

## МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ МАТЕРИАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.В. ЕРОХИН, аспирант

Московский институт энергобезопасности и энергосбережения  
105043, г. Москва, ул. 4-я Парковая, д. 27, [kabrus@mail.ru](mailto:kabrus@mail.ru)

*Представлены модели ползучести и релаксации материалов, основанные на производных дробного порядка. Описан метод определения параметров моделей, позволяющий предсказывать поведение системы.*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ползучесть, релаксация, производные дробного порядка

### *Моделирование ползучести*

Серьезными приложениями теории линейной вязкоупругости являются исследования ползучести бетонов и некоторых других строительных материалов, грунтов, горных пород и т.п. Железобетону также свойственны явления ползучести и релаксации, при проявлении которых следствием является перераспределение усилий между бетоном и арматурой.

Ползучесть материалов (последствие) — изменение с течением времени деформации твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки или меха-

нического напряжения. Ползучести в той или иной мере подвержены все твёрдые тела — как кристаллические, так и аморфные. С математической точки зрения это означает, что зависимость между напряжениями и деформациями материала содержит время в явном виде или посредством операторов.

Явление ползучести было замечено К. Навье (1826), Г. Кориолисом (1830), но впервые количественно изучено Л. Вика (1834). Систематические исследования ползучести металлов и сплавов, резин, стекол относятся к началу XX века и особенно к 40-м годам, когда в связи с развитием техники столкнулись, например, с ползучестью дисков и лопаток паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и ракет, в которых значительный нагрев сочетается с механическими нагрузками. Потребовались конструкционные материалы (жаропрочные сплавы), детали из которых выдерживали бы нагрузки длительное время при повышенных температурах. Долгое время считали, что ползучесть может происходить только при повышенных температурах, однако ползучесть имеет место и при очень низких температурах, так, например, в кадмии заметная ползучесть наблюдается при температуре  $-269\text{ C}^\circ$ , а у железа при  $-169\text{ C}^\circ$ .

По современным представлениям [1] материал элемента конструкции (бетон, арматура, дерево) рассматривается как неравновесная термодинамическая система, механическое состояние которой при одноосном нагружении описывается уровнями деформации и напряжений. При этом элемент конструкции представляется объединением волокон (слоев, звеньев) со статистически распределёнными прочностями и с одинаковым модулем упруго-пластических деформаций. Возрастающее усилие влечет разрушение части волокон, силовое сопротивление оказывают лишь целые волокна.

Важнейшей задачей, возникающей при проектировании новых и обследовании существующих зданий и сооружений, является прогнозирование их срока службы, а также определение реальной картины деформирования конструкций во времени, выполненных преимущественно из железобетона, который, как известно, является весьма сложным материалом, деформирующимся во времени. Решение этой задачи невозможно без построения адекватной математической модели ползучести. Теория наследственной ползучести Больцмана-Вольтерры основана на предположении, что деформация в текущий момент времени зависит не только от величины напряжения в тот же момент, но и от предыстории деформирования. При этом учет предшествующих деформаций проводится в соответствии с принципом суперпозиции, согласно которому величина деформации в момент времени  $t$ , возникшей в результате напряжений  $\sigma(\tau)$ , действовавших до этого момента, равна

$$p(t) = \int_0^t K(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1)$$

где  $K(t - \tau)$  — ядро ползучести. Это должна быть убывающая функция от  $t$ , поскольку с течением времени влияние предыдущих нагрузок снижается. Зависимость от разности аргументов  $t - \tau$  свидетельствует об инвариантности ядра по отношению к началу отсчета времени [2-4].

В стандартной модели [5] уравнение ползучести, обусловленной только внутренним трением самого материала и наличием постоянной внешней осевой нагрузки  $Q_0$  имеет вид:

$$2nx'(t) + cx(t) = Q_0, \quad (2)$$

где  $2nx'(t)$  — сила диссипации;  $cx$  — восстанавливающая упругая сила. Перепишем уравнение (2) в виде

$$Dx(t) + \beta x(t) = k, \quad (3)$$

где  $Dx$  – производная первого порядка;  $\beta = c/(2n)$  и  $k = Q_0/(2n)$ .

Дифференциальное уравнение (3) имеет решение:

$$x(t) = (k/\beta)(1 - e^{-\beta t}). \quad (4)$$

Заметим, что соответствующая уравнению (2) модель стандартного линейного тела  $c(t) = x(t) + e_0$ , где  $c(t)$  и  $e_0$  — полная и мгновенная деформации ползучести, является весьма распространенной в реологии. Однако ее существенным недостатком является отсутствие сингулярности в момент времени  $t = 0$ , что, строго говоря, неприемлемо для корректного описания ползучести. Действительно, для всех без исключения материалов имеет место начальная асимптотика кривых простой ползучести в форме параболы дробного порядка  $mt^r$ , где  $m$  — коэффициент пропорциональности, а  $0 < r < 1$ . Ограничиваясь затухающей ползучестью пластмасс, бетонов, композитов и им подобных материалов, что имеет место при относительно малых и умеренных напряжениях, будем описывать упомянутую сингулярность, как и сами кривые ползучести, с помощью дробных производных.

