К РАСЧЕТУ РАМ ИЗ НЕУПРУГИХ СОСТАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.А. РОЧЕВ, *канд. техн. наук, доцент*
Петрозаводский государственный университет,
185026, Республика Карелия, г. Петрозаводск, пр. Комсомольский, дом 15, кв. 120. Электронный адрес: metalll@bk.ru

В работе рассматривается деформационный расчет сжато-изогнутых рам из неупругих составных элементов, имеющих переменное поперечное сечение и переменную жесткость связей сдвига по длине с учетом влияния теплового воздействия. В основу решения положена теория упругих составных стержней А.Р. Ржаницына. Статическая неопределимость рам раскрыта методом деформаций. Получено выражения для определения эквивалентного модуля деформаций, который учитывает сжимаемость ветвей, деформации сдвига материала ветвей, составляющих стержень, развитие неупругих силовых деформаций в них и влияние температурных деформаций.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сжато-изогнутая рама, деформационный расчет, тепловое воздействие, эквивалентный модуль деформаций.

Исследуются неупругие рамные системы, включающие в себя составные элементы, имеющие переменное поперечное сечения и переменную жесткость связей на сдвиг по длине элементов.

В работе используются основные положения общей теории упругих составных стержней, разработанной А.Р. Ржаницыным [1]. Для материала ветвей и связей между ветвями устанавливается произвольная зависимость между деформациями и напряжениями. Применяется гипотеза о нелинейно - упругом материале. Раскрытие статической неопределимости рамной системы осуществляется методом деформаций с учетом влияния продольных сил, возникающих в элементах при деформировании рам под действием нагрузки. Предполагается линейное изменение температуры по высоте поперечного сечения элементов рамы.

Для определения перемещений плоской рамы элементы многоконтурного стержня рамы делятся по длине на участки постоянной жесткости (в общем случае неравные) длиной l_j между узловыми точками j и $j+1$. В узлы элементов рамы вводятся дополнительные моментные $1j$ и силовые $2j$ связи, препятствующие их перемещениям. Многоконтурный стержень рамы с введенными связями образует основную систему метода деформаций. Расчет такой рамы производится шаговым методом [2].

Для определения реакций во введенных связях j-й участок элемента рамы рассматривается как жестко защемленный по концам составной стержень длиной l_j или стержень, защемленный на одном конце и шарнирно опертый на другом конце. Дифференциальные уравнения для определения сдвигающих усилий $T_j^{(i)}$ в шве и прогибов $y_j^{(i)}$ упругого двухветвевого ($n=2$) составного элемента были получены в [1]. При работе за пределом упругости эти уравнения для j-го участка стержня рамы, в котором действует продольная сила $N_j^{(i)}$, на i-м шаге загружения, с учетом влияния температурного воздействия будут иметь вид

$$T_j''^{(i)} = \lambda_{tj}^{2(i)} T_j^{(i)} + \xi_{tj}^{(i)} \Delta_{tjo}^{(i)}, \tag{1}$$

$$C_{txj}^{equ(i)} y_j''^{(i)} = T_j^{(i)} \cdot c_j - M_{xj}^{(i)}, \tag{2}$$

где $M_{xj}^{(i)}$ - изгибающий момент в составном стержне, лишенном связей сдвига; $C_{txj}^{equ(i)}$ - суммарная эквивалентная жесткость ветвей составного элемента на на j-ом участке элемента рамы при i-ом шаге нагружения равная

$$C_{txj}^{equ(i)} = \sum_{\upsilon=1}^{n}(E_{tj\upsilon}^{equ(i)} J_{xj\upsilon}), \qquad (3)$$

здесь $E_{tj\upsilon}^{equ(i)}$ - эквивалентный модуль деформаций для сечений υ -й ветви j-го участка элемента рамы на i-м шаге нагружения с учетом влияния температурных деформаций этой ветви; $J_{xj\upsilon}$ - момент инерции поперечного сечения υ-й ветви постоянный по длине j-го участка элемента рамы:

$$\Delta_{tjo}^{(i)} = N_{j1}^{(i)} / (E_{cjo1}^{(i)} A_{j1}) + \varepsilon_{toj1} - N_{j2}^{(i)} / (E_{cjo2}^{(i)} A_{j2}) + \varepsilon_{toj2} - c_j M_{xj}^{(i)} / C_{txj}^{equ(i)}, \qquad (4)$$

