

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АЭРОУПРУГОСТИ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.С. ДОРОГАН, канд. техн. наук

Дальневосточный государственный университет путей сообщения, Хабаровск

*Работа является продолжением моделирования обтекания мостовых конструкций ветровым потоком для несвязанных систем с применением метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) и посвящена аэродинамическому расчету связанных систем взаимодействия твердых тел и газа, т.е. аэроупругости пролетных строений и пилонов. В теоретической части показано решение связанных систем аэроупругости мостовых конструкций в виде многозонального и энергетического подходов.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** МГИУ, гибридные модели, аэродинамика, аэроупругость, связанные системы.

### 1. Аэродинамика газа для связанных систем

При воздействии ветра на конструкции большепролетных мостов ( $L_0 > 1500$  м) необходимо моделировать две системы:

- гибкие тонкостенные конструкции ПС; - ветровой поток газообразной среды.

В результате деформаций пролетных строений (ПС) меняется скорость обтекания газом; это приводит к изменению подъемной силы и лобового сопротивления конструкции [1]. Такие системы называются *связанными*, т.к. поведение одной системы оказывает влияние на поведение другой. Связанные системы обычно моделируются с помощью специальных КЭ программ – чаще всего ANSYS. Есть другие эффективные подходы для их решения [2, 3].

Удобно моделировать внешнюю часть системы с помощью граничных элементов (ГЭ), а внутреннюю с помощью конечных элементов (КЭ). Внешняя зона может быть ограниченной или бесконечной. Метод граничных элементов (МГЭ) эффективен для *неограниченных* или *полуограниченных* областей. МКЭ привлекателен в случае ограниченных и физически-нелинейных областей. Поэтому для ряда задач удачным оказывается использовать комбинирование МГЭ и МКЭ - получаются так называемые *гибридные* решения [4, 5].

Связанные системы проявляются при воздействии ветрового потока на *тонкостенные* конструкции: *большепролетные* горизонтальные и *высотные* вертикальные.

Исследование задач аэродинамики сводится к анализу *нестационарных* переходных процессов конструкции ПС при кратковременном воздействии ветровых нагрузок. Угол атаки ветрового потока  $\alpha = 0 - 30$  град.

Уравнения динамики МКЭ при малых смещениях точек конструкций [6]:

$$\mathbf{M} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}(t)}{\partial t} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}$  - матрица масс конструкции;  $\mathbf{B}$  - матрица коэфф. сил вязкого демпфирования;  $\mathbf{K}$  - матрица жесткости;  $\mathbf{F}$  - вектор узловых сил;  $\mathbf{U}$  - вектор узловых смещений. Для решения уравнений (1) для нестационарных процессов используют непосредственное численное (прямое) интегрирование по времени.

Известны программы для аэродинамических расчетов ПС мостов. Для их решения требуется интегрирование уравнения Навье - Стокса по времени, накладываемое по области газа на сеть узлов. Это значительно усложняет задачу. Например, программа "System IBDAS" компании COWI CAE выполняет 3-х мерный (3М) динамический анализ конструкций моста [7]. Расчетный комплекс "Spectrum", разработанный Centric Engineering System Inc., представляет собой полностью связанный CFD (Computational Fluid Dynamic) - FEM [8].

В работе предлагается альтернативный и численно более эффективный подход, основанный на квази - статической формулировке расчета.

Квази - статический подход допускается применять для *мгновенных* ( $t = 30 - 90$  с) и *кратковременных* ( $t = 2 - 5$  мин) воздействий ветра на мостовые конструкции. В этом случае *среднее* ускорение ветра является условно постоянной функцией  $a(t) = f(t) \approx \text{const}$  из-за неопределенности поведения порывов на временном отрезке.

Характерные примеры связанных *высотных* тонкостенных конструкций:

- пилоны, испытывающие сложное НДС; - небоскребы, башни и мачты.

