psi_h \cdot \lambda'_d \cdot dz; & l_{hd} &= \int_z \psi'_h \cdot \lambda_d \cdot dz; & m_{\xi d} &= m_{d\xi} = \int_z \lambda_\xi \cdot \lambda_d \cdot dz; \\
n_{\xi d} &= n_{d\xi} = \int_z \lambda'_\xi \cdot \lambda'_d \cdot dz; & k_{\xi k} &= \int_z \lambda'_\xi \cdot \psi_k \cdot dz; & l_{\xi k} &= \int_z \lambda_\xi \cdot \psi'_k \cdot dz; \\
c_{hi} &= \int_z \psi_h \cdot \varphi'_i \cdot dz; & d_{hi} &= \int_z \psi'_h \cdot \varphi_i \cdot dz; & t_{\xi i} &= \int_z \lambda_\xi \cdot \varphi_i \cdot dz; & t_{jd} &= \int_z \varphi_j \cdot \lambda_d \cdot dz.
\end{aligned} \tag{9}$$

Свободные члены определяются по формулам:

$$p_j = \int_z p_x \cdot \varphi_j \cdot dz; \quad q_\xi = \int_z q_y \cdot \lambda_\xi \cdot dz; \quad q_h = \int_z q_z \cdot \psi_h \cdot dz. \tag{10}$$

Правые части (8) $\Phi_j^{нел}$, $\Phi_\xi^{нел}$, $\Phi_h^{нел}$ учитывают физическую нелинейность

$$\begin{aligned}
\Phi_j^{нел} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_{нел}}{\partial U_{i,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_{нел}}{\partial U_{i,y}} + \frac{\partial F_{нел}}{\partial U_i}; \\
\text{материала: } \Phi_\xi^{нел} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_{нел}}{\partial V_{d,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_{нел}}{\partial V_{d,y}} + \frac{\partial F_{нел}}{\partial V_d}; \\
\Phi_h^{нел} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_{k,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_{k,y}} + \frac{\partial F_{нел}}{\partial W_k},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $F_{нел}$ – нелинейная часть функции F .

Уравнения (8) совместно с граничными условиями на краях системы позволяют решать пространственную задачу теории упругости при наличии физической нелинейности материала. Правые части в развернутом виде здесь не представлены из-за громоздкости.

Полагая при действии вертикальных нагрузок перемещения точек среды в направлении осей x и y малы:

$$u(x, y, z) = 0; \quad v(x, y, z) = 0, \tag{12}$$

то учитывая только перемещения в направлении оси z

$$w(x, y, z) = W(x, y) \cdot \psi(z). \tag{13}$$

Координатную функцию (рис. 1) принимаем в виде $\psi(z) = (H - z)/H$.

Тогда из системы (8) останется только одно уравнение из третьей группы:

$$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} r_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - s_{11} \cdot W + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} q = \Phi^{нел}, \tag{14}$$

где $r_{11} = \int_0^H \psi^2 \cdot dz = \frac{H}{3}$; $s_{11} = \int_0^H (\psi')^2 \cdot dz = \frac{1}{H}$; q – вертикальная нагрузка, действующая на поверхность среды. Вводя следующие обозначения:

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu},$$

$$\text{получим: } \frac{1-\nu_0}{2} r_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) - s_{11} \cdot W + \frac{1-\nu_0^2}{E_0} q = \Phi^{нел}. \tag{15}$$

Составим уравнение для плиты, лежащей на поверхности среды высотой H , тогда можем записать

$$D\nabla^4 W = p(x, y) - q(x, y), \tag{16}$$

где $D = \frac{E_n \cdot \delta^3}{12(1-\nu_n)^2}$ – цилиндрическая жесткость плиты; $p(x, y)$ – внешняя нагрузка, приложенная к плите; $q(x, y)$ – реакция среды; E_n, ν_n – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты; δ – толщина плиты. Исключим из уравнения (16) $q(x, y)$, используя уравнение (15), получим нелинейное дифференциальное уравнение изгиба плиты, контактирующей со средой

$$\nabla^4 W - 2r^2 \nabla^2 W + s^4 \cdot W - \frac{p(x, y)}{D} = \Phi^{нел}, \quad (17)$$