здесь $N_{j1}^{(i)}$ и $N_{j2}^{(i)}$- продольные усилия, возникающие в ветвях 1 и 2, на i-м шаге нагружения; $\varepsilon_{toj1}^{(i)}$ и $\varepsilon_{toj2}^{(i)}$- температурные деформации осевых волокон ветвей 1 и 2; A_{j1} и A_{j2} - площадь поперечного сечения ветвей 1 и 2 j-го участка элемента рамы; c_j - расстояние между центрами тяжести ветвей составного элемента; $E_{cjo1}^{(i)}$ и $E_{cjo2}^{(i)}$ - секущие модули деформаций осевых волокон ветвей 1 и 2 на i-м шаге нагружения;

$$\lambda_{tj}^{(i)} = \sqrt{\xi_{tj}^{(i)}[\sum_{\upsilon=1}^{n}(1/(E_{cj\upsilon}^{(i)} A_{j\upsilon}) + c_j^2 / C_{txj}^{equ(i)}]}, \qquad (5)$$

здесь $\xi_{tj}^{(i)}$ - коэффициент жесткости продольных связей сдвига на j-м участке элемента рамы при i-м шаге нагружения, рассчитанный по [1], с учетом температурных деформаций частей конструкции, образующей эти связи.

Величина $E_{tj\upsilon}^{equ(i)}$ в (3) определяется по формуле, которая получена автором данной статьи аналогично формуле, опубликованной в [3] и использованной в [4]:

$$E_{tj\upsilon}^{equ(i)} = \frac{M_{xj\upsilon}^{(i-1)} h_{j\upsilon}(1 - \varepsilon_{oj\upsilon}^{(i-1)} + \varepsilon_{toj\upsilon}^{(i-1)})}{(\Delta\bar{\varepsilon}_{j\upsilon}^{(i-1)} - \gamma_{1j\upsilon}^{(i-1)} h_{j\upsilon} Q_{yj\upsilon}^{\prime(i-1)} + \alpha_j \Delta t_{j\upsilon}^{(i-1)}) J_{xj\upsilon}}, \qquad (6)$$

где $M_{xj\upsilon}^{(i-1)}$ - наибольший изгибающий момент, действующий в сечении υ -й ветви j-го участка элемента рамы на $(i-1)$-м шаге нагружения; $h_{j\upsilon}$ - высота поперечного сечения υ-ой ветви j-го участка элемента рамы; $\varepsilon_{oj\upsilon}^{(i-1)}$ и $\varepsilon_{toj\upsilon}^{(i-1)}$ - линейная деформация оси υ-й ветви j-го участка элемента рамы на $(i-1)$-м шаге нагружения соответственно от силового и температурного воздействия; $\Delta\varepsilon_{j\upsilon}^{(i-1)} = \varepsilon_{1j\upsilon}^{(i-1)} - \varepsilon_{2j\upsilon}^{(i-1)}$; $\varepsilon_{1j\upsilon}^{(i-1)}$ и $\varepsilon_{2j\upsilon}^{(i-1)}$ - краевые линейные деформации в волокнах поперечного сечения υ-й ветви j-го участка элемента рамы, возникающие в соответствии с гипотезой плоских сечений на (i – 1) -м шаге нагружения от силового воздействия; $\gamma_{t1j\upsilon}^{(i-1)}$ - угол сдвига υ-й ветви на j-м участке элемента рамы от единичной поперечной силы при (i – 1)-м шаге нагружения с учетом влияния изменения температуры; $Q_{yj\upsilon}^{\prime(i-1)}$- первая производная от поперечной силы, действующей в υ-ой ветви j-го участка элемента рамы при (i – 1)-м шаге нагружения; α_j- коэффициент теплового линейного расширения для материала рамы; $\Delta t_{\upsilon j}^{(i-1)}$ - разность температуры краевых волокон υ-й ветви составного элемента в плоскости изгиба j-го участка стержня рамы.