## 2. Комбинирование МГЭ и МКЭ (гибридные модели - Hybrid Model).

Гибридные модели часто имеют только две граничные зоны (рис. 1):

- внутреннюю зону  $S_k$  *конструкции*, например ПС моста;
- внешнюю зону  $S_w$  *ветра*, обтекающего внутреннюю часть.

Граничное условие для 2М и 3М задачи требует отсутствие нормальных и тангенциальных компонент скорости ( $u_n = 0$  и  $u_t = 0$ ). Для нестационарных течений необходимо задать начальные условия:  $u(x, t) = u_o(x, t_o)$ ,  $x \in S_w$ .

Введем понятие двух "условных" материалов: *ветрового* и *структурного* макетов. Оба макета будем решать в одной системе скоростей перемещений.

*Ветровой* макет на основе дифференциального уравнения (ДУ) Навье - Стокса описывает движение газа в зоне  $S_w$  и характеризуется параметрами:

- коэфф. Пуассона  $\nu = 0$ ; модуль упругости  $E = 2 \cdot G$  для вязкой среды.

*Структурный* макет на основе ДУ Ламе описывает НДС конструкции в зоне  $S_k$  и характеризуется:

- коэфф. Пуассона  $\nu = 0.25 - 0.3$  для стали; модуль упругости  $E$ .

В этом случае ДУ скоростей движения газа Навье-Стокса (см. (3) [1]) совпадает с ДУ деформаций твердого тела Ламе в теории упругости (ТУ) (см. (8) [1]). Тогда для ветрового и структурного макетов можно применять одинаковый аппарат МГИУ ТУ. Здесь не требуется производить интегрирование по времени. Для получения усилий и перемещений достаточно умножить их найденные скорости на время воздействия ветра:  $U(x) = \dot{u}(x) \cdot \Delta t$  (м),  $P(x) = \dot{p}(x) \cdot \Delta t$  (Н).

Приведем граничное интегральное уравнение (ГИУ) как для ветрового, так и структурного макетов (см. (9) [1]):

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x) + \int_S U_{ij}^*(\xi, z)f_j(z)dS(z) - \int_S U_{ij}^*(\xi, z)N_j(z)dS(z) \quad \xi \in \Gamma, z \in S \quad (2)$$

где нелинейный член  $N_i$  для газа учитывается в объемном интеграле.

В обоих макетах находятся  $\dot{p}(x)$  и  $\dot{u}(x)$  в области  $S$  и на границе  $\Gamma$ .

ГИУ МГЭ в матричной форме

$$\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{B}, \quad (3)$$

где  $\dot{\mathbf{U}} = \partial \mathbf{U}(t) / \partial t$  и  $\dot{\mathbf{P}} = \partial \mathbf{P}(t) / \partial t$  - вектора скоростей перемещений и усилий;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  - несимметричные *матрицы влияния* перемещений и усилий,  $\mathbf{B}$  - вектор объемных сил, где  $\mathbf{b} = 0$  для модели конструкции;  $\mathbf{b} = \mathbf{f} = \rho \cdot (f_x, f_y, f_z)^T$ ; ускорение ветра  $f_x = f_y = a \cos \alpha$ ,  $f_z = a \sin \alpha$ .

В результате получаются *несимметричные* матрицы влияния. Если для области  $S$  заданы конечные элементы, то система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричной форме будет [9]:

$$\mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F} + \mathbf{D} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{D}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{K}$  - глобальная матрица жесткости;  $\dot{\mathbf{U}}$  - скорости перемещения;  $\dot{\mathbf{P}}$  - вектор скоростей узловых усилий;  $\mathbf{D}$  - вектор объемных сил;  $\mathbf{F}$  - вектор эквивалентных узловых сил;  $\mathbf{N}$  - интерполирующая матрица.



(флаттер) или вихревого возбуждения. Это позволяет полностью или частично исключить физические модели испытаний в аэродинамической трубе для больших пролетных мостов.

