Теория упругости

ПОТЕРЯННЫЕ БЫСТРЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ДЛИННОЙ ПОЛОСЫ

Е.М. ЗВЕРЯЕВ, *д-р техн. наук, профессор*
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
zveriaev@mail.ru

Рассмотрена модельная задача построения приближенных уравнений изгиба длинной тонкой полосы методом простых итераций. Полученные разрешающие уравнения в главных членах совпадают с уравнениями сопротивления материалов и дают формулы для всех искомых неизвестных теории упругости, находясь в согласии с методами Сен-Венана, Рейсснера и Тимошенко для медленно меняющихся величин. Получены новые уравнения типа пограничного слоя для быстро меняющихся величин при сосредоточенных нагрузках и других сингулярных возмущениях.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: полоса, балка, сосредоточенная нагрузка, малый параметр

Введение. Задачей сопротивления материалов, как одного из разделов механики сплошной среды, является определение деформаций и напряжений в твёрдом упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию. Эта же задача среди других рассматривается в курсе теории упругости. Однако методы решения этой общей задачи в том и другом курсах существенно отличаются друг от друга. Сопротивление материалов решает её главным образом для бруса, базируясь на ряде гипотез геометрического и физического характера. Такой метод позволяет получить достаточно простые формулы для вычисления напряжений. Выделяются три основные элементарные задачи: растяжение-сжатие, кручение и изгиб бруса. Задачи растяжения сжатия и кручения в сопротивлении материалов и теории упругости в рамках принципа Сен-Венана рассматриваются практически одинаково. Задача изгиба в теории упругости не рассматривается. Хотя имеется описание построения решения для балки (полосы) с помощью полиномов в книгах А.И. Лурье [1, 2] (см. также книги по теории упругости С.П. Тимошенко, М.М. Филоненко-Бородича, Снеддона и Берри, и др., в которых излагается один и тот же подход), оно является скорее иллюстрацией отсутствия связи между теорией упругости и сопротивления материалов в задаче изгиба. Очевидно, что если строится решение задачи теории упругости для балки, то главные уравнения должны совпадать. Этого как раз и нет в книгах указанных авторов: уравнения не выводятся. Поэтому в настоящей работе выводятся упрощенные уравнения путем отбрасывания второстепенных членов в сложных уравнениях упругости. Полученные уравнения в главных членах совпадают с уравнениями сопротивления материалов. Остальные уравнения дают возможность вычислить не определяемые в сопротивлении материалов поперечное напряжение и перемещение, а также продольные перемещения точек поперечного сечения. Причем эти уравнения содержат кроме классических быстро меняющиеся решения и в принципе могут быть уточнены в следующих приближениях. Построенная таким образом теория балки указывает путь построения непротиворечивых теорий пластин, оболочек и тонкостенных стержней (в том числе из композиционных материалов), в которых выполняются все граничные условия на краях и на лицевых поверхностях. Такая теория пластин была построена Рейсснером [3] с помощью гипотез и конструктивным путем в работе [4].

Построение решения. Размерные уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние полосы, имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_z^*}{\partial z^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial x^*}=0,\quad \frac{\partial\sigma_x^*}{\partial x^*}+\frac{\partial\tau^*}{\partial z^*}=0,\\
&\sigma_x^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right),\quad \tau^*=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma,\quad \sigma_z^*=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right),\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w^*}{\partial z^*},\quad \varepsilon_x=\frac{\partial u^*}{\partial x^*},\quad \gamma=\frac{\partial u^*}{\partial z^*}+\frac{\partial w^*}{\partial x^*}.
\end{aligned}\tag{1}
$$

Здесь σ_x^*, σ_z^* − нормальные напряжения, τ^* − касательное напряжение, ε_x, ε_z − компоненты нормальной деформации, γ − сдвиг, E − модуль Юнга, ν − коэффициент Пуассона, u, w − перемещения вдоль осей x^* и z^* соответственно. Звездочками отмечены размерные неизвестные задачи.

Введем безразмерные координаты $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, безразмерные перемещения $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^*, z^* соответственно и безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$, $\tau = \tau^*/E$. После подстановки этих выражений в систему (1) она приводится к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial x}=0,\\
&\sigma_x=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right),\quad \tau=\frac{1}{2\left(1+\nu\right)}\gamma,\quad \sigma_z=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right),\\
&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \varepsilon_x=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma=\frac{\partial u}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}\tag{2}
$$

Здесь $\varepsilon = h/l$ – малый параметр.

