

Численные методы расчета конструкций

УЧЁТ РЁБЕР, НЕ СОВПАДАЮЩИХ С ЛИНИЯМИ ГЛАВНЫХ КРИВИЗН, В ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК

И.В. КУШНАРЕНКО, аспирант

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6; ivan.v.kush@yandex.ru

В статье описывается введение подкреплений, не совпадающих с линиями главных кривизн, в вариационно-разностном методе (ВРМ) расчёта оболочек сложной формы, заданных в линиях главных кривизн. Рёбра описываются теорией криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша: учитывается растяжение, изгиб и кручение рёбер; оболочка описывается теорией упругих тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: подкрепления, ребристые оболочки, рёбра не в линиях кривизн, формообразование, численные методы, вариационно-разностный метод, сеточный метод, полная энергия деформации.

Пространственные оболочечные конструкции являются одними из самых красивых и эффективных архитектурных конструкций. Правда, в настоящее время они потеряли былую популярность [1,2]. Также необходимо отметить, что уже возведённые оболочечные конструкции имеют довольно простую геометрию. Это объясняется сложностью расчётов оболочек сложной неканонической формы [3,4] и трудностями при их возведении. Поэтому являются актуальными задачи развития методов расчёта тонкостенных оболочечных конструкций и технологии их возведения.

С помощью существующих аналитических и конечно-разностных методов описана реализация подкреплений только в оболочках вращения и пологих оболочках [5-8]. Ребристые оболочки произвольной формы можно рассчитать только с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [9-14]. Однако при использовании универсальных МКЭ существуют проблемы, которые исследователи-разработчики конечных элементов пытаются преодолеть [15,16]:

- представление смещений элемента как твердого целого;
- конформность поля прогибов;
- представление состояния “чистого изгиба”;
- параметризация срединной поверхности.

Получается, для каждого типа аналитически заданной поверхности нужны свои отдельные КЭ. В разработанной вариационно-разностной схеме [4] отсутствуют вышеназванные проблемы. В предыдущих работах автора [17¹,18] рассматривалось введение подкреплений вдоль линий главных кривизн. Данная работа является их развитием: представлены выражения для подкреплений, не совпадающих с линиями главных кривизн.

1 Основные гипотезы и формулы

В основе вариационно-разностной схемы деформирования тонкостенных конструкций лежит принцип минимума функционала полной энергии.

¹ В [17] присутствуют опечатки:

в матрице механических характеристик рёбер $[N_{Rq}]$ (формула 5) напечатано: $F_{Rq} / (1 + k_q \eta_{cgRq})$, а должно быть: $F_{Rq} / (1 + k_q \eta_{cgRq})^2$; в векторе деформаций ребра $\bar{\epsilon}_{Rq}$ (формула 4) напечатано: $[K^k]_3$, а должно быть: $[K^k]_3 / 2$.

Напряжённо-деформированное состояние рёбер описывается теорией криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша: учитывается растяжение, изгиб и кручение рёбер. Напряжённо-деформированное состояние оболочки описывается теорией упругих тонкостенных оболочек Кирхгофа-Лява. Поверхностная система координат в линиях главных кривизн.

После нанесения сетки в функционале энергии производные первого порядка и смешанные производные аппроксимируются односторонними разностными производными, производные второго порядка аппроксимируются центральными разностными производными. Во время вычисления деформаций и внутренних усилий после решения системы уравнений все типы производных аппроксимируются центральными разностными производными.

Функционал полной энергии деформаций становится функцией узловых перемещений:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \left(U_T^{ij} + U_B^{ij} + \sum_{RA=1}^{nRA} U_{RA}^{ij} + \sum_{RC=1}^{nRC} U_{RC}^{ij} - A^{ij} \right), \quad (1)$$

где i, j – номера сетки вдоль координатных осей α и β срединной поверхности тонкостенной конструкции; N_1, N_2 – число шагов (разбиений) сетки вдоль координатных осей α и β ; U^{ij} – потенциальная энергия деформации: U_{RC}^{ij} ребра, совпадающего с линией главной кривизны; U_{RA}^{ij} – ребра, не совпадающего с линией главной кривизны; U_T^{ij}, U_B^{ij} – тангенциальных и изгибных деформаций тонкостенной оболочки; nRA – общее количество ребер, не совпадающих с линиями главных кривизн, nRC – совпадающих с линиями главных кривизн.

