

Расчет строительных конструкций

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СИЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ДИАГРАММА $\sigma - \epsilon$ БЕТОНА

В.М. БОНДАРЕНКО, *д-р тех. наук, профессор*

В.И. РИМШИН, *д-р тех. наук, профессор*

НИИСФ РААСН

127238 Москва, Локомотивный пр-д, д.21

В статье мотивируется необходимость применения предложений Ю.Н. Работнова об использовании квазилинейных уравнений силового сопротивления при расчете бетонных и железобетонных конструкций и излагается способ их построения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение силового сопротивления бетона, нелинейность деформирования бетона.

Исходные уравнения силового сопротивления бетона при неубывающем нагружении имеют запись [1,2]:

$$\epsilon(t) = \frac{S_{мгн}(t)}{E_{мгн}(t)} + S_{пол}(t) \cdot C(t, t) - \int_{t_0}^t S_{пол}(\tau) \frac{dC(\tau, t_0)}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

где ϵ - полные относительные деформации, $E_{мгн}$ - модуль мгновенных деформаций, C - мера ползучести, $S_{мгн}$ - функция напряжения для мгновенных деформаций, $S_{пол}$ - функция напряжений для деформаций ползучести, t_0, τ, t - время начала отсчета, текущее время, время окончания отсчета. Здесь в правой части (1) первое слагаемое определяет частные мгновенные относительные деформации, второе слагаемое – частные кратковременные (быстро натекающие) относительные деформации ползучести [3,4]; третье слагаемое – частные режимнатекающие во времени относительные деформации ползучести.

Функции напряжений можно представить по П.И. Васильеву [5]:

$$S(\sigma) = \sigma \left[1 + V \left(\frac{\sigma}{R} \right)^m \right], \quad (2)$$

где σ - напряжения, R - расчетный предел прочности, V и m - параметры нелинейности деформирования.

При этом отметим, что параметры нелинейности деформирования для частных мгновенных деформаций $S_{мгн}$ и частных деформаций ползучести $S_{пол}$ отличаются друг от друга [6,7], см. табл. 1

Таблица 1

Характеристики прочности и деформирования [7], СНиП								
Параметры силового сопротивления деформированию и разрушению		Класс бетона по прочности на сжатие (МПа)						
		B.125	B.15	B20	B30	B40	B50	B60
Прочность	R_b	7,5	8,5	11,50	17,0	22,0	27,5	33,0
	R_{bt}	0,66	0,75	0,90	1,20	1,40	1,55	1,65
Деформируемость	$E \cdot 10^{-3}$, МПа	21,0	23,0	27,0	32,5	36,0	32,0	40,0
	$C \cdot 10^6$ МПа – 1	149	128	102	74	59	50	-
Осадка конуса 1-2см, жесткость 15-10								
Мгновенные деформации	$V_{мгн}$	3,1	2,6	2,0	1,3	1,0	0,8	0,7
	$m_{мгн}$	5,0	5,0	4,7	4,3	3,8	3,4	3,0
Деформации ползучести	$V_{пол}$	3,72	3,11	2,35	1,60	1,22	1,22	1,22
	$m_{пол}$	4.0						

Значение $V_{мгн}, V_{пол}, m_{мгн}, m_{пол}$ при осевом сжатии и $V_{t,мгн}, V_{t,пол}, m_{t,мгн}, m_{t,пол}$ при осевом растяжении могут быть рассчитаны по формулам [7]:

при осевом сжатии:

$$V_{мгн} = \frac{37,5}{R}; V_{пол} = \frac{45,0}{R} \cdot m_{мгн} = 5,0 - 0,05R; m_{пол} = 5,0 - 0,07R; \quad (3)$$

при осевом растяжении:

$$V_{t,мгн} = 0,3 + 0,37R; V_{пол} = 1,5; m_{t,мгн} = 0,8 + 0,23Rt; m_{t,пол} = 1. \quad (4)$$