Уравнения плоской задачи теории упругости (2), преобразуем следующим образом. В последнем уравнении системы заменим γ на τ, т.к. в четвертом уравнении системы они отличаются только множителем $2\left(1+\nu\right)$. Последнее уравнение с учетом замены γ на τ перепишем так $\frac{\partial u}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}+2\left(1+\nu\right)\tau$.

Два соотношения упругости для нормальных компонент напряжений $\sigma_x=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_z\right)$, $\sigma_z=\frac{1}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_x\right)$ разрешим относительно двух величин ε_x и σ_z таким образом $\sigma_x=\varepsilon_x+\nu\sigma_z$, $\varepsilon_z=\left(1-\nu^2\right)\sigma_z-\nu\varepsilon_x$, и запишем уравнения (2) в следующей последовательности:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}+2\left(1+\nu\right)\tau,\quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial x},\\
&\varepsilon_x=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_x=\varepsilon_x+\nu\sigma_z,\quad \varepsilon_z=\left(1-\nu^2\right)\sigma_z-\nu\varepsilon_x,\\
&\frac{\partial w}{\partial z}=\varepsilon_z,\quad \frac{\partial\tau}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}.
\end{aligned}\tag{3}
$$

Предположим, что поперечные перемещения w и касательные напряжения τ известны. Тогда подставляя w и τ в первое уравнение и τ во второе

$$
\frac{\partial u}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}+2\left(1+\nu\right)\tau,\quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\varepsilon\frac{\partial\tau}{\partial x},
$$

путем интегрирования по z вычисляем продольное перемещение u и поперечное нормальное напряжение σ_z. Зная u, можно путем дифференцирования по

x вычислить продольную деформацию $\varepsilon_x = \varepsilon(\partial u/\partial x)$. С помощью преобразованных соотношений упругости $\sigma_x = \varepsilon_x + \nu\sigma_z$ и $\varepsilon_z = \left(1-\nu^2\right)\sigma_z - \nu\varepsilon_x$ алгебраически вычисляются продольное напряжение σ_x и величина поперечной деформации ε_z. Затем последние уравнения системы $\dfrac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z$, $\dfrac{\partial \tau}{\partial z} = -\varepsilon\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ позволяют путем прямого интегрирования по z вычислить w и τ. Если функции w и τ являются точным решением системы (3), то они совпадут с исходными w и τ, взятыми в начале цепочки вычислений. Но поскольку точные решения задач теории упругости обычно не известны, в качестве исходных величин можно взять некоторые функции w_0, τ_0 как величины нулевого приближения и в конце описанной последовательности вычислений получить величины w_1, τ_1 в первом приближении, сравнив их с исходными w_0, τ_0. Описанная здесь последовательность вычислений, если считать не принципиальным промежуточные алгебраические вычисления по соотношениям упругости, является процедурой двукратного применения метода последовательных приближений Пикара [5].

С целью нахождения приближенного решения примем, что поперечные перемещения и касательные напряжения в нулевом приближении равномерно распределены по высоте полосы, т.е. не зависят от координаты z.

В соответствии с этим, положив в первом и втором уравнениях системы (3) $w = w_0(x)$ $\tau = \tau_0\left(x\right)$ в качестве известных величин нулевого приближения, вычисляем u_0 и σ_{z0}. Затем вычисляем ε_{x0} и через соотношения упругости находим σ_{x0} и ε_{z0}. Подставляя их в два последних уравнения системы, получаем w_1 и τ_1 в первом приближении. Процесс вычисления следующих приближений может быть продолжен. Для наглядности анализа начальное приближение в силу линейности задачи разделим на три:

$$w = w_0\left(x\right), \quad \tau = \tau_0 = 0, \tag{4}$$

$$w = w_0 = 0, \quad \tau = \tau_0\left(x\right), \tag{5}$$

$$\tau = \tau_0 = 0, \quad w = w_0 = 0, \tag{6}$$

Процесс вычисления искомых неизвестных, исходя из соотношений (4), (5) и (6) назовем w-процессом, τ-процессом и 0-процессом соответственно. В первом процессе все искомые неизвестные будут выражены через величину начального приближения w_0 как частные решения задачи (3) при заданных величинах (4), во втором – аналогично через τ_0, а в третьем – через произвольные функции интегрирования однородной относительно величин начального приближения задачи. Очевидно, что механический смысл задачи (4) заключается в гипотезах недеформируемой нормали и сохранении угла нормали к изогнутой линии прогиба балки, используемых также при построении теории пластин и оболочек. Задача (5) отвечает проблеме учета касательного напряжения не только в величине поперечного прогиба (как это происходит при построении уравнений теории типа Тимошенко) но и учета касательного напряжения во всех искомых величинах задачи теории упругости. Задача (6) заключается в вычислении величин растяжения-сжатия полосы в продольном и поперечном направлении.

Вычисление компонент НДС дает:

в w-процессе:

$$w = w_0(x),\ \tau_0 = 0,\ u_0 = -\varepsilon w_0' z,\ \sigma_{z0} = 0,\ \varepsilon_{x0} = -\varepsilon^2 w_0'' z,$$

$$\sigma_{x0} = -\varepsilon^2 w_0'' z,\ \varepsilon_{z0} = \nu\varepsilon^2 w_0'' z,\ w_1 = \nu\varepsilon^2 w_0'' z^2/2,\ \tau_1 = \varepsilon^3 w_0''' z^2/2;$$

в τ-процессе:

$$w_0 = 0,\ \tau = \tau_0(x),\ u_0 = 2(1+\nu)\tau_0 z,\ \sigma_{z0} = -\varepsilon\tau_0' z,$$

$$\varepsilon_{x0} = 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0' z,\ \sigma_{x0} = (2+\nu)\varepsilon\tau_0' z,\ \varepsilon_{z0} = -(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' z,$$

$$w_1 = -(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' z^2/2,\ \tau_1 = -(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' z^2/2;$$

в 0-процессе:

$$w_0 = 0,\ \tau_0 = 0,\ u_0 = u_0(x),\ \sigma_{z0} = \sigma_{z0}(x),\ \varepsilon_{x0} = \varepsilon u_0',$$

$$\sigma_{x0} = \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0},\ \varepsilon_{z0} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0',$$

$$w_1 = \left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0'\right]z,\ \tau_1 = \left(-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right)z.$$

Штрихом обозначено дифференцирование по x. Индекс 0 указывает на то, что в каждом процессе вычисляются величины через исходную величину нулевого приближения. Произвольные функции интегрирования u_0, σ_{z0} зависят только от x. Выражения искомых неизвестных в первом приближении записываются в виде покомпонентной суммы вычисленных в каждом процессе искомых величин:

$$\begin{aligned}
&w = w_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' z^2/2 - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' z^2/2 + \left[\left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0'\right]z,\\
&\tau = \varepsilon^3 w_0''' z^2/2 + \tau_0 - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' z^2/2 + \left(-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right)z,\\
&u = -\varepsilon w_0' z + 2(1+\nu)\tau_0 z + u_0,\\
&\sigma_z = -\varepsilon\tau_0' z + \sigma_{z0},\\
&\varepsilon_x = -\varepsilon^2 w_0'' z + 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0' z + \varepsilon u_0',\\
&\sigma_x = -\varepsilon^2 w_0'' z + (2+\nu)\varepsilon\tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0},\\
&\varepsilon_z = \nu\varepsilon^2 w_0'' z - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' z + \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0'.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Неизвестные задачи теории упругости выражены через четыре функции $w_0, \tau_0, \sigma_{z0}, u_0$, уравнения, для определения которых, получаются из граничных условий на длинных сторонах полосы.

Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы. На стороне полосы $z^* = h$ должны выполняться условия $\tau^* = 0$, $\sigma_z{}^* = q^*$. На стороне $z^* = -h$ напряжения отсутствуют: $\tau^* = \sigma_z^* = 0$. В безразмерном виде эти условия запишутся так:

$$\tau = \sigma_z = 0 \text{ при } z = -1$$

$$\tau = 0,\ \sigma_z = q \text{ при } z = 1.$$

Здесь введено обозначение для безразмерной нагрузки $q = q^*/E$.