В случае, когда параметр  $\beta$  не зависит от времени, что справедливо для всех структурно стабильных материалов, будем считать диссипативную силу пропорциональной производной некоторого дробного порядка  $0 < r < 1$ .

$$D^r x + \beta x = k, \quad (5)$$

где 
$$D^r x(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-r-1}}{\Gamma(-r)} x(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Отметим, что определение дробной производной естественным образом порождает не сингулярное ядро ползучести типа Абеля:

$$K(t - \tau) = C/(t - \tau)^\alpha. \quad (7)$$

Решение уравнения (5) можно выразить в виде суммы сходящегося ряда:

$$x(t) = k \left[ \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t^{2r}}{\Gamma(2r+1)} + \dots \right]. \quad (8)$$

Оставим в ряду (8) только два первых слагаемых, остальными можно пренебречь:

$$x(t) \approx k \left[ \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right]. \quad (9)$$

Если известны три результата экспериментальных наблюдений

$$x(t_1) = x_1; \quad x(t_2) = x_2; \quad x(t_3) = x_3,$$

то получаем систему уравнений для параметров  $k, \beta, r$ .

$$\begin{cases} x_1 = k \left[ \frac{t_1^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_1^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right] \\ x_2 = k \left[ \frac{t_2^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_2^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right] \\ x_3 = k \left[ \frac{t_3^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_3^{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right] \end{cases}. \quad (10)$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\frac{t_1^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_1^{2r}}{\Gamma(2r+1)}}{\frac{t_2^r}{\Gamma(r+1)} - \beta \frac{t_2^{2r}}{\Gamma(2r+1)}}. \quad (11)$$

Откуда после преобразований получаем:

$$\beta = \frac{\Gamma(2r + 1)}{\Gamma(r + 1)} \frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}}. \quad (12)$$

Если проделать те же операции с 1 и 3 строкой, то получим:

$$\beta = \frac{\Gamma(2r + 1)}{\Gamma(r + 1)} \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}}. \quad (13)$$

Откуда получается уравнение для  $r$ :

$$\frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}} = \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}}. \quad (14)$$

Оно имеет тривиальное решение  $r = 0$  и одно нетривиальное  $0 < r < 1$ .

Это уравнение аналитически неразрешимо. Чтобы увидеть его приближенно, построим график функции

$$f(r) = \frac{x_2 t_1^r - x_1 t_2^r}{x_2 t_1^{2r} - x_1 t_2^{2r}} - \frac{x_3 t_1^r - x_1 t_3^r}{x_3 t_1^{2r} - x_1 t_3^{2r}} \quad (15)$$

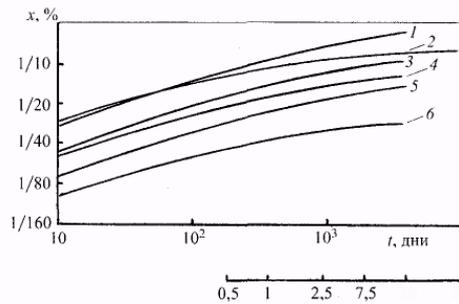


Рис. 1. Кривые ползучести бетона при постоянных значениях напряжения и возраста: 1, 3, 5 – возраст 90 дней, напряжение – 8,4; 6,3; 4,2 МПа соответственно; 2, 4, 6 – возраст 28 дней, напряжение – 6,3; 4,2; 2,1 МПа соответственно

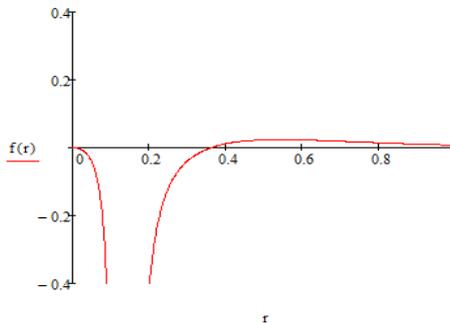


Рис. 2. График функции (15)

например из упругой постепенно перейти в необратимую (пластическую), при этом изменения размеров не происходит. Такое исчезновение напряжений возможно за счет межмолекулярных перемещений и переориентации внутримолекулярной структуры.

