

Геометрия срединных поверхностей оболочек

ГЕОМЕТРИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕНОСА С ОБРАЗУЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТЬЮ И НАПРАВЛЯЮЩИМИ МЕРИДИАНАМИ БАЗОВОЙ СФЕРЫ

В.Н. ИВАНОВ, *докт. техн. наук, профессор*
Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
Тел. (495) 955-08-21; E-mail: ivanov.v.n@stream.ru

Поверхности переноса образуются параллельным движением в пространстве кривой (образующей) вдоль другой кривой (направляющей) [1]. При этом координатная сеть поверхности образуется системой кривых идентичных образующей и направляющей кривым поверхности переноса. Та же самая поверхность переноса получается, если поменять направляющую и образующую кривые, т.е. провести параллельный перенос направляющей кривой (первоначального способа образования поверхности переноса) вдоль образующей кривой. В то же время за направляющую кривую поверхности переноса можно принимать кривую не пересекающуюся с образующей кривой. В этом случае образующая кривая при ее параллельном движении в пространстве должна быть жестко связана с направляющей кривой (не вращаться при параллельном переносе). В этом случае, уравнение образующей кривой связывается с системой координат с началом координат на направляющей кривой. Координатная система движется без вращения вдоль направляющей кривой совместно с образующей кривой поверхности переноса. В частности, за направляющую циклической поверхности обычно принимается линия центров образующей окружности. В настоящей работе исследуется геометрия циклических поверхностей переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы. Получены векторные уравнения поверхности в линиях переноса и в системе координатных линий, включающих опорные меридианы базовой сферы. Показана возможность конструирования зонтичных оболочек из отсеков циклических поверхностей переноса, ограниченных опорными меридианами базовой сферы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: базовая сфера, циклическая поверхность переноса, направляющие меридианы поверхности переноса на сфере, векторное уравнение поверхности,

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса a , заданную параметрическими уравнениями:

$$x(u, v) = a \sin u \cos v; \quad y(u, v) = a \sin u \sin v; \quad z(u, \theta) = a \cos u. \quad (1)$$

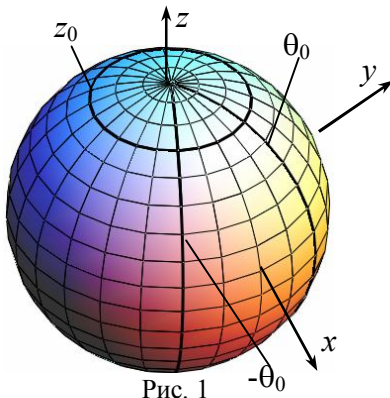


Рис. 1

Зададим на сфере сечение $z_0 = a \cos u_0$, параллельное плоскости xu . В сечении получаем окружность радиуса $R_0 = a \sin u_0$. Задаем, также, на сфере сектор, образуемый меридианами $\theta = \pm \theta_0$ (рис. 1).

Окружность сферы в сечении z_0 принимаем в качестве образующей окружности циклической поверхности переноса. Поверхность переноса получаем движением образующей окружности параллельно плоскости xu так, чтобы точки образующей окружности скользили по направляющим меридианам

$\pm \theta_0$ на базовой сфере (рис. 2), т.е. образующая окружность при движении пересекается с направляющими меридианами сферы. Очевидно, при движении образующей окружности вдоль оси z происходит смещение центра образующей

окружности вдоль оси x . На рис 2,б показано сечение циклической поверхности переноса при смещении образующей окружности вдоль оси z в положение $z(u)$. При этом центр образующей окружности c поверхности переноса смещается по оси x на расстояние $x = r(u)$. Положение центра образующей окружности определяется из условия равенства в сечении $z(u)$ хорд сектора сферы и сектора образующей окружности (рис. 2,б):

$$R(u)\sin v_0 = R_0 \sin V \quad \text{или} \quad \sin u \sin v_0 = \sin u_0 \sin V, \quad \text{откуда}$$

$$V = V(u) = \arcsin \left[\frac{R(u)\sin v_0}{R_0} \right] = \arcsin \left[\frac{\sin v_0}{\sin u_0} \sin u \right] \quad (2)$$

– угол, образуемый радиусом, направленным из центра образующей окружности поверхности переноса в сечении $z = z(u)$ в точку пересечения образующей окружности с направляющим меридианом базовой сферы, и осью x .