Граничные условия будем удовлетворять величинами первого приближения (7). Напряжение τ имеет вид

$$\tau = \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{z^2}{2} + \tau_0 - \left(\varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right)z.$$

Напряжение σ_z вычисляется с помощью второго уравнения системы (7) и последнего уравнения системы (3):

$$\sigma_z = -\left[\varepsilon^4 w_0^{IV} - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0'''\right]\frac{z^3}{6} - \varepsilon\tau_0' z + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''\right)\frac{z^2}{2} + \sigma_{z0}.$$

После подстановки напряжений τ, σ_z в граничные условия (3.9) получим четыре уравнения для определения функций w_0, τ_0, u_0, σ_{z0}

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{1}{2} + \tau_0 - \left(\varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right),\\
\tau(-1) &= \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{1}{2} + \tau_0 + \left(\varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right),\\
\sigma_z(1) &= -\left[\varepsilon^4 w_0^{IV} - (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''\right]\frac{1}{6} - \varepsilon\tau_0' + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''\right)\frac{1}{2} + \sigma_{z0} = q,\\
\sigma_z(-1) &= \left[\varepsilon^4 w_0^{IV} - (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''\right]\frac{1}{6} + \varepsilon\tau_0' + \left(\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''\right)\frac{1}{2} + \sigma_{z0}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Разность первых двух и сумма последних двух дают уравнения для определения u_0, σ_{z0}:

$$\varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}' = 0, \quad \varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0} = q.$$

Продифференцировав первое уравнение по x и вычтя его из второго, получим $\sigma_{z0} = q/2$. Подставив теперь известную величину σ_{z0} в первое уравнение, найдем перемещение u_0 в виде суммы частного и общего решений $u_0 = u_0^p + u_0^g$, в которой

$$u_0^{(p)} = \frac{\nu}{2\varepsilon}\int q\,dx, \quad u_0^{(g)} = C_1 x + C_2$$

и C_1, C_2 = const − произволы интегрирования. Это известная задача растяжения-сжатия стержня, в которой постоянные интегрирования C_1, C_2 определяются из граничных условий. (Если концы полосы жестко защемлены, легко проверить $u_0 \equiv 0$.)

Сумма первых двух и разность последних двух уравнений из системы (8) дают уравнения для определения τ_0 и w_0

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\tau_0 = 0,\\
&\varepsilon^4 w_0^{IV} - (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' + 6\varepsilon\tau_0' = -3q.
\end{aligned} \tag{9}$$

Анализ разрешающих уравнений (9). Продифференцируем первое уравнение по x и вычтем его из второго.

$$\varepsilon\tau_0' = -\frac{3}{4}q. \tag{10}$$

Теперь подставим это выражение во второе уравнение, получим уравнение, отличающееся от классического уравнения изгиба балки наличием в правой части второй производной от нагрузки

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{IV} = q - \frac{2+\nu}{2}\varepsilon^2 q''. \tag{11}$$

Из последних двух уравнений определяются частные решения $\tau_0^{(p)}$ и $w_0^{(p)}$. Общие решения находятся из соответствующих (10) и (11) однородных уравнений

$$\tau_0' = 0, \quad w_0^{IV} = 0 \tag{12}$$

и имеют вид

$$\tau_0^{(g)} = \mathrm{T}, \quad w_0^{(g)} = a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2} + a_3\frac{x^3}{6},$$

где T, a_0, a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Если нагрузка q является медленно меняющейся функцией, удовлетворяющей условию $q \sim q' \sim q'' \sim \varepsilon^0$, второй производной в уравнении (11) можно пренебречь по сравнению с величиной q в силу оценки $\varepsilon^2 q'' \sim \varepsilon^2 q$. Тогда уравнение превращается в классическое уравнение изгиба балки, а уравнение (10) будет соответствовать формуле Журавского. Произведя обратную замену безразмерных величин на размерные по формулам $x = x^*/l$, $w = w^*/h$, $q = q^*/E$, получим уравнение $EI\dfrac{\partial^4 w_0^*}{\partial x^*} = -q^*$, где $I = \dfrac{2}{3}bh^3$ − момент инерции поперечного сечения прямоугольника со сторонами $b \times 2h$ при $b = 1$.