Для минимизации полной энергии деформаций приравняются к нулю частные производные по всем неизвестным узловым перемещениям u_k^{ij} не связанным граничными условиями:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_k^{ij}} = \frac{\partial U_T}{\partial u_k^{ij}} + \frac{\partial U_B}{\partial u_k^{ij}} + \sum_{RA=1}^{nRA} \frac{\partial U_{RA}}{\partial u_k^{ij}} + \sum_{RC=1}^{nRC} \frac{\partial U_{RC}}{\partial u_k^{ij}} - \frac{\partial A}{\partial u_k^{ij}} = 0, \quad (2)$$

где $k = 1, 2, 3$ – номер компоненты вектора перемещений; $i = -1, 0, 1, 2 \dots N_1, N_1+1$; $j = -1, 0, 1, 2 \dots N_2, N_2+1$; $i = -1, N_1+1$; $j = -1, N_2+1$ – законтурные точки. Обозначим * – знак транспонирования вектора (матрицы). При этом выражения производных составляющих потенциальной энергии деформации имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_B}{\partial u_k^{ij}} = D \sum_{i=I-1}^{I+1} \sum_{j=J-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \bar{\delta}_{ij}^{k*}}{\partial u_k^{ij}} [r_{kl}^B]_{ij} \bar{\delta}_{ij}^l, \\ \frac{\partial U_T}{\partial u_k^{ij}} = C \sum_{i=I-1}^{I+1} \sum_{j=J-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \bar{\delta}_{ij}^{k*}}{\partial u_k^{ij}} [r_{kl}^T]_{ij} \bar{\delta}_{ij}^l, \\ \frac{\partial U_{RA}}{\partial u_k^{ij}} = E_{RA} \sum_{i=I-1}^{I+1} \sum_{j=J-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \bar{\delta}_{ij}^{k*}}{\partial u_k^{ij}} [r_{kl}^{RA}]_{ij} \bar{\delta}_{ij}^l, \\ \frac{\partial U_{RC}}{\partial u_k^{ij}} = E_{RC} \sum_{i=I-1}^{I+1} \sum_{j=J-1}^{J+1} \sum_{l=1}^3 \frac{\partial \bar{\delta}_{ij}^{k*}}{\partial u_k^{ij}} [r_{kl}^{RC}]_{ij} \bar{\delta}_{ij}^l, \end{cases} \quad (3)$$

где C, D – тангенциальная и изгибная жёсткости тонкостенной конструкции; E_{RC}, E_{RA} – модуль упругости материала ребра q ; $\bar{\delta}_{ij}^l$ – вектор узловых перемещений

ний в направлении l в окрестности узла ij ; $[r_{kl}]_{ij}$ – подматрицы жёсткости в окрестности узла ij относительно перемещений u_k^{ij}, u_l^{ij} ; $[r_{kl}^T]_{ij}, [r_{kl}^B]_{ij}$ – тангенциальная и изгибная жёсткости оболочки; $[r_{kl}^{RC}]_{ij}, [r_{kl}^{RA}]_{ij}$ – рёбер, совпадающих и не совпадающих с линиями главных кривизн. Матрицы $[r_{kl}]_{ij}$ формируются на основе геометрических характеристик поверхности (коэффициентов квадратичных форм, кривизн и их разностных производных) и параметров сетки в узле ij (коэффициенты площадей, полурасстояния между узлами, наличие отверстий).

2 Преобразование компонентов деформаций

Пусть параметрами ортогональной системы координат будут (α, β) , а параметрами косоугольной системы (φ, ψ) . На рис.