Подчеркнем, что количественные отличия параметров нелинейности деформированию разных частных деформаций (мгновенных и ползучести) (3) и (4) при расчете конструкций не позволяют, кроме случая однородного напряженного состояния, применять уравнение (1); в связи с этим необходима замена нелинейного уравнения (1) квазилинейным уравнением [6,8]. Так как наибольшее различие проявляется при мгновенно приложенных и зафиксированных во времени напряжениях, то при построении квазилинейного уравнения используется условие:

$$\sigma = const. \quad (5)$$

Одновременно отметим, что все известные функции меры ползучести [1,10] предполагают

$$C(t_0, t_0) = C(t, t). \quad (6)$$

Используя (5) и (6) из уравнения (1) получим

$$\varepsilon(t) = \frac{s_{мгн}}{E_{мгн}(t)} + s_{пол} \cdot C(t, t_0). \quad (7)$$

Тогда, искомое квазилинейное уравнение записывается в виде:

$$\varepsilon(t) = \bar{s}(6)F(t, t_0), \quad (8)$$

где \bar{s} - единая функция напряжений, $F(t, t_0)$ - начальная мера силового сопротивления. К этому заметим, что в современных регламентных документах и в опубликованных исследованиях используются полученные эмпирическим путем уравнения силового сопротивления типа (8)[12]. Далее, с помощью (2) и (7) раскрываем квазилинейную запись (8):

$$\varepsilon(t) = \bar{s}(\sigma) \left[\frac{1}{E_{мгн}(t)} + C(t, t_0) \right], \quad (9)$$

где
$$\bar{s}(\sigma) = \left[1 + \bar{V} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{\bar{m}} \right] \sigma(t). \quad (10)$$

Численные значения параметров нелинейности (10) \bar{V} и \bar{m} находятся из условия равенства ε_0 (1) и по (9) в трех точках

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_0(t), \quad (11)$$

т. е.

$$\frac{\sigma \left[1 + V_{мгн} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{m_{мгн}} \right]}{E_{мгн}(t)} + \sigma \left[1 + V_{пол} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{m_{пол}} \right] C(t, t_0) = \sigma \left[1 + \bar{V} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{\bar{m}} \right] \left[\frac{1}{E_{мгн}(t)} + C(t, t_0) \right]. \quad (12)$$

В решаемой задаче такими фиксируемыми точками являются

$$\sigma_0 = 0; \sigma_1 = \gamma R, \quad (13)$$

отсюда, исключая нулевую точку ($\sigma = 0$) и сокращая σ , получим разрешающее уравнение:

$$\left[1 + \bar{V}_{мгн} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{\bar{m}_{мгн}} \right] \frac{1}{E_{мгн}(t)} + \left[1 + V_{пол} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{m_{пол}} \right] C(t, t_0) = \left[1 + \bar{V} \left(\frac{\sigma}{R} \right)^{\bar{m}} \right] \left[\frac{1}{E_{мгн}} + C(t, t_0) \right]. \quad (14)$$

Здесь заметим, что

$$\left[\frac{1}{E_{мгн}} + C(t, t_0) \right] = E_{впл}(t, t_0) \quad (15)$$

- временный линейный модуль деформации бетона [2,7], который является базовой характеристикой сопротивления деформирования в современных СНиП. Таким образом, вычисление значений параметров нелинейности \bar{V} и \bar{m} квазилинейного уравнения (9) при (10) дается решением системы уравнений, составленных из (14) при $\sigma = R$ и $\sigma = \gamma R$ (обычно $0,6 < \gamma < 0,8$):

$\sigma = R$ (при этом из рассмотрения выводится параметр \bar{m})

$$(1 + V_{МЗН}) \frac{1}{E_{МЗН}(t)} + (1 + V_{пол})C(t, t_0) = (1 + \bar{V}) \left[\frac{1}{E_{МЗН}(t)} + C(t, t_0) \right] ; \quad (16)$$