Система уравнений (9), (10) и (11) имеет седьмой порядок, тогда как система (12) пятый. Записав второе уравнение системы (9) в следующем виде $\varepsilon^4 w_0^{IV} - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + 2\varepsilon\tau_0' + 4\varepsilon\tau_0' = -3q$, на основании соотношений (10) и второго уравнения из системы (12) получаем уравнение $(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' + 2\varepsilon\tau_0' = 0$, которое после интегрирования принимает вид $(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'' + 2\varepsilon\tau_0 = C$, где $C = \text{const}$. Частное решение этого уравнения $\varepsilon\tau_0^{(p)} = C/2$ тоже является постоянной и должно быть отброшено, т.к. это решение уже содержится в первом уравнении (12). Остальные решения уравнения

$$(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\tau_0 = 0$$

являются быстроменяющимися вследствие того, что имеют в качестве аргумента величину x/ε. Его фундаментальными решениями являются экспоненциальные функции $e^{\pm kx/\varepsilon}$. Общее решение можно записать так

$$\tau_0^{(g)} = C_1 e^{kx/\varepsilon} + C_2 e^{-kx/\varepsilon}. \tag{13}$$

Легко видеть, что это решением имеет характер пограничного слоя.

Выражение (10) показывает, что частное решение $\tau^{(p)\prime}$ и нагрузка q имеют один и тот характер изменения по координате x. Отсюда следует, что если приложенную в точке $x = c$ сосредоточенную нагрузку моделировать распределенной нагрузкой q с выражением

$$q = \frac{Pk}{2\varepsilon}\begin{cases} e^{k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \le c \\ e^{-k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \ge c, \end{cases} \tag{14}$$

где символом $P = P^*/hE$ обозначена интенсивность приложенной безразмерной сосредоточенной силы P^* и $k = \sqrt{2/(2+\nu)}$, частное решение уравнения (10) принимает вид

$$\tau_0^{(p)} = -\frac{3P}{8\varepsilon}\begin{cases} e^{k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \le c \\ -e^{-k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \ge c \end{cases} \tag{15}$$

и имеет разрыв в точке $x = c$.

Решение (13), записанное в форме функции $\delta_\varepsilon = \dfrac{k}{2\varepsilon}\begin{cases} e^{k(x-c)/\varepsilon} \\ e^{-k(x-c)/\varepsilon} \end{cases}$ является асимптотическим представлением δ-функции Дирака. В этом можно убедиться, вычислив от нее предел при $\varepsilon \to 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-c) = \delta(x-c).$$

Проиллюстрируем использование полученных элементарных решений w_0, τ_0 к построению общего напряженно-деформированного состояния полосы при различных условиях на концах.

Пример анализа условий на концах. Пусть полоса, загруженная сосредоточенной силой P в точке $x = c$, жестко защемлена на концах $x = 0, 1$. На концах должны выполняться условия отсутствия перемещений $w = u = 0$ и в точке приложения сосредоточенной силы условия неразрывности для перемещений w, u и напряжений σ_x, τ. Выпишем выражения этих величин из (7), оставив только главные члены:

$$\begin{gathered} w = w_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0' \frac{z^2}{2}, \qquad u = \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0\right] z, \\ \sigma_x = \left[-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon \tau_0'\right] z, \quad \tau = \varepsilon^3 w_0''' \frac{z^2}{2} + \tau_0 - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \frac{z^2}{2}, \end{gathered} \tag{16}$$

и перепишем их символически так:

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon^a w\left(w_0^{(g)}\right) + w\left(\varepsilon \tau_0^{(p)\prime}\right) + \varepsilon^{b+1} w(\mathrm{T}') + \varepsilon^c w\left(\varepsilon \tau_0^{(g)\prime}\right), \\ u &= \varepsilon^{a+1} u\left(w_0^{(g)\prime}\right) + u\left(\tau_0^{(p)}\right) + \varepsilon^b u(\mathrm{T}) + \varepsilon^c u\left(\tau_0^{(g)}\right), \\ \sigma_x &= \varepsilon^{a+2} \sigma_x\left(w_0^{(g)\prime\prime}\right) + \sigma_x\left(\varepsilon \tau_0^{(p)\prime}\right) + \varepsilon^{b+1} \sigma_x(\mathrm{T}') + \varepsilon^c \sigma_x\left(\varepsilon \tau_0^{(g)\prime}\right), \\ \tau &= \varepsilon^{a+3} \tau\left(w_0^{(g)\prime\prime\prime}\right) + \tau\left(\tau_0^{(p)}\right) + \varepsilon^b \tau(\mathrm{T}) + \varepsilon^c \tau\left(\tau_0^{(g)}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь учтены асимптотические соотношения

$$w_0^{(g)} \sim w_0^{(g)\prime} \sim w_0^{(g)\prime\prime}, \; \tau_0^{(g)} \sim \varepsilon \tau_0^{(g)\prime} \sim \varepsilon^2 \tau_0^{(g)\prime\prime}, \; \tau_0^{(p)} \sim \varepsilon \tau_0^{(p)\prime} \sim \varepsilon^2 \tau_0^{(p)\prime\prime},$$