Предлагаемый *многозональный* подход по сравнению с подходами (5а) и (5б) не требует составлять гибридные СЛАУ объединением различных по форме матриц жесткости МКЭ и матриц влияния МГЭ.

**5. Энергетический подход решения связанных систем.** Такой альтернативный подход получил распространение из-за своей простоты; не является строгим и основан на вариационном исчислении.

Рассмотрим характерную схему, когда конструкция (область  $S_K$ ) со всех сторон обтекается газом (область  $S_W$ ). Они имеют общую границу стыковки - интерфейс  $\Gamma_{WK}$ . Ограничимся 2М задачей. Область  $S_W$  имеет смешанные ГУ:

$\Gamma_{1W}$  - часть границы, на которой заданы скорости перемещений:  $\hat{u}_1 = \dot{u}_1, \hat{u}_2 = \dot{u}_2$ ;

$\Gamma_{2W}$  - часть границы, на которой заданы скорости усилий:  $\hat{p}_1 = \dot{p}_1, \hat{p}_2 = \dot{p}_2$ .

Полная потенциальной энергии системы включает:  $\Pi = \Pi_W + \Pi_K$ ,

- $\Pi_W$  газообразного тела для ветрового макета;
- $\Pi_K$  твердого тела для структурного макета.

Такая функция имеет минимум при оптимизации узловых значений перемещений  $u_i$  и усилий  $p_i$  на интерфейсе (границе). Уравнение Бернулли для идеального несжимаемого газа [10]:

$$P + \frac{\rho \cdot u^2}{2} = const; \quad E_{II} + E_K = const, \quad (6)$$

где первый член - это статическое давление в потоке (потенциальная энергия), а второй - динамический напор (кинетическая энергия); это известный закон сохранения энергии. Тогда для плоского потока газа потенциальная энергия:

$$\Pi_W = E_{II} = \int_{S_W} P \cdot ds. \quad (7)$$

После применения теоремы Гаусса-Остроградского к функционалу потенциальной энергии упругого тела получается [11]:

$$\Pi_K = \frac{1}{2} \int_{\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2} p_i \cdot u_i \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \hat{p}_i \cdot u_i \cdot d\Gamma - \int_{S_K} b_i \cdot u_i \cdot dS, \quad (8)$$

где  $\hat{p}_i$  - заданные по условию задачи граничные значения усилий. Здесь все компоненты приведены не в скоростях, а в перемещениях.

Предлагается альтернативный критерий оптимизации в узлах интерфейса для определения искомых величин  $u_i$  и  $p_i$ :

$$\Pi = \Pi_W + \Pi_K = \int_{S_W} P \cdot dS + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{WK}} p_i \cdot u_i \cdot d\Gamma - \int_{S_K} b_i \cdot u_i \cdot dS. \quad (9)$$

При этом предполагается, что  $u, p, P$  подставляются в (9) из численного решения, описываемого интегральными уравнениями (2).

Примем, что интерфейс содержит  $n$  граничных узлов. Для их нахождения требуется критерий:  $m = 2n, m = 40$  для 2М, где  $m$  - порядок оптимизации. Поэтому есть ограничение на размерность многомерной оптимизации: число граничных узлов  $n \leq 20$ . Подобранные в (9) значения  $u_i, p_i$  подставляются в ГИУ для решения внутренней задачи (см. (12) [1]), т.е. определяются величины напруг и динамических давлений в зоне  $S_W$ .

Потребуется численное дифференцирование:  $\bar{\bar{u}}(x) = u(x)/t, \bar{\bar{p}}(x) = p(x)/t$ .