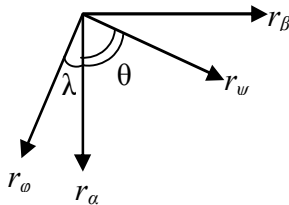


Рис. 1. Системы координат

1 представлены касательные вектора по соответствующим координатным линиям. В соответствии с [19, с. 61] формулы преобразования компонент деформаций при переходе от произвольной косоугольной системы координат к ортогональной криволинейной системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \frac{\sin \theta \cos \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\varphi + \frac{\sin \theta \sin \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_{\varphi\psi} + \frac{\cos \theta \sin \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\psi, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\varphi - \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_{\varphi\psi} + \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\psi, \\ \varepsilon_\beta = \frac{\cos \theta \sin \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\varphi - \frac{\cos \theta \cos \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_{\varphi\psi} + \frac{\sin \theta \cos \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \varepsilon_\psi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \chi_\alpha = \frac{\sin^2 \theta}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\varphi + \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_{\varphi\psi} + \frac{\sin^2 \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\psi, \\ \chi_{\alpha\beta} = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\varphi - \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_{\varphi\psi} + \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\psi, \\ \chi_\beta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\varphi - \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_{\varphi\psi} + \frac{\cos^2 \lambda}{\sin(\lambda + \theta)} \chi_\psi, \end{cases} \quad (5)$$

где $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_\beta$ – тангенциальные деформации в ортогональной системе координат; $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_{\varphi\psi}, \varepsilon_\psi$ – тангенциальные деформации в косоугольной системе координат; $\chi_\alpha, \chi_{\alpha\beta}, \chi_\beta$ – изгибные деформации в ортогональной системе; $\chi_\varphi, \chi_{\varphi\psi}, \chi_\psi$ – изгибные деформации в косоугольной системе координат.

Из соотношений (4),(5) можно выразить $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_{\varphi\psi}, \varepsilon_\psi$ и $\chi_\varphi, \chi_{\varphi\psi}, \chi_\psi$, например, с помощью метода Крамера:

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \cos^2 \lambda \cdot \varepsilon_\alpha - \cos \lambda \sin \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} + \sin^2 \lambda \cdot \varepsilon_\beta, \\ \varepsilon_{\varphi\psi} = \sin(\lambda + \theta) [\cos(\lambda - \theta) \cdot \varepsilon_\alpha - \sin(\lambda - \theta) \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} + \cos(\lambda - \theta) \cdot \varepsilon_\beta], \\ \varepsilon_\psi = \cos^2 \theta \cdot \varepsilon_\alpha + \cos \theta \sin \theta \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} + \sin^2 \theta \cdot \varepsilon_\beta, \\ \chi_\varphi = \frac{1}{\cos(\lambda - \theta) + \sin^2(\lambda - \theta)} \left[\sin \theta \cos \lambda \cdot \chi_\alpha + \cos(\lambda - \theta) \cdot \chi_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \sin \lambda \cos \theta \cdot \chi_\beta \right], \end{cases} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{\varphi\psi} = \frac{1}{\cos(\lambda - \theta) + \sin^2(\lambda - \theta)} \times \\ \times \left[\begin{array}{l} \cos \lambda \cos \theta \sin(\lambda + \theta) \cdot \chi_{\alpha} + \sin(\lambda - \theta) \sin(\lambda + \theta) \cdot \chi_{\alpha\beta} - \\ - \sin \lambda \sin \theta \sin(\lambda + \theta) \cdot \chi_{\beta} \end{array} \right], \\ \chi_{\psi} = \frac{1}{\cos(\lambda - \theta) + \sin^2(\lambda - \theta)} \left[\begin{array}{l} \sin \lambda \cos \theta \cdot \chi_{\alpha} + \cos(\lambda - \theta) \cdot \chi_{\alpha\beta} + \\ + \sin \theta \cos \lambda \cdot \chi_{\beta} \end{array} \right]. \end{array} \right. \quad (7)$$

3 Потенциальная энергия деформации ребра

Векторы обобщённых внутренних усилий и деформаций ребра имеют по три компоненты, связанных с растяжением, изгибом и кручением ребра:

$$\bar{Q}_R = \begin{pmatrix} N_R \\ M_R \\ T_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\varepsilon}_R = \begin{pmatrix} \varepsilon_R \\ \chi_R \\ \tau_R \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где N_R, M_R, T_R – растягивающая сила, изгибающий и крутящий моменты; $\varepsilon_R, \chi_R, \tau_R$ – деформации растяжения, изгиба и кручения ребра.

