

**К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ БАЛОК  
НА НЕЛОКАЛЬНО УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

В.Д. ПОТАПОВ, *д-р техн. наук, профессор*  
 Московский государственный университет путей сообщения;  
 127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9. potapov.vd@mail.ru

*При расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании, часто используется простейшая модель основания, предложенная Винклером-Циммерманом. Эта гипотеза неоднократно подвергалась вполне обоснованной критике, потому что она не учитывает включение в работу областей основания, которые находятся по соседству с точкой приложения сосредоточенной силы. С целью уточнения гипотезы Винклера-Циммермана многими авторами были предложены другие модели, которые позволяют в разной степени сгладить недостаток указанной модели. В настоящей статье предложен новый вариант модели упругого основания.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** балки, нелокальное сплошное упругое основание, изгиб, колебания.

При расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании, обычно используется простейшая модель основания, предложенная Винклером-Циммерманом [1, 2], в соответствии с которой реакция основания в рассматриваемой точке пропорциональна смещению кромки основания в той же точке. Другими словами, основание представляется в виде линейно упругих пружинок, не связанных между собой, и потому при действии сосредоточенной силы деформируемой оказывается только та пружинка, над которой оказалась эта сила. Эта гипотеза неоднократно подвергалась вполне обоснованной критике из-за неопределенности способа нахождения коэффициента упругого отпора для грунтовых оснований, а также потому что она не учитывает включение в работу областей основания, которые находятся по соседству с точкой приложения сосредоточенной силы. Некоторым уточнением модели Винклера-Циммермана можно рассматривать предложение М. М. Филоненко – Бородича [3], который рассматривал модель грунтового основания в виде пружин, соединенных в верхних концах с помощью нерастяжимой горизонтальной нити, неподвижно закрепленной за пределами основания.

Другая модель упругого основания была рассмотрена в работе [4], в которой прогиб в рассматриваемой точке балки определяется интегралом от интенсивности реакции упругого основания

$$w(x) = konst. \int_{-a}^a K(|x - x^*|) r(x^*) dx^*,$$

В этом равенстве  $2a$  есть длина балки,  $konst.$  - постоянная аналогичная коэффициенту постели,  $K(|x - x^*|)$  - функция, принимаемая в упомянутой работе в виде экспоненты.

В итоге решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + c_1 w(x) - c_2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = q(x), \quad (1)$$

где  $EI$  - изгибная жесткость балки,  $w(x)$  - прогиб балки в точке с координатой  $x$ ,  $c_1, c_2$  - коэффициенты, учитывающие упругий отпор основания,  $q(x)$  - интенсивность распределенной нагрузки. Важно подчеркнуть, что в соответствии с принятой гипотезой решение уравнения (1) должно удовлетворять шести гра-

ничным условиям. Как следствие несоответствия порядка дифференциального уравнения (1) и числа граничных условий, последнее обстоятельство приводит к появлению на концах балки мнимых сосредоточенных реакций.

Решение этого уравнения оказывается существенно отличным от решения уравнения, получаемого при использовании гипотезы Винклера-Циммермана

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + cw(x) = q(x). \quad (2)$$

П. Л. Пастернак разработал модель упругого основания, которая характеризуется двумя коэффициентами постели [5]. Такая модель позволяет частично учесть деформации основания не только под сосредоточенной силой, но и соседних участков. Это достигается за счет того, что величина реакции основания считается зависящей не только от величины осадки балки в рассматриваемой точке, но и от кривизны линии прогибов балки в той же точке. Интересно отметить, что уравнение изгиба балки и в этом случае сводится к уравнению (1).

Кроме этих моделей были предложены другие варианты, в основу которых были положены решения задач теории упругости для упругой полуплоскости, упругого полупространства [6,7] и упругого слоя [8]. Интересно отметить, что модель упругого слоя Власова В.З. [8] снова приводят к тому же уравнению (1). Достаточно обстоятельный обзор моделей и работ в целом по вопросам, связанным с расчетом балок и плит на упругом основании, содержится в работе [7].