где $r^2 = \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)D}$; $s^4 = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)D}$. Нелинейная часть имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi^{нел} = & \frac{2}{3} \cdot \frac{E_1}{D} (1-\nu_0)^3 \{3n_{11} [2W(W_x^2 + W_y^2) + W^2(W_{xx} + W_{yy})] + \\ & + \frac{3}{4} m_{11} \left[W_{xx} \left(W_y^2 + \frac{3}{2} W_x^2 \right) + W_{yy} \left(W_x^2 + \frac{3}{2} W_y^2 \right) + 3W_x W_y W_{xy} \right] - 4d_{11} W^3 \} \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты определяются по формулам:

$$n_{11} = \int_0^H (\psi_1')^2 \cdot \psi_1^2 \cdot dz = \frac{H}{3}; m_{11} = \int_0^H \psi_1^4 \cdot dz = \frac{H}{5}; d_{11} = \int_0^H (\psi_1')^4 \cdot dz = \frac{1}{H^3}. \quad (19)$$

Индексы при функциях W показывают частные производные:

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial x}, W_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \dots$$

Приведем двумерную задачу к одномерной, принимая прогиб плиты в виде разложения [3]:

$$W(x, y) = \sum_k W_k(y) \cdot f_k(x); (k=1, 2, 3, \dots, n), \quad (20)$$

где $W_k(y)$ – искомая величина обобщенного прогиба, $f_k(x)$ – координатная функция, которой задается заранее по физическому смыслу задачи.

Работу реактивных давлений среды на возможном перемещении элементарной полоски плиты можно получить, используя преобразованную формулу (15) с учетом (20)

$$q(x, y) = k^1 \cdot \sum_k W_k \cdot f_k - 2t^1 \cdot \sum_k W_k \cdot f_k'' - 2t^1 \cdot \sum_k W_k'' \cdot f_k + \Phi_{нел}, \quad (21)$$

где $t^1 = \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)}$; $k^1 = \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)}$.

Работа реактивных давлений среды на перемещениях f_i равна:

$$R_i = \sum_k \rho_{ik}^0 \cdot W_k'' - \sum_k s_{ik}^0 W_k - \int_0^a \Phi_{нел} \cdot f_i \cdot dx. \quad (22)$$

Коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_{ik}^0 = & \frac{E_0 H}{12(1+\nu_0)} \int_0^a f_k \cdot f_i \cdot dx + \frac{E_0 H^2 (1-\nu_0)}{24(1+\nu_0) \sqrt{6(1-\nu_0)}} [fk \cdot f]_0^a; \\ s_{ik}^0 = & \frac{E_0}{H(1-\nu_0^2)} \left\{ \int_0^a f_k \cdot f_i \cdot dx + \frac{H^2 (1-\nu_0)}{6} \int_0^a f_k' \cdot f_i' \cdot dx + \frac{H}{6} \sqrt{6(1-\nu_0)} [fk \cdot f]_0^a \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Двойная скобка $[]_0^a$ показывает сумму значений произведений функций на краях пластины при $x=0$ и $x=a$.

Присоединяем уравнение (22) к уравнению изгиба плиты (16) и получим:

$$\sum_k \left[a_{ik} \cdot W_k^{IV} - 2 \left(b_{ik} + \frac{\rho_{ik}^0}{D} \right) W_k^{II} + \left(c_{ik} + \frac{s_{ik}^0}{D} \right) W_k \right] - G_i = \Phi_i, \quad (24)$$

($i=1, 2, 3, \dots, n$).

Данное дифференциальное уравнение является уравнением изгиба плиты, взаимодействующей со средой, имеющей нелинейную диаграмму деформирования. Коэффициенты линейной части (24) вычисляются по формулам:

$$a_{ik} = \int_0^a f_i \cdot f_k \cdot dx; \quad b_{ik} = \int_0^a f_i' \cdot f_k' \cdot dx - \frac{V}{2} [f_i' \cdot f_k + f_i \cdot f_k']_0^a; \quad c_{ik} = \int_0^a f_i'' \cdot f_k'' \cdot dx. \quad (25)$$

Выражение в квадратных скобках означает разность значений произведений по концам каждого участка. Свободный член записывается так

$$G_i = \frac{1}{D} \left[\int_0^a p(x, y) \cdot f_i \cdot dx + \sum P_{ic} \cdot f_i(c) + \sum M_{ic} \cdot f_i'(c) \right], \quad (26)$$