вытекающие из интегралов

$$w_0 = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{6}, \quad \tau_0 = \mathrm{T} - \frac{3P}{8\varepsilon} \begin{cases} e^{k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \le c \\ -e^{-k(x-c)/\varepsilon} & \text{при } x \ge c. \end{cases} \tag{18}$$

Поскольку решения однородных уравнений $w_0^{(g)}, \tau_0^{(g)}$ определены с точностью до произвольных множителей перед величинами, порожденными решением $w_0^{(g)}$ приписан множитель ε^a, а перед величинами, порожденными $\tau_0^{(g)}$ множитель ε^b. Показатели a и b будем определять из условий разрешимости системы уравнений на концах и сопряжения.

Условия на концах полосы принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon^a w\left(w_0^{(g)}\right) = 0, \\ &\varepsilon^{a+1} u\left(w_0^{(g)\prime}\right) + \varepsilon^b u(\mathrm{T}) = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{при } x = 0, 1. \tag{19}$$

В них по сравнению с общей записью выражений (17) отброшены члены $w(\mathrm{T}'), \sigma_x(\mathrm{T}')$ вследствие того, что $\mathrm{T}' = 0$, в силу локализации в области точки $x = c$ отброшены члены частного решения $w\left(\varepsilon \tau_0^{(p)\prime}\right)$, $u\left(\tau_0^{(p)}\right)$, и члены $w\left(\varepsilon \tau_0^{(g)\prime}\right)$, $u\left(\tau_0^{(g)}\right)$, $\sigma_x\left(\varepsilon \tau_0^{(g)\prime}\right)$, $\tau\left(\tau_0^{(g)}\right)$, предназначенные для сглаживания возможных разрывов в точках возмущения медленного решения.

Условия сопряжения, записанные с помощью выражений (16) записываются так:

$$\left\{\varepsilon^a w\left(w_0^{(g)}\right) + w\left(\varepsilon \tau_0^{(p)\prime}\right)\right\} = 0, \qquad \text{при } x = c, \tag{20}$$

$$\left\{\varepsilon^{a+1}u\left(w_0^{(g)\prime}\right)+u\left(\tau_0^{(p)}\right)+\varepsilon^b u(\mathrm{T})\right\}=0,$$

$$\left\{\varepsilon^{a+2}\sigma_x\left(w_0^{(g)\prime\prime}\right)+\sigma_x\left(\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}\right)\right\}=0\,,$$

$$\left\{\varepsilon^{a+3}\tau\left(w_0^{(g)\prime\prime\prime}\right)+\tau\left(\tau_0^{(p)}\right)+\varepsilon^b\tau(\mathrm{T})\right\}=0\,.$$

Фигурные скобки означают, что заключенное в них выражение надо записать для $x\le c$ и $x\ge c$ и вычесть первое значение из второго при $x=c$. Здесь также учтено, что $\mathrm{T}'=0$ и отброшены компоненты решения $w(\varepsilon\tau_0^{(g)\prime})$, $u(\tau_0^{(g)})$, $\sigma_x(\varepsilon\tau_0^{(g)\prime})$, $\tau(\tau_0^{(g)})$ типа пограничного слоя.

Восьми условиям отвечает восемь уравнений для определения десяти произволов интегрирования $a_0, a_1, a_2, a_3, \mathrm{T}$, поскольку они будут различными для участков полосы $x\in 0,c$ и $x\in c,1$. Дополнительные два уравнения получим из первого уравнения системы (9) $\varepsilon^3 w_0''''-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''+2\tau_0=0$. Для медленно меняющихся величин оно принимает вид $\varepsilon^3 w_0''''+2\tau_0=0$.

Подставив сюда решения (18), получим два уравнения

$$\varepsilon^{3+a}a_3+2\varepsilon^b\mathrm{T}=0$$

для участков полосы $x\in 0,c$ и $x\in c,1$. Здесь также учтены множители с неопределенными показателями a, b. Из данного соотношения заключаем

$$3+a=b \tag{21}$$

и $a_3=-\mathrm{T}$.