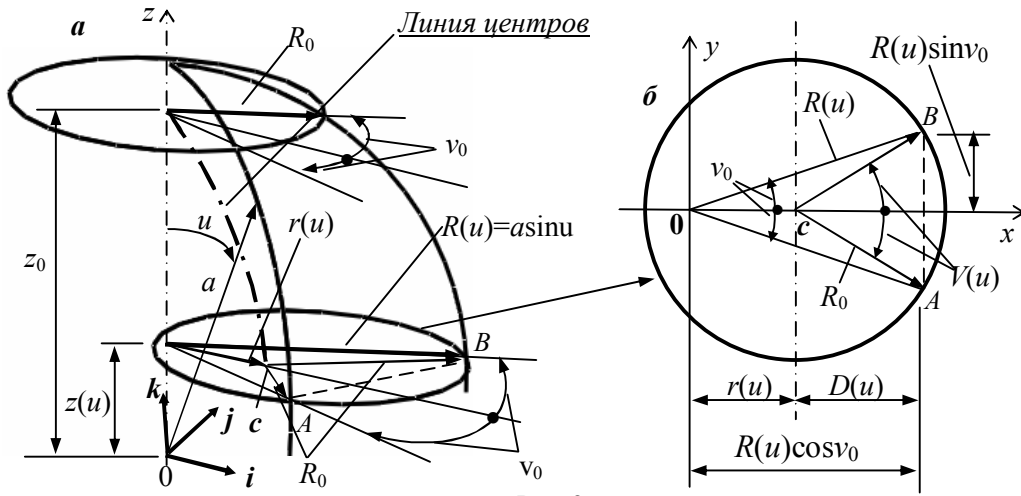


Рис. 2

Из рис. 2, б получаем

$$D(u) = \sqrt{R_0^2 - R^2(u)\sin^2 v_0} = a\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2 u \sin^2 v_0}; \quad (3)$$

$$r(u) = R(u)\cos \theta_0 - D(u); \quad R(u) = a\sin u. \quad (4)$$

Из формулы (3) следует, что $R(u)\sin v_0 = a\sin u \sin v_0$ не должно превышать радиуса образующей окружности $R_0 = a\sin u_0$, откуда

$$u \leq u_{\text{д\ddot{a}ä}} = \arcsin(\sin u_0 / \sin v_0). \quad (5)$$

Из формул (5), (2) следует, что предельному значению координаты u соответствует значение углового параметра $V(u) = \pi/2$ и, следовательно, хорда AB равна диаметру образующей окружности $2R_0$. Ограничение (5) действует, если $u_0 < v_0$. Экватор базовой сферы определяет плоскость симметрии поверхности переноса. Если $u_0 < v_0$, то в верхней и нижней частях базовой сферы получаем не соединяющиеся симметричные отсеки поверхности.

Уравнение линии центров циклической поверхности переноса, построенной на базе сферы $r_c(u)$, получаем в виде

$$r_c(u) = r(u)\mathbf{i} + z(u)\mathbf{k}. \quad (6)$$

Тогда, векторное уравнение циклической переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы получаем в виде

$$\rho(u, v) = r_c(u) + R_0 e(v), \quad (7)$$

где $e(\theta) = i \cos v + j \sin v$ - уравнение окружности единичного радиуса в плоскости xu . Циклическая поверхность переноса на фоне базовой сферы представлена на рис. 3,а ($u_0 = \pi/6$; $\theta_0 = \pi/8$; $u = (\pi/6 + \pi/2)$). На рис. 3,б представлена циклическая поверхность переноса только с направляющими меридианами базовой сферы.