Вектор обобщённых внутренних усилий связан с вектором относительных деформаций законом Гука:

$$\bar{Q}_R = E_R [N_R] \bar{\varepsilon}_R, \quad (8)$$

где $[N_R] = \begin{pmatrix} F_R & 0 & 0 \\ 0 & I_R & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_R}{2(1+\nu_R)} \end{pmatrix}$ – матрица механических характеристик ребра;

ν_R – коэффициент Пуассона материала ребра; F_R – площадь поперечного сечения ребра; I_R – момент инерции ребра; J_R – постоянная кручения ребра; E_R – модуль упругости ребра.

Потенциальная энергия деформации ребра может быть записана в виде интеграла вдоль кривой ребра S от скалярных произведений вектора внутренних усилий \bar{Q}_R на вектор деформаций $\bar{\varepsilon}$ ребра:

$$U_R = \frac{1}{2} \int_S \bar{Q}_R^* \bar{\varepsilon}_R dS = \frac{E}{2} \int_S ([N_R] \bar{\varepsilon}_R)^* \bar{\varepsilon}_R dS = \frac{E}{2} \int_S \bar{\varepsilon}_R^* [N_R] \bar{\varepsilon}_R dS. \quad (9)$$

Теперь найдем выражения деформаций для ребра, не совпадающего с линиями кривизн. Приравняв в соотношениях (6,7) угол θ нулю, компоненты вектора деформаций ребра, центр масс которого расположен на расстоянии η от срединной поверхности, могут быть выражены следующими формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{RA} = \cos^2 \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha}^{\eta} - \cos \lambda \sin \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}^{\eta} + \sin^2 \lambda \cdot \varepsilon_{\beta}^{\eta}, \\ \chi_{RA} = \frac{1}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} [\sin \lambda \cdot \chi_{\beta}^{\eta} + \cos \lambda \cdot \chi_{\alpha\beta}^{\eta}], \\ \tau_{RA} = \frac{1}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} [\cos \lambda \sin \lambda \cdot \chi_{\alpha}^{\eta} + \sin^2 \lambda \cdot \chi_{\alpha\beta}^{\eta}]. \end{array} \right. \quad (10)$$

Выражения деформаций на расстоянии η от срединной поверхности определяются по формулам [21]:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha}^{\eta} &= \frac{1}{1+k_{\alpha}\eta}(\varepsilon_{\alpha} + \eta\chi_{\alpha}), \\ \varepsilon_{\beta}^{\eta} &= \frac{1}{1+k_{\beta}\eta}(\varepsilon_{\beta} + \eta\chi_{\beta}), \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{\eta} &= \frac{1}{(1+\eta k_{\alpha})(1+\eta k_{\beta})} \left\{ (1-\eta^2 k_{\alpha} k_{\beta})\varepsilon_{\alpha\beta} + 2\left(1 + \frac{\eta}{2}[k_{\alpha} + k_{\beta}]\right)\eta\chi_{\alpha\beta} \right\}, \\ \chi_{\alpha}^{\eta} &= \chi_{\alpha}, \\ \chi_{\beta}^{\eta} &= \chi_{\beta}, \\ \chi_{\alpha\beta}^{\eta} &= \chi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Подставляя (12) в (11), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{RA} &= \frac{\cos^2 \lambda}{1+k_{\alpha}\eta} \varepsilon_{\alpha} + \frac{\sin^2 \lambda}{1+k_{\beta}\eta} \varepsilon_{\beta} - \frac{(1-\eta^2 k_{\alpha} k_{\beta}) \sin \lambda \cos \lambda}{(1+k_{\alpha}\eta)(1+k_{\beta}\eta)} \varepsilon_{\alpha\beta} + \\ &+ \eta \frac{\cos^2 \lambda}{1+k_{\alpha}\eta} \chi_{\alpha} + \eta \frac{\sin^2 \lambda}{1+k_{\beta}\eta} \chi_{\beta} - 2\eta \frac{\left(1 + \frac{\eta}{2}[k_{\alpha} + k_{\beta}]\right) \sin \lambda \cos \lambda}{(1+k_{\alpha}\eta)(1+k_{\beta}\eta)} \chi_{\alpha\beta}, \\ \chi_{RA} &= \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} \chi_{\beta} - \frac{\cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} \chi_{\alpha\beta}, \\ \tau_{RA} &= \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} \chi_{\alpha} - \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} \chi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Подставляя выражения (13) в (8), получаем:

$$\bar{\varepsilon}_{RA} = [Tr] \cdot \bar{\varepsilon}_{SH}, \quad (13)$$

где

$$[Tr] = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \lambda}{1+k_{\alpha}\eta} & \frac{\sin^2 \lambda}{1+k_{\beta}\eta} & -\frac{(1-\eta^2 k_{\alpha} k_{\beta}) \sin \lambda \cos \lambda}{(1+k_{\alpha}\eta)(1+k_{\beta}\eta)} & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \eta \frac{\cos^2 \lambda}{1+k_{\alpha}\eta} & \eta \frac{\sin^2 \lambda}{1+k_{\beta}\eta} & -\eta \frac{\left(2 + \frac{\eta}{2}[k_{\alpha} + k_{\beta}]\right) \sin \lambda \cos \lambda}{(1+k_{\alpha}\eta)(1+k_{\beta}\eta)} & & \\ \dots & 0 & \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} & -\frac{\cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} & \\ \frac{\sin \lambda \cos \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} & 0 & -\frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda + \sin^2 \lambda} & & \end{pmatrix} \quad (14)$$

$\bar{\varepsilon}_{SH}^* = \{\varepsilon_{\alpha}, \varepsilon_{\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha}, \chi_{\beta}, \chi_{\alpha\beta}\}$ – вектор деформаций оболочки.

В соответствии с [4] вектор относительных деформаций оболочки может быть разбит на 3 слагаемых, соответствующим направлениям перемещений:

$$\bar{\varepsilon}_{SH} = \sum_{k=1}^3 [O^k] \bar{\partial} u_k = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} [H^k] \\ [K^k][1] \\ [K^k][2] \\ [K^k][3]/2 \end{pmatrix} \bar{\partial} u_k, \quad (15)$$

где
$$\bar{\partial}^* = \left(1, \frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta}, \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)$$

– вектор-оператор производных; индекс k – указывает направление вдоль координатных осей и нормали; $[H^k]$ и $[K^k]$ – матрицы коэффициентов [4, с. 419] (геометрических характеристик срединной поверхности оболочки) при производных функций перемещений u_k в выражениях относительных тангенциальных и изгибных деформаций; $[K^k][i]$ – i -ая строка матрицы $[K^k]$.

Подставляя формулы (15) и (16) в (10), получаем формулу потенциальной энергии деформаций ребра, не совпадающего с линиями главных кривиз:

$$U_{RA} = \frac{E}{2} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \int_S \left([coef][O^k] \bar{\partial} u_k \right)^* [N_{RA}] \left([coef][O^l] \bar{\partial} u_l \right) dS. \quad (16)$$

4 Выражение угла наклона кривой ребра

Выражение косинуса угла между двумя кривыми на поверхности в произвольной косоугольной системе координат имеет вид [20, с. 222] (Рис. 2):

$$\cos \lambda = \frac{Ed\alpha\delta\beta + F(d\alpha\delta\beta + d\alpha\delta\beta) + Gd\beta\delta\beta}{\sqrt{Ed\alpha^2 + 2Fd\alpha\delta\beta + Gd\beta^2} \cdot \sqrt{E\delta\alpha^2 + 2F\delta\alpha\delta\beta + G\delta\beta^2}}. \quad (17)$$

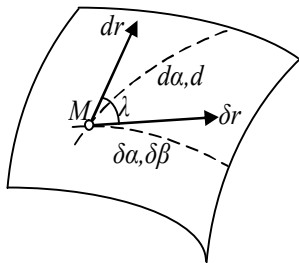


Рис. 2. Угол наклона между двумя кривыми на поверхности

Отложим поверхностные координатные линии (α, β) и кривую φ на двумерной плоскости (Рис. 4). Пусть ζ – угол наклона дифференциала $d\varphi$ произвольной кривой к дифференциалу $d\alpha$ координаты α на этой плоскости.

Тогда принимая в (14) $d\beta = 0$, угол на поверхности между произвольной кривой и координатой α поверхностной системы координат (Рис. 3) ($F = 0$) может быть выражен следующей формулой:

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{tg}^2 \zeta}}.$$

где A и B – коэффициенты 1-ой квадратичной формы.