ГИУ в скоростях для газа при заданных перемещениях  $\hat{u}(x)$  и усилиях  $\hat{p}$  :

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\xi) = & - \int_{\Gamma_w + \Gamma_{wk}} P_{ij}^*(\xi, x) \dot{u}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_w} P_{ij}^*(\xi, x) \hat{u}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_{wk}} P_{ij}^*(\xi, x) \bar{\bar{u}}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma_w + \Gamma_{wk}} U_{ij}^*(\xi, x) \dot{p}_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_w} U_{ij}^*(\xi, x) \hat{p}_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{wk}} U_{ij}^*(\xi, x) \bar{\bar{p}}_j(x) d\Gamma(x) \\ & + \int_{S_w} U_{ij}^*(\xi, z) \cdot b_j(z) \cdot dS(z), \quad \xi \in S_w, z \in S_w \end{aligned} \quad (10)$$

При необходимости аналогично составляется ГИУ для конструкции:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\xi) = & - \int_{\Gamma_{wk}} P_{ij}^*(\xi, x) \cdot \dot{u}_j(x) \cdot d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_{wk}} P_{ij}^*(\xi, x) \cdot \bar{\bar{u}}_j(x) \cdot d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Gamma_{wk}} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot \dot{p}_j(x) \cdot d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_{wk}} U_{ij}^*(\xi, x) \cdot \bar{\bar{p}}_j(x) \cdot d\Gamma(x) + \\ & + \int_{S_k} U_{ij}^*(\xi, z) \cdot b_j(z) \cdot dS(z), \quad \xi \in S_k, z \in S_k \end{aligned} \quad (11)$$

Схема численного решения основана на процедуре *Minimize* поиска минимума функционала потенциальной энергии из MathCAD, имеющего порядок *m*. Обычно применяется условие минимума функционала потенциальной энергии для конструкции [9]:

$$\delta \Pi_K = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (p_i \cdot \delta u_i + \delta p_i \cdot u_i) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \hat{p}_i \cdot \delta u_i \cdot d\Gamma - \int_{S_K} b_i \cdot \delta u_i \cdot dS = 0, \quad (12)$$

где  $\delta$  - возможные вариации перемещений и усилий.

Решение (12) требует объединения матриц влияния  $\Gamma \Delta$  на  $\Gamma$  и матриц жесткости КЭ на  $S_k$ . Вариационный метод позволяет получить симметричный профиль матрицы влияния; этим он и ценен.

Предлагаемый энергетический подход (9) по сравнению с вариационным подходом (12) менее громоздок и численно более рационален.

**Заключение.** Предложены два альтернативных подхода решения связанных систем: многозональный и энергетический, которые позволяют определять НДС конструкции и скорости обтекания газом при расчете тел произвольной формы.

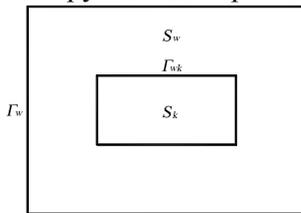


Рис. 1. Две зоны

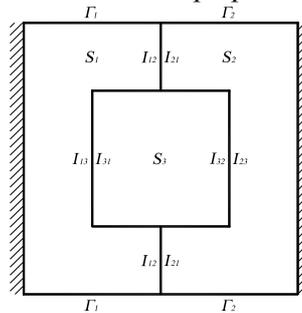


Рис. 2. Три зоны

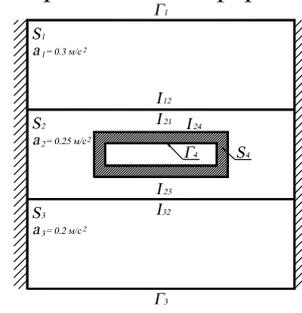


Рис. 3. Четыре зоны

Л и т е р а т у р а

1. Дороган А.С. Применение МГИУ теории упругости для моделирования обтекания мостовых конструкций ветровым потоком // Строительная механика инженерных конструкций. 2013. №2, С. 26-35.
2. Potapov V.D. Stability of elastic and viscoelastic plate in gas flow taking into account shear strains // Acta Mechanica - Vol. 166, No. 1 - 4, 2012, pp. 1-12.
3. Rodríguez-Castellanos A., Ortiz-Alemán C., Indirect boundary element method applied to fluid-solid interfaces // Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 31, No 3, 2011, pp. 470-477.
4. Brady B.H., Wassing A. A coupled finite element - boundary element method of stress analysis // Int. J. of Rock Mechanics, Vol. 18, No. 6, 1985, pp. 475 - 485.