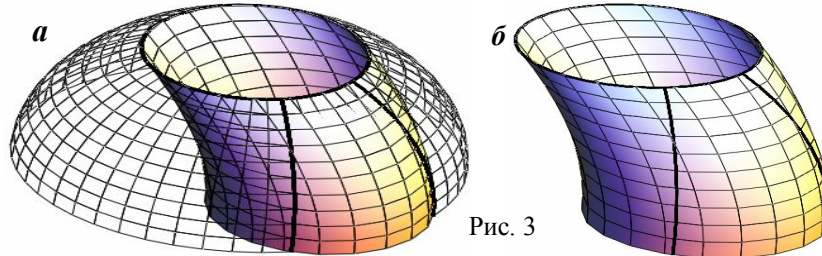


Рис. 3

Согласно условия (5) при $u_0 \geq v_0$ циклическая поверхность переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы может быть непрерывно продолжена на нижнюю половину базовой сферы (рис. 4). Причем при $u_0 = v_0$ на экваторе поверхности наблюдается разрыв касательной к линии переноса (рис. 4,а - $u_0 = v_0 = \pi/6$). При $u_0 > v_0$ разрыв касательных на экваторе поверхности сглаживается (рис. 4,б - $u_0 = \pi/6$; $v_0 = \pi/6,2$)

При $u_0 < v_0$ можно построить две ветви поверхности на верхней и нижней частях опорной сферы, между которыми имеется разрыв (рис. 5,в - $u_0 = \pi/6,2$; $v_0 = \pi/6$; $u_0 \leq u \leq u_{\text{пред}}$, $u_{\text{пред}} = 0,4215\pi$).

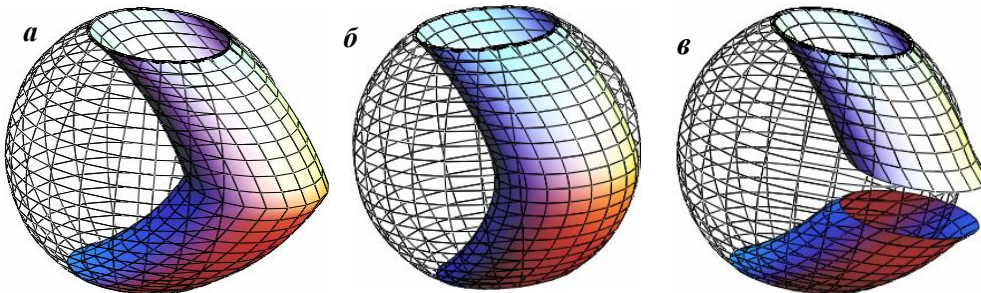


Рис. 4

На рис. 3, 4 приведены отсеки циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы при движении образующей окружности от сечения $z = z(u_0)$ к экватору базовой сферы ($u_0 \leq u \leq u_{\text{пред}}$). В то же время, при движении образующей окружности от сечения $z = z(u_0)$ к полюсу базовой сферы также получаем отсек циклической оболочки переноса (рис. 5,а). В предельном положении ($u = 0$) образующая окружность поверхности переноса касается полюса базовой сферы и лежит за ее пределами. На Рис. 5,б приведен полный отсек циклической оболочки переноса на базовой полусфере ($0 \leq u \leq \pi/2$; $u_0 = \pi/6$; $\theta_0 = \pi/6$).

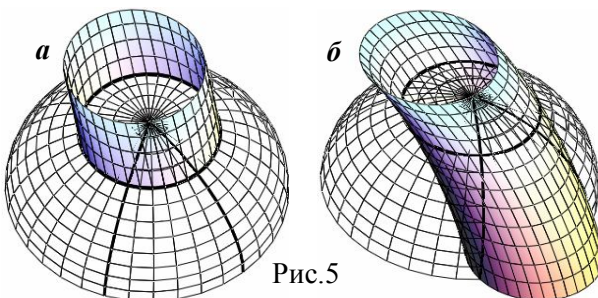


Рис.5

Дифференцируя уравнение циклической поверхности переноса (7) с учетом формулы (6), имеем:

$$\begin{aligned}\rho_u &= r'_c(u) = r'i + z'k; & \rho_v &= R_0 g(v); \\ \rho_{uu} &= r''_c(ui) = r''i + z''k; & \rho_{uv} &= 0; & \rho_{vv} &= -R_0 e.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь $g(v) = e'(v) = -i \sin(v) + j \cos(v)$; $g'(v) = -e(v)$.