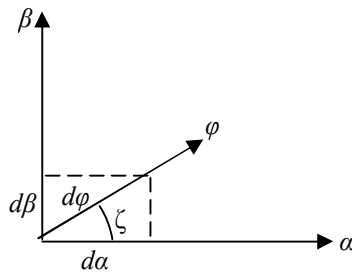


Рис. 4. Дифференциалы координат u и v .

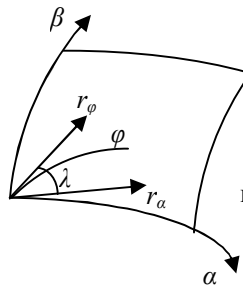


Рис. 3. Угол наклона между произвольной кривой и координатой α поверхностной системы координат

5 Коэффициент квадратичной формы ребра

Для определения дуги интегрирования, необходимо выразить коэффициент 1-ой квадратичной формы вдоль линии ребра через коэффициенты 1-ой квадратичной формы оболочки.

Производные координат α, β по координате ребра φ (Рис. 4):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \cos \zeta; \quad \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} = \sin \zeta. \quad (19)$$

Дифференциал радиус-вектора вдоль произвольной кривой, отвечающий смещению из точки M в точку M' :

$$dr = r_\alpha d\alpha + r_\beta d\beta. \quad (20)$$

Коэффициент, определяющий в бесконечно малом длину дуги, соединяющей эти 2 точки:

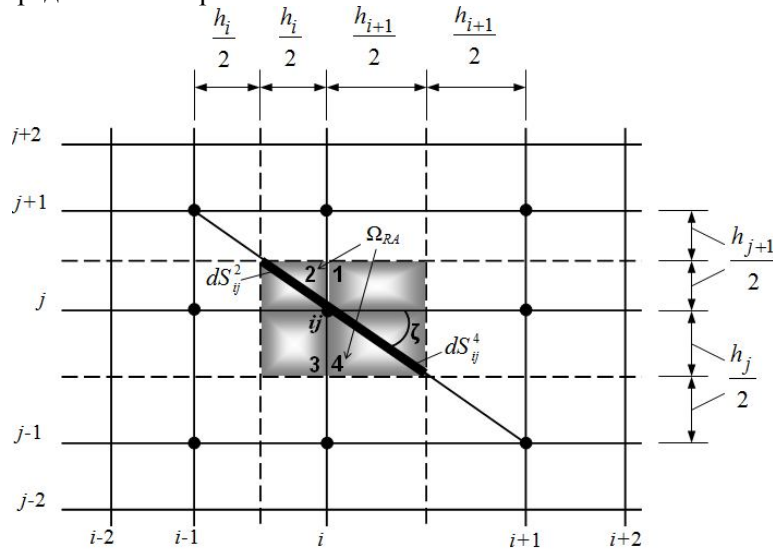
$$\begin{aligned} E_{RA} = r_\varphi r_\varphi &= \left(r_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + r_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 = r_\alpha^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 + 2r_\alpha r_\beta \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + r_\beta^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 = \\ &= A^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \right)^2 + 2F \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + B^2 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае ортогональной поверхностной системы координат ($F = 0$) с учётом соотношений (16), получается:

$$E_{RA} = A_{RA}^2 = A^2 \cos^2 \zeta + B^2 \sin^2 \zeta. \quad (22)$$

6 Подматрица жесткости ребра

Разностный шаблон с ребром, не совпадающим с линиями главных кривизн, представлен на рис. 5.



$$dS_{ij}^t = A_{RA}^{ij} d\tilde{S}_{ij}^t$$

$$d\tilde{S}_{ij}^1 = \frac{\sqrt{h_{i+1}^2 + h_{j+1}^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^2 = \frac{\sqrt{h_i^2 + h_{j+1}^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^3 = \frac{\sqrt{h_i^2 + h_j^2}}{2}; \quad d\tilde{S}_{ij}^4 = \frac{\sqrt{h_{i+1}^2 + h_j^2}}{2}.$$

Рис. 5. Разностный шаблон

Заменяя в соответствии с [4] вектор производных перемещений в окрестности узла ij , разностными отношениями, подматрица жесткости $[r_{kl}^{RA}]_{ij}$ ребра (см. (4)), не совпадающего с линиями кривизн, имеет структуру:

$$[r_{kl}^{Rq}]_{ij} = \sum_{t \in \Omega_{RA}} \int_{dS_{ij}^t} ([Tr][O^k]_q \cdot [d_t^{ij}])^* [N_{Rq}] ([Tr][O^l]_q \cdot [d_t^{ij}]) dS, \quad (23)$$

где Ω_{RA} – подобласти в окрестности узла ij , в которых проходит ребро, $\Omega_{RA} = 1..4$; $[d_t^{ij}]$ – матрицы коэффициентов разностных производных при узловых перемещениях для всех типов производных вектора $\bar{\delta}$ для каждого из квадрантов t . Матрицы $[d_t^{ij}]$ имеют такую же структуру, как и в книге [4].