$\sigma = \gamma R$:

$$(1 + V_{МЗН} \gamma^{m_{МЗН}}) \frac{1}{E_{МЗН}(t)} + (1 + V_{пол} \gamma^{m_{пол}})C(t, t_0) = (1 + \bar{V} \gamma^{\bar{m}}) \left[\frac{1}{E_{МЗН}(t)} + C(t, t_0) \right]. \quad (17)$$

Тогда из (16) получается:

$$\bar{V} = \frac{(1+V_{МЗН}) \frac{1}{E_{МЗН}(t)} + (1+V_{пол})C(t, t_0)}{\frac{1}{E_{МЗН}(t)} + C(t, t_0)} - 1, \quad (18)$$

из (17) с учетом установленного значения \bar{V} (18)

$$\bar{m} = \frac{1}{\ln \gamma} \ln \left\{ \frac{1}{\bar{V}} \left[\frac{(1+V_{МЗН} \gamma^{m_{МЗН}}) \frac{1}{E_{МЗН}(t)} + (1+V_{пол} \gamma^{m_{пол}})C(t, t_0)}{\frac{1}{E_{МЗН}(t)} + C(t, t_0)} - 1 \right] \right\}. \quad (19)$$

В результате, квазилинейные уравнения силового сопротивления бетона (9) с учетом (15) имеют вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t) (1 + \bar{V} [\frac{\sigma(t)}{R(t)}]^{\bar{m}})}{E_{врл}}, \quad (20)$$

где R – функция t , $E_{врл}$, \bar{V} , \bar{m} – функция t и t_0 .

В большинстве расчетных случаях принимается $t_0 = 28, t = \infty$. Как показано в [5], обеспеченная точность (20) в сравнении с (1) составляет не менее 97%.

Далее, в интересах упрощения решения ряда задач, используя предложенную Граффом запись нелинейности [8], можно альтернативно (20) принять уравнение силового сопротивления бетона в виде [13]:

$$\varepsilon(t) = a(t, t_0) \sigma^b. \quad (21)$$

Численные значения параметров деформирования a и b , которые находятся аналогично (11)-(20) из условия

$$\frac{\sigma [1 + \bar{V} (\frac{\sigma}{R})^{\bar{m}}]}{E_{врл}} = a \sigma^b.$$

При этом также удобно фиксировать две точки $\sigma = R$ и $\sigma = \gamma R$, т.е. с помощью решения относительного a и b системы

$$(1 + \bar{V}) \frac{R}{E_{врл}} = a R^b, \quad (1 + \bar{V} \gamma^{\bar{m}}) \frac{\gamma R}{E_{врл}} = a (\gamma R)^b,$$

откуда

$$b = 1 + \frac{1}{\ln \gamma} \ln \frac{1 + \bar{V} \gamma^{\bar{m}}}{1 + \bar{V}}, \quad a = \frac{(1 + \bar{V}) R^{1-b}}{E_{врл}}.$$

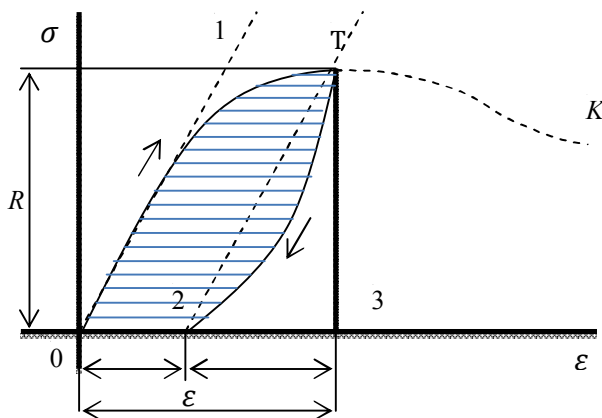


Рис. 1. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ (знак \rightarrow нагружения; знак \leftarrow разгружения)