Используя операционное исчисление [5] сведем решение дифференциальных уравнений (1) и (2) к решению алгебраических уравнений (для случая отсутствия свободы сдвигов в торцах j-го защемленного по концам участка стержня рамы, где $T_{jo}'^{(i)} = 0$ и $T_{jl_j}'^{(i)} = 0$,

$$T_j^{(i)} = T_{jo}^{(i)} t_o^{(i)} + M_{jo}^{(i)} t_1^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} t_2^{(i)} - N \cdot y \cdot t_3^{(i)}, \tag{7}$$

$$y_j^{(i)} = T_j^{(i)} \nu_o^{(i)} + M_{jo}^{(i)} \nu_1^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} \nu_2^{(i)}, \tag{8}$$

где $T_{jo}^{(i)}, M_{jo}^{(i)}$ и $Q_{jo}^{(i)}$ - соответственно сдвигающая сила, изгибающий момент и поперечная сила на левой опоре j-го участка стержня рамы (в сечении $z_j = 0$) при отсутствии на нем поперечной нагрузки;

$$t_{oj}^{(i)} = ch(\lambda_{tj}^{(i)} x), \qquad t_{1j}^{(i)} = c_j \xi_{tj}^{(i)} [ch(\lambda_{tj}^{(i)} x) - 1]/(E_{tj\upsilon}^{equ(i)} J_{xj} \lambda_{tj}^{2(i)}),$$

$$t_{2j}^{(i)} = c_j \xi_{tj}^{(i)} [sh(\lambda_{tj}^{(i)} x)/\lambda_{tj}^{(i)} - x]/(E_{tj\upsilon}^{equ(i)} J_{xj} \lambda_{tj}^{2(i)}),$$

$$t_{3j}^{(i)} = c_j \xi_{tj}^{(i)} sh(\lambda_{tj}^{(i)} x)/(E_{tj\upsilon}^{equ(i)} J_{xj}^{(i)} \lambda_{tj}^{(i)}), \tag{9}$$

$$\nu_{oj}^{(i)} = c_j \sin(\alpha_{tj}^{(i)})/(E_{tj\upsilon}^{equ(j)} J_{xj} \alpha_{tj}^{(i)}), \qquad \nu_{1j}^{(i)} = [1 - \cos(\alpha_{tj}^{(i)} x)]/(E_{tj\upsilon}^{equ(j)} J_{xj} \alpha_{tj}^{2(i)}),$$

$$\nu_{2j}^{(i)} = [x - \sin(\alpha_{tj}^{(i)} x)/\alpha_{tj}^{(i)}]/(E_{tj\upsilon}^{equ(j)} J_{xj} \alpha_{tj}^{2(i)}),$$

здесь $\alpha_{tj}^{(i)} = \sqrt{N_j^{(i)} / C_{txj}^{equ(i)}})$.

Из (8) для левой опоры, где $y_j'^{(i)} = 0$ получаем уравнение

$$T_j'^{(i)} \nu_o^{(i)} + T_j^{(i)} \nu_o'^{(i)} + M_{jo}^{(i)} \nu_1'^{(i)} - Q_{jo}^{(i)} \nu_2^{(i)} - N_j^{(i)} (y_j'^{(i)} \cdot t_{j3}^{(i)} + y_j^{(i)} \cdot t_{j3}'^{(i)}) = 0. \tag{10}$$

Система линейных алгебраических уравнений (7), (8) и (10) в матричном виде будет иметь вид

$$\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{B}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{A}$ - квадратная матрица коэффициентов при неизвестных в системе уравнений; $\boldsymbol{B}$ - вектор свободных членов системы уравнений; $\boldsymbol{Z}$ - вектор неизвестных усилий:

$$\boldsymbol{Z} = [T_{jo}^{(i)}, M_{jo}^{(i)}, Q_{jo}^{(i)}]. \tag{12}$$

В системе уравнений (11) матрица $\boldsymbol{A}$ будет включать нижеследующие элементы, полученные из (9) при $x = l_j$:

$$A_{11j}^{(i)} = t_{ojl}'^{(i)}, \quad A_{12j}^{(i)} = t_{1jl}'^{(i)}, \quad A_{13j}^{(i)} = -t_{2jl}'^{(i)},$$

$$A_{21j}^{(i)} = t_{ojl}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)}, \quad A_{22j}^{(i)} = t_{1jl}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} + \nu_{1jl}^{(i)}, \quad A_{23j}^{(i)} = t_{ol}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} - \nu_{2jl}^{(i)}, \tag{13}$$

$$A_{31j}^{(i)} = t_{ojl}'^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} + t_{ojl}^{(i)} \nu_{ojl}'^{(i)}, \quad A_{32j}^{(i)} = t_{1jl}'^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} + \nu_{1jl}'^{(i)} + t_{1jl}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)},$$

$$A_{33j}^{(i)} = -t_{1jl}'^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} - t_{2jl}^{(i)} \nu_{ojl}'^{(i)} - \nu_{2jl}^{(i)}.$$

Вектор $\boldsymbol{B}$ для случая смещения правой опоры на $\delta = 1$ будет включать следующие элементы:

$$B_{1j}^{(i)} = (y_{jl}'^{(i)} t_{3jl}^{(i)} - y_{jl}^{(i)} t_{ojl}'^{(i)}) N_j^{(i)}, \qquad B_{2j}^{(i)} = \kappa_{tj}^{(i)} \nu_{1jl}^{(i)} + 1 + y_{jl}^{(i)} t_{3jl}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} N_j^{(i)}, \tag{14}$$

$$B_{3j}^{(i)} = (y_{jl}^{(i)} t_{3jl}^{(i)} \nu_{ojl}^{(i)} + y_{jl}'^{(i)} t_{3jl}^{(i)} \nu_{ojl}'^{(i)} + y_{jl}^{(i)} t_{3jl}^{(i)} \nu_{ojl}'^{(i)}) N_j^{(i)} + \kappa_{tj}^{(i)} \nu_{1jl}'^{(i)},$$

где $\kappa_{tj} = \alpha_j \cdot \Delta t_j^{(i)} / h_j$; $\Delta t_j^{(i)}$ - разность температур краевых волокон составного элемента; h_j - высота поперечного сечения составного элемента.

Аналогично с использованием (11) можно найти опорные реакции для других случаев: поворот правой опоры на угол $\varphi = 1$, шарнирное опирание j-го стержня на правую опору, отсутствия препятствий для сдвига в шве на опорах составного элемента.

Перемещения узлов стержня рассматриваемой рамы $Z_{1j}^{(i)}$ и $Z_{2j}^{(i)}$ определяются из совместного решения уравнений:

$$\sum_{r=1}^{m}(R_{t1j1r}^{(i)}Z_{1r}^{(i)} + R_{t1j2r}^{(i)}Z_{2r}^{(i)}) + R_{1jp}^{(i)} + R_{1jt}^{(i)} = 0\,, \qquad (15)$$

$$\sum_{r=1}^{m}(R_{t2j1r}^{(i)}Z_{1r}^{(i)} + R_{t2j2r}^{(i)}Z_{2r}^{(i)}) + R_{2jp}^{(i)} + R_{2jt}^{(i)} = 0\,, \qquad (16)$$

где $R_{t1j1r}^{(i)}$ и $Rt_{1j2r}^{(i)}$ - реакции в связях $1j$ основной системы метода деформаций от единичного перемещения связей $1r$ и $2r$, определенные с учетом влияние продольных сил на i-м шаге нагружения; $R_{t2j1r}^{(i)}$ и $R_{t2j2r}^{(i)}$ - тоже, но в связях $2j$; $R_{1jp}^{(i)}$ и $R_{2jp}^{(i)}$ - реакции в связях $1j$ и $2j$ от силового воздействия на i-м шаге нагружения; $R_{1jt}^{(i)}$ и $R_{2jt}^{(i)}$ - реакции в связях $1j$ и $2j$ от теплового воздействия на i-м шаге нагружения; m - число узлов с введенными дополнительными связями. Найденные усилия на опорах j-го стержня при $\delta = 1$ и $\varphi = 1$ далее используются как реакции в связях $R_{t1j1r}^{(i)}$, $R_{t1j2r}^{(i)}$, $R_{t2j1r}^{(i)}$ и $R_{t2j2r}^{(i)}$ в уравнениях (15) и (16).