Л и т е р а т у р а

1. Bradshaw R., Campbell D., Gargari M., Mirmiran A., Tripeny P. Special Structures: Past, Present, and Future // *Journal of Structural Engineering*. – 2006. – No. 6(128). – Pp. 691–709.
2. Кривошапко С.Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2013. – № 1. – С. 51–56.
3. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
4. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчёта оболочек неканонической формы. – Москва: РУДН, 2010. – 542с.
5. Zarutskii V. A. The theory and methods of the stress – strain analysis of ribbed shells // *International Applied Mechanics*. – 2001. – Vol. 36. – No. 10. – Pp. 1259–1283.
6. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкреплённых оболочек вращения. Ч.1 Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкреплённых оболочек вращения. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
7. Численные методы в теории упругости и теории оболочек оболочек: Учеб. пособие / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга, В. И. Савченков. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1986. – 154с.
8. Bushnell D. Computerized Analysis of Shells-Governing Equations // *Computers & Structures*. – 1984. – Vol. 18. – Pp. 471-536.
9. Дьяков И.Ф., Чернов С.А. К расчёту оболочки, укреплённой тонкостенными стержнями // *Автоматизация и современные технологии*. – 2008. – № 1. – С. 16–20.
10. Sinha G., Sheikh A. H., Mukhopadhyay M. A new finite element model for the analysis of arbitrary stiffened shells // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 1992. – Vol. 12. – No. 3–4. – Pp. 241–271.
11. Patel S.N., Datta P.K., Sheikh A. H. Dynamic Stability Analysis of Stiffened Shell Panels With Cutouts // *J. Appl. Mech*. – 2009. – Vol. 76. – No. 4. – Pp. 041004-1– 041004-13.
12. Savula Y. H., Jarmai K., Mukha I. S. Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs // *International Applied Mechanics*. – 2008. – Vol. 44. – No. 11. – Pp. 1309-1318.
13. Bouberguig A., Jirousek J. A family of special-purpose elements for analysis of ribbed and reinforced shells // *Computers & Structures*. – 1980. – Vol. 12 (2). – Pp. 253–264.
14. Abdyushev A. A. The principle of constructing a computation model of equilibrium ribbed stiffened shells in linear displacement-based FEM analysis // *Russian Aeronautics (Iz VUZ)*. – 2013. – Vol. 56. – No. 2. – Pp. 117–125.
15. Yang Henry T.Y., Saigal S., Masud A., Kapania R. K. A survey of recent shell finite elements // *Int. J. for Numerical Methods in Eng.* – 2000. – Vol. 47. – No. 1–3. – Pp. 101–127.
16. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинова А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392с.
17. Иванов В.Н., Кушнарченко И.В. Подкрепления в вариационно-разностном методе расчета оболочек сложной формы // *Вестник МГСУ*. – 2014. – № 5. – С. 25–34.
18. Иванов В.Н., Кушнарченко И.В. Расчёт подкреплённых пластинок с помощью вариационно-разностного метода (ВРМ), предназначенного для расчёта тонкостенных конструкций // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – 2014. – № 3. – С. 43–49.
19. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 544с.
20. Рашиевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М: URSS, 2008. – 428с.

21. Новожиллов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656с.