Полученные результаты (или только аналогичные им) позволяют построить диаграмму напряжения – полные относительные деформации ($\sigma - \varepsilon$) для любых моментов времени t, t_0 (рис. 1), а также найти замкнутые решения для ряда нелинейных задач теории железобетона. Из (21) следует:

$$\sigma = \left(\frac{1}{a}\right)^{1/b} \varepsilon^{1/b} \text{ или } \sigma = \left[\frac{E_{ерл} R^{b-1}}{(1+\bar{V})}\right]^{1/b} \varepsilon^{1/b} .$$

На рис. 1 линия 01 - ветвь нагружения; линия Т2 – ветвь разгрузки; фигура 0Т20- петля гистерезиса при $\sigma_{max} = R, \varepsilon_{об}$ - обратимая часть полных деформаций, $\varepsilon_{ноб}$ - необратимая часть полных деформаций ТК - ниспадающая ветвь.

Заметим, что согласно признакам Энгессера - Ясинского [14] ветвь разгрузки определяется прямой линией ТВ, параллельной касательной к ветви нагружения 0Т при $\sigma = 0$; фигура 0Т20– петля гистерезиса.

Примером использования полученных результатов может служить количественная оценка потери части работы, совершаемой при силовом деформировании бетонного образца (применительно к единице объема образца). Эта потеря ΔW равна площади петли гистерезиса: $\Delta W = \bar{W} - \bar{W}$, где \bar{W} - работа, затрачиваемая на силовое деформирование при нагружении

$$\bar{W} = \int_0^\varepsilon \bar{\sigma} d\varepsilon = \left(\frac{E_{ерл}}{1+\bar{V}}\right)^{1/b} R^{1/b} \int_0^\varepsilon \varepsilon^{1/b} d\varepsilon = \left(\frac{E_{ерл}}{1+\bar{V}}\right)^{1/b} \frac{R^{1-1/b}}{1+1/b} \varepsilon^{1+1/b} ,$$

\bar{W} - работа, произведенная при восстановлении размеров образца после разгрузки (потенциал отпорности) с применением посылки Энгессера-Ясинского

$$\bar{W} = \int_0^\varepsilon \bar{\sigma} d\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{ерл}}{1+\bar{V}}\right) \varepsilon^2$$

и, соответственно, коэффициенты потери энергии при силовом деформировании бетонного образца

$$\varphi = \frac{\Delta W}{\bar{W}} = 1 - \frac{\bar{W}}{\bar{W}} \text{ или } \varphi_c = \frac{\Delta W}{\bar{W}} = \frac{\bar{W}}{\bar{W}} - 1 ,$$

(заметим, что по данным Е.С. Сорокина [15] величина φ_c , установленная по данным экспериментов, равна 0,5-0,75).

В целом, изложен метод построения квазилинейного уравнения силового сопротивления бетона, а также соответствующей диаграммы $\sigma - \varepsilon$ и проиллюстрировано его прикладное использование.

Литература

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехтеориздат, - 1952. – 327 с.
2. Фрайфельд С.Е. Об исходных предпосылках уравнений механического состояния материалов//Труды ХИСИ, Харьков, 1955, вып.4, Изд. ХГУ. - С.32-34.
3. Работнов Ю.Н., Милейко С.Г. Кратковременная ползучесть. – М.: «Наука», 1970. – 157 с.
4. Назаренко В.Г. Некоторые вопросы нелинейной теории ползучести (В книге Бондаренко С.В., Назаренко В.Г. Методика теории ползучести. М.:ВЗИСИ, 1981, с.154).
5. Васильев П.И. Некоторые вопросы теории пластического деформирования бетона. - Известия ВНИИГ, т.49, 1953. - С. 83-113.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
7. Рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, Стройиздат, 1988. – 129 с.
8. Бондаренко В.М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. – Харьков: Изд. ХГУ, 1968. – 322 с.
9. Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 352 с.
10. Бондаренко В.М. Некоторые фундаментальные вопросы развития теории железобетона//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. –2010. – №2. – С. 5-13.