Деформационный расчет рамы с учетом теплового воздействия осуществляется с использованием эквивалентного модуля деформаций $E_{tj\upsilon}^{equ(i)}$, величина которого рассчитывается на каждом следующем шаге расчета по результатам, полученным на предыдущем шаге расчета. Значения параметров, характеризующих НДС рамной системы, найденные на i-м шаге нагружения, могут быть в дальнейшем использованы для проверки прочности и устойчивости сжато-изогнутых рам методом проф. Р.С. Санжаровского [6], а также для решения задач, аналогичных рассмотренным в работе[7].

Литература

1. *Ржаницын А.Р.* Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. 314 с.
2. *Биргер И.А.* Общие алгоритмы решения задач теории упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука , 1975. – С.61 – 73.
3. *Рочев А.А.* Нелинейная теория расчета сквозных упругопластических статически неопределимых рамных систем // Доклады 58-й конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. В 3 ч. Ч. 1. – СПб.: СПбГАСУ, 2001. – С.93 – 94.
4. *Рочев А.А.* Алгоритм нелинейного расчета круговой составной арки // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. Сер. « Естественные и технические науки». – 2010. – №2 (107). – С.25-29.
5. *Араманович И.Г.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости /И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
6. *Санжаровский Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. – 280 с.
7. *Chi Kin Iu*, *Siu Lai Chan* A simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire // Journal of Constructional Steel Research, Volume 60, Issue 10, October 2004. – P. 1495-1524.

References

1. *Rzhanitzin, AR* (1986). Composite rods and plates. M.: Stroyizdat, 314 p.

2. *Birger, LA* (1975). Common algorithms for solving problems in the theory of elasticity, plasticity and creep. *Uspehi Mechaniki Deformiraemyh Sred*, M.: Nauka, p. 61-73.

3. *Rochev, AA* (2001). Nonlinear theory of analysis of elastic-and-plastic statically indeterminate frame systems. *Proceedings of the 58th Conference of professors, teachers, researchers, engineers and graduate students*. Part 1, St. Petersburg: SPGASU, p. 93 – 94.

4. *Rochev, AA* (2010). Algorithm for non-linear analysis of circular composite arch. Proceedings of Petrozavodsk State University. Ser. "Natural and engineering sciences.", Number 2 (107), p. 25-29.

5. *Aramanovich, IG, Luntz, GL, Èl'sgol'ts LE* (1968). *Functions of Complex Variable. Operational Calculus. Theory of Stability*. M .: Science, 1968. 416 p.

6. *Sanzharovskiy, RS* (1984). *Stability of Structural ELements under Creep*. L.: Izd-vo LGU, 280p.

7. *Chi Kin Iu*, *Siu Lai Chan* A (2004). Simulation-based large deflection and inelastic analysis of steel frames under fire. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 60, Iss. 10, p. 1495-1524.

ON ANALYSIS OF FRAMES MADE OF NON-ELASTIC COMPOSITE ELEMENTS WITH TERMAL ACTION TAKEN INTO ACCOUNT

Rochev A.A.
Petrozavodskiy Gosudarstvenniy Universitet, Petrozavodsk

In this paper, the author solves the problem of calculating the deformation compressed-bent frames of inelastic composite elements having a variable cross-section and variable stiffness relations shift lengths for the effects of heat. The solution is based on the A.R. Rzhanitsin's theory of elastic composite bars. Static indeterminacy frames revealed by deformation. The expressions for the equivalent modulus of deformation, which takes into account the compressibility of the branches, the branches of the shear deformation of the material, form the backbone of the development of inelastic deformation in them, and the effect of temperature deformations.

KEY WORDS: compressed-bent frame deformation calculation, thermal effects, equivalent modulus of deformation.