References

1. Bradshaw R, Campbell D, Gargari M, Mirmiran A, Tripeny P (2006). Special Structures: Past, Present, and Future. *Journal of Structural Engineering*. No. 6(128), pp. 691–709.
2. Krivoshapko SN (2013). On opportunity of shell structures in modern architecture and building. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No. 1, pp. 51–56.
3. Ivanov VN, Krivoshapko SN (2010). *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. M.: URSS, 560 p.
4. Ivanov VN, Krivoshapko SN (2010). *Analytical Methods for Calculation of Shells of Non-canonical Forms*: Monograph. Moscow: RUDN, 542 p.
5. Zarutskii VA (2001). The theory and methods of the stress–strain analysis of ribbed shells. *International Applied Mechanics*. Vol. 36, No. 10, pp. 1259–1283.
6. Karpov VV (2010). *Strength and stability of stiffened shells of revolution, in 2 parts, part 1: Research models and algorithms of strength and stability of stiffened shells of revolution*. Moscow: FIZMATLIT, 288 p.
7. Abovskij NP, Andreev NP, Deruga AP, Savchenkov VI (1986). Numerical methods in the theory of elasticity and theory of shells. Krasnojarsk: Izd-vo Krasnojarsk. un-ta, 154 p.
8. Bushnell D (1984). Computerized analysis of shells-governing equations. *Computers & Structures*. Vol. 18, pp. 471–536.
9. D'jakov IF, Chernov SA (2008). Counting of the envelope strength en with thin-walled rods. *Avtomatizacija i Sovremennye Tehnologii*. No. 1, pp. 16–20.
10. Sinha G, Sheikh AH, Mukhopadhyay M (1992). A new finite element model for the analysis of arbitrary stiffened shells. *Finite Elements in Analysis and Design*. Vol. 12, No. 3–4, pp. 241–271.
11. Patel SN, Datta PK, Sheikh AH (2009). Dynamic stability analysis of stiffened shell panels with cutouts. *J. Appl. Mech.* Vol. 76, No. 4, pp. 041004-1– 041004-13.
12. Savula YaH, Jarmai K, Mukha IS (2008). Analysis of shells reinforced by massive stiffening ribs. *International Applied Mechanics*. Vol. 44, No. 11, pp. 1309–1318.
13. Bouberguig A, Jirousek J (1980). A family of special-purpose elements for analysis of ribbed and reinforced shells. *Computers & Structures*. Vol. 12, No. 2, pp. 253–264.
14. Abdyushev AA (2013). The principle of constructing a computation model of equilibrium ribbed stiffened shells in linear displacement-based FEM analysis. *Russian Aeronautics (Iz VUZ)*. Vol. 56, No. 2, pp. 117–125.
15. Yang Henry TY, Saigal S, Masud A, Kapania RK (2000). A survey of recent shell finite elements. *Int. J. for Numerical Methods in Eng.* Vol. 47, No. 1–3, pp. 101–127.
16. Golovanov AI, Tuleneva ON, Shigabutdinov AF (2006). *Finite Elements Method in the Static and Dynamic of The Thin-Shell Constructions*. Moscow: FIZMATLIT, 392 p.
17. Ivanov VN, Kushnarenko IV (2014). Stiffeners in variational-difference method for calculating shells with complex geometry. *Vestnik MGSU*. No. 5, pp. 25–34.
18. Ivanov VN, Kushnarenko IV (2014). Calculation of reinforced plates by variational-difference method (VDM), designed for calculation of thin structures. *Structural mechanics and analysis of constructions*. No. 3, pp. 43–49.
19. Gol'denvejzer AL (1953). *Theory of thin elastic shells*. M.: GITTL, 544 p.
20. Rashevskij PK (2008). *Course of the Differential Geometry*. Moscow: URSS, 428 p.
21. Novozhilov VV, Chernyh KF, Mihajlovskij EI (1991). *Linear Theory of Thin Elastic Shells*. L.: Politehnika, 656 p.

AN ACCOUNT OF RIBS, THAT DON'T COINCIDE WITH LINES OF PRINCIPAL CURVATURES, IN A SHELL ANALYSIS BY VARIATIONAL-DIFFERENCE METHOD

I.V. Kushnarenko,

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow

It is considered stiffeners, that don't coincide with lines of principal curvatures, in the variational-difference method (BPM) analysis of shells of complex shape defined in the lines of the principal curvatures. Ribs are described by the Kirchhoff-Clebsch theory of curved bars: a tension, a bending and a torsion of a rib are taken into account; shells are described by the Kirchhoff-Love theory of thin elastic shells.

KEY WORDS: reinforcements, ribs, ribbed shells, ribs not in lines of curvature, form-finding, numerical methods, variational-difference method, total potential energy.