Поскольку по своим физико-химическим свойствам явление релаксации сходно с явлением ползучести, оно также может быть описано средствами дробного исчисления:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) - D^{-\alpha} \varepsilon(t), \quad (16)$$

где  $E_0$  - модуль упругости,  $\alpha$  - параметр материала,  $D^{-\alpha}$  - дробный интеграл:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (17)$$

при данных кривой 2 (рис. 1)

$$x(10) = 1/30, \quad x(100) = 1/15,$$

$$x(1000) = 1/10.$$

Методом последовательных приближений находим нетривиальное решение уравнения  $f(r) = 0$ ,  $r \approx 0.37$  (рис. 2), что хорошо согласуется с [5].

#### Моделирование релаксации

В глобальном смысле явление релаксации представляет собой процесс установления термодинамического, а следовательно, и статистического равновесия в физической системе, состоящей из большого числа частиц.

Для строительных материалов, бетонов, полимеров, металлов, грунтов релаксация — это свойство материала самопроизвольно снижать напряжения при условии, что начальная величина деформации зафиксирована жесткими связями и остается неизменной. При релаксации напряжений может измениться характер начальной деформации,

В типичном случае, когда деформация остается постоянной  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$ , уравнение (16) преобразуется к простому виду

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0 t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (18)$$

что довольно адекватно описывает снижение напряжения от начального значения  $\sigma(0) = E_0 \varepsilon_0$ . Если в ходе эксперимента помимо значения начального напряжения  $\sigma(0) = \sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$  известны еще хотя бы два значения  $\sigma(t_1) = \sigma_1$  и  $\sigma(t_2) = \sigma_2$ , то значение ключевого параметра  $\alpha$  определяется по формуле:

$$\alpha = \log_{t_1} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 - \sigma_2}. \quad (19)$$

Например, по имеющимся данным экспериментов с мерзлыми грунтами [6] (рис. 3):

$$\sigma_0 = 5,3 \text{ кг/см}^2; \quad t_1 = 5 \text{ мин}; \quad \sigma(t_1) = 3,5 \text{ кг/см}^2$$

$$t_2 = 10 \text{ мин}; \quad \sigma(t_2) = 3,0 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (19) получаем  $\alpha = 0.35$ . Знание этого параметра позволяет делать качественные прогнозы релаксации материала.

#### Л и т е р а т у р а

1. Бондаренко В.М., Ларионов Е.А. Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях элементов конструкций// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 2. – С. 16-21.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: «Наука», 1966. – 752 с.
3. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: «Высшая школа», 1976. – 277 с.
4. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. – М.: «Машиностроение», 2005. – 226 с.
5. Маньковский В.А., Сапунов В.Т. Номографические свойства дробно- экспоненциальной Э-функции при описании линейной вязкоупругости// Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2000. – №3. – Том 66. – С. 47-50.
6. Вялов С.С. Ползучесть и длительное сопротивление мерзлых грунтов// Доклады АН СССР. – «Сер. Геофизика». – Том 104. – № 6. – 1955. – С. 850-854.

#### References

1. Bondarenko VM, Larionov EA (2011). Princip nalozheniya deformatsiy pri strukturnih povrezhdeniyah elementov konstruktсий. *Stroitel'naya mehanika inzhenernih konstruktсий i sooruzheniy*, № 2, p. 16-21.
2. Rabotnov YuN (1966). *Polzuchest elementov konstruktсий*. Moscow: Nauka, 752 p.
3. Koltunov MA (1976). *Polzuchest i Relaksatsiya*. Moscow: Vysshaya shkola, 277 p.
4. Radchenko VP, Saushkin MN (2005). *Polzuchest i Relaksatsiya Ostatochnikh Napryzheniy v Uprochnennikh Konstruktсийah*. Moscow: Mashinostroenie, 226 p.
5. Mankovsky VA, Sapunov VT (2000). Nomograficheskie svoystva drobno-eksponencialnoy E-funkcii pri opisani lineynoy vyazkoupругosti. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, №3, Vol. 66, p. 47-50.
6. Vyalov SS (1955). Polzuchest i dlitelnoe soprotivlenie merzlykh gruntov. *Doklady AN SSSR, Ser. Geofizika*, Vol. 104, №6, p. 850-854.

### MODELS OF CREEP AND RELAXATION WITH USING OF FRACTIONAL DERIVATIVES

S.V. Erokhin

Creep and relaxation models based on fractional derivatives are submitted. Models of parameter determination are described. It allows predicting system behavior.

KEY WORDS: creep, relaxation, fractional derivatives

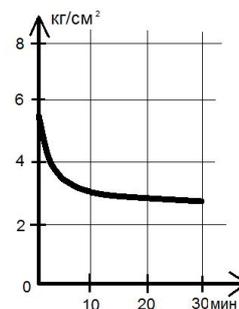


Рис. 3. Экспериментальная кривая релаксации сил сцепления мерзлых грунтов