Тогда, получаем коэффициенты квадратичных форм циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы в координатной системе линий переноса:

$$\begin{aligned}E &= r'^2 + z'^2 = s'^2; & F &= -R_0 r' \sin v; & G &= R_0^2; & z' &= a \sin u; \\ r' &= \left[\cos v_0 - \frac{R \sin^2 v_0}{D(u)} \right] R' = a \cos u \left[\cos v_0 - \frac{\sin(u) \sin^2 v_0}{\sqrt{\sin^2 u_0 - \sin^2(u) \sin^2 v_0}} \right]; \\ m &= \frac{1}{\sigma} [-z'e + r' \cos v k] - \text{единичная нормаль поверхности } (|m| = 1). \\ \sigma &= \frac{\Sigma}{R_0} = \sqrt{z'^2 + r'^2 \cos^2 v}; & \Sigma &= \sqrt{EG - F^2}. \\ L &= \frac{1}{\sigma} (r' z'' - r'' z') \cos v; & M &= 0; & N &= \frac{R_0 z'}{\sigma}.\end{aligned}\quad (9)$$

Опорные меридианы базовой сферы уравнения циклической поверхности переноса в формуле (7) не совпадают с системой линий переноса, определяемых системой координат $v = \text{const}$. Введем систему координат, включающую опорные меридианы базовой сферы. Для этого в сечении $u = \text{const}$ введем переменную:

$$\theta = v(u, v) = \delta(u) v; \quad p(u) = V(u) / v_0 = \arcsin \left(\frac{\sin v_0}{\sin u_0} \sin u \right) / v_0. \quad (10)$$

Векторное уравнение циклической оболочки переноса в координатной системе, включающей опорные меридианы базовой сферы, получаем в виде:

$$\rho(u, v) = r_c(u) + R_0 h(u, v). \quad (11)$$

$$\text{Здесь } h(u, v) = e(\theta) = i \cos \theta + j \sin \theta = i \cos[p(u)v] + j \sin[p(u)v]. \quad (12)$$

При изменении угловой координаты v в пределах $-v_0 \leq v \leq v_0$ получаем отсек циклической оболочки переноса, ограниченный направляющими меридианами базовой сферы. На рис. 6,а представлен отсек циклической оболочки совместно с базовой сферой, на рис. 6,б – отдельно отсек оболочки переноса с параметрами $u_0 = v_0 = \pi/6$, $u_0 \leq u \leq \pi/2$; $-v_0 \leq v \leq v_0$. На рис. 6,а,б представлены отсеки аналогичной оболочки при $0 \leq u \leq \pi/2$.

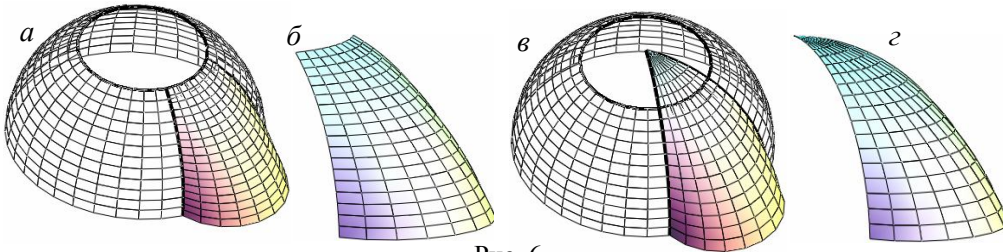


Рис. 6

Отметим, что при переходе отсека оболочки, описываемого уравнением (9), границ направляющих меридианов меридиана $-v_0 < v < v_0$, в виду более быстрого изменения углового параметра θ в нижней части отсека оболочки про-