11. Александровский С.В. Работа бетонных и железобетонных конструкций на температурные воздействия (с учетом ползучести). – М.: Стройиздат, 1966. – 498 с.
12. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 415 с.
13. Бондаренко В.М., Гержула Л.Б., Любимов Л.А., Пачинский Г.О. Исследование деформаций бетона при статической нагрузке//Труды ХИСИ. Вып. 18. Изд-во: ХГУ, Харьков, 1962.
14. Вольмир Л.А. Устойчивость упругих систем. –М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
15. Сорокин Е.С. Динамические характеристики строительных материалов и конструкций. –М.: Стройиздат, 1972.

References

1. Arutjunjan, NH (1952). *Nekotorye Voprosy Teorii Polzuchesti*. M.: Gostehteorizdat, 327 p.
2. Frajfel'd, SE (1955). Ob ishodnyh predposylkah uravnenij mehanicheskogo sostojanija materialov. *Trudy HISI*, Kharkov, Vol. 4, p. 32-34.
3. Rabotnov, JuN, Milejko, SG (1970). *Kratkovremennaja Polzuchest'*. M.: Izd. Nauka, 157 p.
4. Nazarenko VG (1981). Nekotorye voprosy nelinejnoj teorii polzuchesti (In book "Bondarenko S.V., Nazarenko V.G. *Metodika Teorii Polzuchesti*. M.: VZISI, p. 154.)
5. Vasil'ev PI (1953). Nekotorye voprosy plasticheskogo deformirovanija betona. *Izvestija VNIIG*, t. 49, p. 83-113.
6. Rabotnov JuN (1977). *Elementy Nasledstvennoj Mehaniki Tverdyh Tel*. M.: Nauka, 384 p.
7. *Rekomendacii po uchetu polzuchesti i usadki betona pri raschete betonnyh i zhelezobetonnyh konstrukcij*. M.: NIIZhB, Strojizdat, 1988, 129 p.
8. Bondarenko VM (1968). *Nekotorye Voprosy Nelinejnoj Teorii Zhelezobetona*. Har'kov: Izd. HGU, 322 p.
9. Bondarenko SV, Sanzharovskij RS (1990). *Usilenie Zhelezobetonnyh Konstrukcij pri Rekonstrukcii Zdanij*. M.: Strojizdat, 352 p.
10. Bondarenko VM (2010). Nekotorye fundamental'nye voprosy razvitija teorii zhele-zobetona. *Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*. 2010, №2, p. 5-13.
11. Aleksandrovskij SV (1966). *Rabota Betonnyh i Zhelezobetonnyh Konstrukcij na Temperaturnye Vozdejstvija (S Uchetom Polzuchesti)*. M.: Strojizdat, 498 p.
12. Karpenko NI (1996). *Obshhie Modeli Mehaniki Zhelezobetona*. M.: Strojizdat, 415 p.
13. Bondarenko VM, Gerzhula LB, Ljubimov LA, Pachinskij GO (1962). *Issledovanie deformacij betona pri staticheskoj nagruzke*. *Trudy HISI*. Vyp. 18. Har'kov: Izd-vo HGU.
14. Vol'mir LA (1963). *Ustojchivost' Uprugih Sistem*. M.: Fizmatgiz, 880 p.
15. Sorokin ES (1972). *Dinamicheskie Harakteristiki Stroitel'nyh Materialov i Konstrukcij*. M.: Strojizdat.

**QUASI-LINEAR EQUATIONS OF FORCE RESISTANCE
AND DIAGRAM “ $\sigma - \epsilon$ ” OF CONCRETE**

V.M. Bondarenko and V.I. Rimshin
NIISF RAASN, Moscow

In the paper, the necessity of application of the proposals of RabotnovaYuN on using of quasi-linear equations of force resistance in the process of analysis of concrete and reinforced concrete structures is motivated.

KEY WORDS: equation of the force resistance of concrete, non-linearity of deformation of concrete, diagram “ $\sigma - \epsilon$ ” of concrete.