где $p(x, y)$ – поверхностная распределенная нагрузка, действующая на плиту; P_{ic} , M_{ic} – сосредоточенные силы и моменты, действующие на плиту в сечениях $x=c$. Нелинейная часть Φ_i имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \frac{2}{3} (1 - \nu_0)^3 \frac{E_1}{D} \left\{ H \int_0^a \left\langle 2 \sum_k W_k \cdot f_k \left[\left(\sum_k W_k \cdot f_k' \right)^2 + \left(\sum_k W_k' \cdot f_k \right)^2 \right] + \right. \right. \\ & + \left. \left(\sum_k W_k \cdot f_k \right)^2 \cdot \left(\sum_k W_k \cdot f_k'' + \sum_k W_k'' \cdot f_k \right) \right\rangle f_i \cdot dx + \\ & + 0,15 H \int_0^a \left\langle \sum_k W_k \cdot f_k'' \left[\left(\sum_k W_k' \cdot f_k \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\sum_k W_k \cdot f_k' \right)^2 \right] + \right. \\ & + \left. \sum_k W_k'' \cdot f_k \left[\left(\sum_k W_k \cdot f_k' \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\sum_k W_k' \cdot f_k \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + 3 \sum_k W_k \cdot f_k' \sum_k W_k' \cdot f_k \sum_k W_k'' \cdot f_k' \right\rangle f_i \cdot dx - \frac{4}{H^3} \int_0^a \left(\sum_k W_k \cdot f_k \right)^3 f_i \cdot dx \left. \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

В качестве примера рассматриваем загруженную равномерно-распределенной нагрузкой q шарнирно-опертую по контуру квадратную плиту, взаимодействующую со средой толщиной H (рис. 2). Расчет проводим в первом приближении. Функцию прогиба принимаем по (20)

$$w(x, y) = W_1(y) \cdot f_1(x). \quad (28)$$

Запишем дифференциальное уравнение вида (24) и его нелинейную часть по (27):

$$a_{11} \cdot W_1^{IV} - 2 \left(b_{11} + \frac{\rho_{11}^0}{D} \right) W_1^{II} + \left(c_{11} + \frac{s_{11}^0}{D} \right) W_1 - G_1 = \Phi_1, \quad (29)$$

$$\Phi_1 = \frac{2}{3}(1-\nu_0)^3 \frac{E_1}{D} \left\{ H \int_0^a \left(2W_1^3 \cdot f_1 \cdot (f_1')^2 + W_1 \cdot (W_1')^2 \cdot f_1^3 + W_1^3 \cdot f_1^2 \cdot f_1'' + \right. \right. \\ \left. \left. + W_1^2 \cdot W_1'' \cdot f_1^3 \right) f_1 \cdot dx + 0,15H \int_0^a \left(W_1 \cdot (W_1')^2 \cdot f_1^2 \cdot f_1'' + \frac{3}{2} W_1^3 \cdot (f_1')^2 \cdot f_1'' + \right. \right. \\ \left. \left. + W_1^2 \cdot W_1'' \cdot f_1 \cdot (f_1')^2 + \frac{3}{2} (W_1')^2 \cdot W_1'' \cdot f_1^3 + 3W_1 \cdot (W_1')^2 \cdot f_1 \cdot (f_1')^2 \right) f_1 \cdot dx - \right. \\ \left. - \frac{4}{H^3} \int_0^a W_1^3 \cdot f_1^4 \cdot dx \right\}. \quad (30)$$

Согласно граничным условиям и действующей нагрузке координатную функцию f_1 можно принять в виде полуволны синусоиды (рис. 2)