5. *Nguyen N.C., Peraire J., Cockburn B.* A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes Flow // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No 9-12, 2011, pp. 582-597.
6. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC.Nastran.–М.: ДМК Пресс, 2004.–704 с.
7. *Larsen A., Walther J.H.* Computer-aided wind engineering of long-span bridges // *J. of Wind Eng. and Industr. Aerodynamics*. 1997. - Vol. 67-68. - pp. 183-194.
8. *Frandesen J., McRobble A.* Comparison of numerical and physical models for bridge deck aero elasticity, *IABSE Symp. Kobe*, 1998, Vol. 79, pp. 453 - 458.
9. *Бреббия К.* Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. - 524 с.
10. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.
11. *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и её применение. – М.: «Мир», 1988. – 344 с.

#### References

1. *Dorogan, AS* (2013). The application of BEM elasticity for modeling of the wind flow over the bridge structures. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 2, pp. 26-35.
2. *Potapov, VD* (2012). Stability of elastic and viscoelastic plate in gas flow taking into account shear strains. *Acta Mechanica*, Vol. 166, No. 1 - 4, pp. 1-12.
3. *Rodriguez-Castellanos A, Ortiz-Alemán C* (2011). Indirect boundary element method applied to fluid-solid interfaces. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 31, No 3, pp. 470-477.
4. *Brady, BH, Wassying, A* (1985). A coupled finite element - boundary element method of stress analysis. *Int. J. of Rock Mechanics*, Vol. 18, No. 6, pp. 475 - 485.
5. *Nguyen, NC, Peraire, J, Cockburn, B* (2011). A hybridizable discontinuous Galerkin method for Stokes Flow. *Computer Methods in Applied Mechanics*, Vol. 199, No 9-12, pp. 582-597.
6. *Shimkovich, DG* (2004). *Design of Constructions in MSC.Nastran*. М.: ДМК Press, 704 p.
7. *Larsen, A, Walther, JH* (1997). Computer-aided wind engineering of long-span bridges. *J. of Wind Eng. and Industr. Aerodynamics*, Vol. 67-68, pp. 183-194.
8. *Frandesen, J, McRobble, A* (1998). Comparison of numerical and physical models for bridge deck aero elasticity, *IABSE Symp. Kobe*, Vol. 79, pp. 453 - 458.
9. *Brebbia, K, Telles, J, Vroubel, L* (1987). *Methods of Boundary Elements*, М.: “Mir”, 524 p.
10. *Chugaev, RR* (1982). *Gidravlika*. Л.: Energoizdat, 624 p.
11. *Han H* (1988). *Theory of Elasticity: Basics of Linear Theory And Applications*. М.: “Mir”, 344 p.

### THE APPLICATION OF A METHOD OF BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF A THEORY OF ELASTICITY FOR MODELING OF AEROELASTICITY OF BRIDGE STRUCTURES

A.S. Dorogan, *Khabarovsk*

This work describes modeling of winding of bridge structures by the wind flow for non-bound systems with an application of a method of the boundary integral equations and is devoted to aerodynamical analysis of bound systems of interaction of solid bodies and gas, i.e. to aeroelasticity of span structures and pylons. The solutions of the 'wind flow - bridge structures' interaction problems in the form of multi zonal and variation approaches are shown in the theoretical part.

KEY WORDS: a method of the boundary integral equations, hybrid models, aerodynamics, aeroelasticity, bound systems.