Учитывая соотношение (21) в условиях (19) и (20) после отбрасывания малых величин по сравнению с главными, получим запись условий на концах:

$$\left.\begin{aligned} &w\left(w_0^{(g)}\right)=0\,,\\ &u\left(w_0^{(g)\prime}\right)=0 \end{aligned}\right.\qquad \text{при } x=0,1\,; \tag{22}$$

условий сопряжения:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\varepsilon^a w\left(w_0^{(g)}\right)+w\left(\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}\right)\right\}=0\,,\\ &\left\{\varepsilon^{a+1}u\left(w_0^{(g)\prime}\right)+u\left(\tau_0^{(p)}\right)\right\}=0,\\ &\left\{\varepsilon^{a+2}\sigma_x\left(w_0^{(g)\prime\prime}\right)+\sigma_x\left(\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}\right)\right\}=0\,,\\ &\left\{\varepsilon^{a+3}\tau\left(w_0^{(g)\prime\prime\prime}\right)+\tau\left(\tau_0^{(p)}\right)+\varepsilon^{a+3}\tau(\mathrm{T})\right\}=0 \end{aligned}\right.\qquad \text{при } x=c\,;$$

в которых надо положить $a=-3$. Теперь условия сопряжения в главных членах становятся совсем простыми:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{w\left(w_0^{(g)}\right)\right\}=0\,,\\ &\left\{u\left(w_0^{(g)\prime}\right)\right\}=0,\\ &\left\{\sigma_x\left(w_0^{(g)\prime\prime}\right)\right\}=0\,,\\ &\left\{\tau\left(w_0^{(g)\prime\prime\prime}\right)+\tau\left(\tau_0^{(p)}\right)+\tau(\mathrm{T})\right\}=0 \end{aligned}\right.\qquad \text{при } x=c\,;$$

и как это следует из определений искомых величин (16) совпадают с классическими: требуется непрерывность поперечного перемещения w, угла поворота оси полосы (балки) w', продольного напряжения σ_x, касательного напряжения τ. Условия защемления (22) также совпадают с классическими.

Заключение

На примере изгиба длинной упругой описан метод построения приближенных уравнений меньшей размерности, чем исходные, без каких либо традиционных гипотез.

Получены уравнения, описывающие медленно меняющиеся величины и быстро меняющиеся, определяющие все неизвестные задачи теории упругости.

Показано, что при сведении системы уравнений к разрешающим уравнениям, быстрые решения теряются.

Быстрые решения описываются уравнениями типа пограничного слоя с малым параметром при старшей производной, получающимися из условий выполнения граничных условий на длинных краях полосы.

Предложенная процедура анализа методом неопределенных показателей условий на концах полосы сводит их классическим для балки.

Л и т е р а т у р а

1. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. 1955. 491 с.

2. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука. 1970. 940 с.

3. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, ASME Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol. 12, pp. A68-77.

4. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С.472-481.

5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1965. 703 с.

R e f e r e n c e s

1. *Lurie AI* (2005). Theory of Elasticity. Springer. Berlin. 1050 p.

2. *Lurie AI* (1955). Prostranstvennye Zadachi Teorii Uprugosti. M.: Gostehizdat. 491 p.

3. *Reissner E* (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. ASME Journal of Applied Mechanics. Vol. 12, pp. A68-77.

4. *Zveryayev YeM* (2003). Analysis of hypotheses used when constructing of the theory of beam and plates. Prikl. Mat. Mech. **67**(3), pp. 472-481.

5. *Kamke E* (1959). Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: Akademie Verlag.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-08-01243.

LOST QUICK SOLUTIONS IN LONG STRIP BENDING PROBLEM

Zveryayev E.M.

Keldysh Institute of Applied Mathematics. Russian Academy of Sciences, Moscow

A construction with the method of the simple iterations the model problem of the bending a long thin strip approximate equations is considered. The obtained resolving equations coincide with the equations of the strength of materials in the principal terms and give the formula for all the theory of elasticity unknowns.

The equations are in the agreement with the methods of Saint-Venant, Timoshenko and Reissner for slowly varying quantities. The obtained boundary layer type new equations for the fast varying values are used when concentrated loads and other singular perturbations take places.

KEYWORDS: band, beam, concentrated load, small parameter