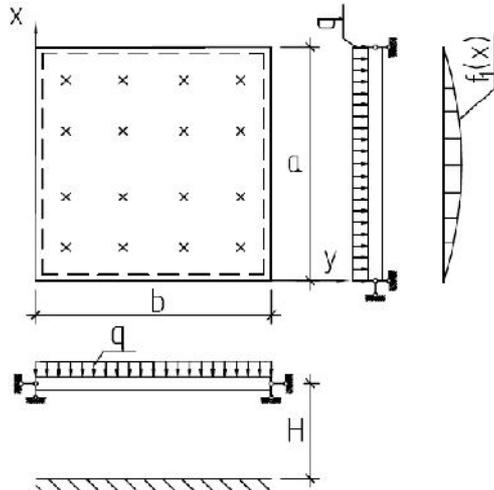


Рис.2. Схема плиты в плане и вид координатной функции

$$f_1 = \sin \frac{\pi x}{a},$$

Тогда коэффициенты линейной части уравнений и свободный член будут равны:

$$a_{11} = \int_0^a f_1^2 \cdot dx = \int_0^a \left(\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 \cdot dx = 0,5a;$$

$$b_{11} = \int_0^a (f_1')^2 \cdot dx = \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a \left(\cos \frac{\pi x}{a} \right)^2 \cdot dx = 0,5 \frac{\pi^2}{a};$$

$$c_{11} = \int_0^a (f_1'')^2 \cdot dx = \frac{\pi^4}{a^4} \int_0^a \left(-\sin \frac{\pi x}{a} \right)^2 \cdot dx = 0,5 \frac{\pi^4}{a^3};$$

$$G_1 = \int_0^a \frac{q}{D} f_1 \cdot dx = \frac{q}{D} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \cdot dx = \frac{2qa}{\pi D}.$$

Для решения нелинейной краевой задачи использовался численный метод. Нелинейное дифференциальное уравнение интегрировалось методом Рунге-Кутты. Для определения недостающих краевых условий использовался итерационный метод типа Ньютона.

По результатам расчета на рис. 3 представлены графики изменения прогиба плиты, полученные с учетом и без учета нелинейности материала среды.

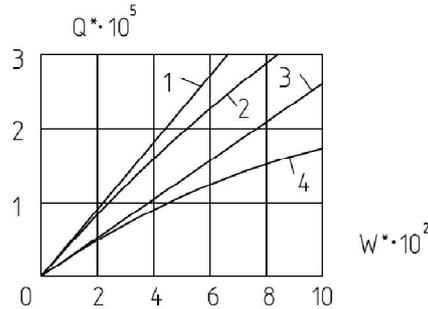


Рис.3. Графики зависимости прогиба центральной точки плиты от действующей нагрузки

при $H=a$: 1, 2 – по линейной и нелинейной теории ($E_1/E_2 = 10$; $E_0/E_1 = 10^{-3}$;
 $h/a = 0,1$; $\nu = \nu_0 = 0,3$); 3, 4 – по линейной и нелинейной теории $E_1/E_2 = 10$;

$E_0/E_1 = 10^{-4}$; $h/a = 0,1$; $\nu = \nu_0 = 0,3$)

На рис. 3 приняты следующие обозначения координат: $Q^* = q/E_n$ – отношение действующей нагрузки к модулю упругости материала плиты; $W^* = W/\delta$ – отношение прогиба к толщине плиты.

Результаты проведенных исследований позволяют сделать следующие выводы:

- получены уравнения в перемещениях для решения пространственной физически нелинейной задачи;
- составлены уравнения для расчета плит, взаимодействующих с нелинейной средой;
- из рис. 3 видно, что учет физической нелинейности может существенно влиять на НДС плиты. В частности учет нелинейности (рис. 3) значительно влияет на величину прогиба (см. кривые 2 и 4).

Л и т е р а т у р а

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 342с.
2. *Лукаш П. А.* Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. - 204с.
3. *Власов В.З.* Тонкостенные пространственные системы.- М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
4. *Иванов С.П., Ахметшин М.Н.* Решение физически нелинейной плоской задачи теории упругости и ее приложение к расчету балок, контактирующих со средой// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. - № 2. – С. 33-36.

THE APPLICATION OF ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL PHYSICALLY NONLINEAR PROBLEM TO CALCULATION OF THE PLATES CONTACTING WITH DIFFERENT MEDIUMS

S.P. Ivanov, O.G. Ivanov, M.N. Akhmetshin

The technique of the decision of physically non-linear of three-dimensional problem of the elastic theory in displacements is developed. The appendix of the given technique to calculation of the plates cooperating with medium, having the non-linear diagram of deformation is presented. The example of calculation of a plate is resulted.

KEYWORDS: three-dimensional problem, nonlinearity, a plat