исходит сначала сближение нижней части оболочки (рис. 7,а; $-2v_0 \leq v \leq 2v_0$), а затем перехлест (наложение) нижних ветвей оболочки (рис. 7,б; $-3v_0 \leq v \leq 3v_0$). Поэтому уравнение (11) с параметром $p(u)$, определяемом формулой (10), целесообразно использовать для внешнего отсека оболочки $-v_0 \leq v \leq v_0$. Для отсека поверхности в пределах $v_0 < v < 2\pi - v_0$ параметр p определяем формулой

$$p(u) = \left[\pi - \arcsin \left(\frac{\sin v_0}{\sin u_0} \sin u \right) \right] / (\pi - v_0). \quad (12)$$

На рис. 8 приведены отсеки циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы в координатной системе, включающей направляющие меридианы: а) $v_0 \leq v \leq 2\pi - v_0$; б) $-v_0 \leq v \leq v_0$; в) совмещенные отсеки.

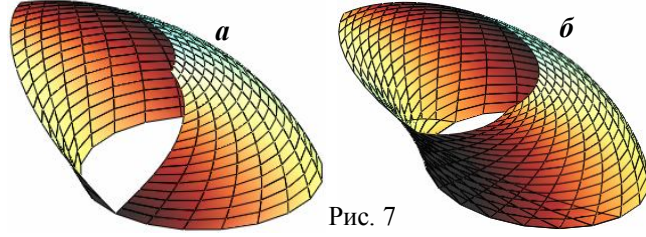


Рис. 7

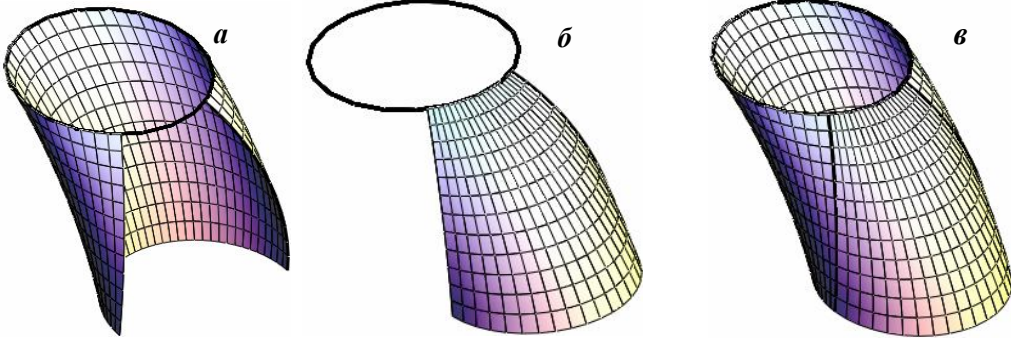


Рис. 8

Рассмотрим особенности дифференцирования функции единичной окружности $\mathbf{h}(u, v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u(u, v) &= \mathbf{e}_u(\theta) = \mathbf{g}(\theta)\theta_u = p'v\mathbf{g}(\theta); & \mathbf{h}_v(u, v) &= \mathbf{e}_v(\theta) = \mathbf{g}(\theta)\theta_v = p\mathbf{g}(\theta); \\ \mathbf{h}_{uu}(u, v) &= -p'^2v^2\mathbf{e}(\theta) + p''v\mathbf{g}(\theta); & \mathbf{h}_{vv}(u, v) &= -p^2\mathbf{e}(\theta); \\ \mathbf{h}_{uv}(u, v) &= -pp'v\mathbf{e}(\theta) + p'\mathbf{g}(\theta). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда, дифференцируя уравнение поверхности (11), имеем:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_u &= \mathbf{r}'_c + R_0p'v\mathbf{g}(\theta); & \boldsymbol{\rho}_v &= R_0p\mathbf{g}(\theta); & \boldsymbol{\rho}_{uu} &= \mathbf{r}''_c + R_0[p''v\mathbf{g}(\theta) - pp'v\mathbf{e}(\theta)]; \\ \boldsymbol{\rho}_{vv}(u, v) &= -R_0p^2\mathbf{e}(\theta); & \boldsymbol{\rho}_{uv}(u, v) &= R_0[-pp'v\mathbf{e}(\theta) + p'\mathbf{g}(\theta)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты квадратичных форм циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами сферы в координатных линиях, включающих направляющие меридианы получаем в виде:

$$\begin{aligned} E &= s'^2 - 2R_0r'p'v\sin(pv) + (R_0p'v)^2; & G &= R_0^2p^2; & F &= R_0p[R_0p'v - r'\sin(pv)]; \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{\sigma}[-z'\mathbf{e}(\theta) + r'\cos(pv)\mathbf{k}]; & \sigma &= \frac{\Sigma}{R_0p} = \sqrt{z'^2 + r'^2\cos^2(pv)}; & (15) \\ L &= \frac{1}{\sigma}[(r'z'' - r''z')\cos(pv) + z'pp'v]; & M &= \frac{z'pp'v}{\sigma}; & N &= R_0\frac{z'p^2}{\sigma}. \end{aligned}$$

Если параметр $v_0 = \pi/k$ (k – целое число), то последовательно добавляя отсеки оболочки путем поворота исходного отсека на угол $\varphi = 2v_0i$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), получаем замкнутую оболочку зонтичного типа.

На рис. 9 показаны оболочки зонтичного типа из 5 отсеков циклической оболочки переноса – $k = 5$.

На рис. 9, *а* – оболочка совмещена с базовой сферой, на рис. 9, *б* – отдельно зонтичная оболочка. $\pi/5 \leq u \leq \pi/2$. На рис. 9, *в* зонтичная оболочка с вершиной $0 \leq u \leq \pi/2$.

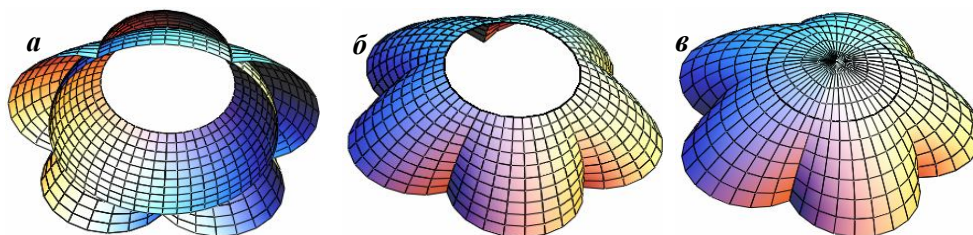


Рис. 9

Зонтичные оболочки удобны при их возведении на строительной площадке, так как они строятся из однотипных повторяющихся отсеков. Особенностью варианта циклической поверхности переноса с образующей окружностью и направляющими меридианами базовой сферы является то, что каркас сектора оболочки строится из отсеков окружностей постоянного радиуса, которые опираются на направляющие окружности базовой сферы.

Пример архитектурного ансамбля включающего конструкции оболочек зонтичного типа на основе циклических поверхностей переноса с использованием базовой сферы приведен в работе [2].

Л и т е р а т у р а

1. Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 540 с.
2. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Конструирование зонтичных оболочек из отсеков циклических оболочек переноса// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 1. – С. 3-7.

GEOMETRY OF THE CYCLIC TRANSLATION SURFACES WITH GENERATING CIRCLE AND DIRECTRIX MERIDIANS OF THE BASE SPHERE

Ivanov V.N.

The geometry of the cyclic translation surfaces with generating circle and directrix meridians of the base sphere is investigated in the article.

The surface is received by parallel moving of the circle of some section of the base sphere. The generating circle moves so they cross two meridians of the base sphere.

The vector equation of the cyclic translation surface in coordinate lines of translation is received. The equation of the surface in coordinate lines including directrix meridians are received too.

The drawings of the cyclic translation surfaces with generating circle and directrix meridians of the base sphere made in MathCad system are shown.

The possibility of construction of the umbrella surfaces from repeating sectors of the cyclic translation surfaces are shown.

KEY WORDS: base sphere, cyclic translation surface, directrix meridians, vector equation of the surface