Недостатком моделей, в основу которых положены решения задач теории упругости, является то, что они не совсем корректно описывают распределение напряжений в грунтовом массиве под фундаментом. Это объясняется, с одной стороны, особенностями решения контактных задач теории упругости – появлением бесконечно больших напряжений в полупространстве или полуплоскости под концами балок или под краями пластин. С другой стороны очевидно, что грунтовый массив нельзя отождествлять с упругим изотропным материалом. Особенно это относится к малосвязным или совсем несвязным грунтам. Например, в случае таких грунтов распределение напряжений под жесткими фундаментами (штампами) не согласуется с решением теории упругости [5, 7].

В последние годы в связи с появлением новых композитных и наноматериалов в механике большое внимание уделяется анализу напряженно - деформированного состояния конструкций с учетом нелокальных эффектов [9 - 12].

В настоящей работе аналогичный подход применяется к решению задачи об изгибе балок, лежащих на упругом основании с учетом его нелокальности. Это сводится к тому, что реакция основания  $r(x)$  в конкретной точке балки определяется выражением

$$r(x) = c \int_0^L C(|x - x^*|) w(x^*) dx^*,$$

причем  $L$  - длина балки,  $C(|x - x^*|)$  - функция нелокальности, которая учитывает влияние прогибов балки по всей ее длине на величину упругого отпора в рассматриваемой точке,  $c$  - коэффициент аналогичный коэффициенту постели в модели Винклера-Циммермана.

Заметим, что соотношение  $r(x) \sim w(x)$  является по сути обратным к соотношению предложенному в работе [4]. На первый взгляд несущественная перестановка местами функций  $r(x)$  и  $w(x)$  приводит в дальнейшем к принципиально новому результату. Как будет показано ниже, следствием такой перестановки является корректная, в математическом смысле, постановка задачи.

Прогиб балки в нашем случае определяется из решения интегро- дифференциального уравнения

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + c \int_0^L C(|x-x^*|) w(x^*) dx^* = q(x). \quad (3)$$

Граничные условия для уравнения (3) формулируются также как и для дифференциального уравнения (2).

Функция  $C(|x-x^*|)$  принимает максимальное значение при  $x=x^*$ , а при увеличении разности  $|x-x^*|$  она убывает. Функция  $C(|x-x^*|)$  долж-

на удовлетворять условию нормирования  $\int_{-\infty}^{\infty} C(|x-x^*|) dx^* = 1$ .

В качестве функции  $C(|x-x^*|)$  можно выбрать различные выражения [13, 14]. В дальнейшем используется экспоненциальная функция  $C(|x-x^*|) = \frac{\mu}{2} e^{-\mu|x-x^*|}$ , где  $\mu$  - характеристика основания.

Можно показать, что при таком выборе функции  $C(|x-x^*|)$  уравнение (3) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$EI \frac{d^6 w(x)}{dx^6} - \mu^2 EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - \mu^2 c w(x) = -\mu^2 q(x) + \frac{d^2 q(x)}{dx^2}. \quad (4)$$

Действительно, представим уравнение (3) в виде соотношения

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{c\mu}{2} \int_0^x e^{-\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* + \frac{c\mu}{2} \int_x^L e^{\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* = q(x)$$

и продифференцируем обе его части два раза по  $x$

$$EI \frac{d^5 w(x)}{dx^5} + c \frac{\mu^2}{2} \left[ - \int_0^x e^{-\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* + \int_x^L e^{\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* \right] = \frac{dq(x)}{dx} \quad (5)$$

$$EI \frac{d^6 w(x)}{dx^6} + \frac{c\mu^3}{2} \int_0^x e^{-\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* + \frac{c\mu^3}{2} \int_x^L e^{\mu(x-x^*)} w(x^*) dx^* - c\mu^2 w(x) = \frac{d^2 q(x)}{dx^2}.$$

Умножим уравнение (3) на  $-\mu^2$  и сложим его с последним. В итоге получим дифференциальное уравнение (4). Решение этого уравнения должно удовлетворять шести граничным условиям. Первые четыре условия записываются точно также как и для уравнения (2, 3), а для получения двух других условий можно воспользоваться равенством (5).

В случае динамической постановки задачи уравнения (3) и (4) принимают вид (с учетом внешнего демпфирования):

$$m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + c \int_0^L C(|x-x^*|) w(x^*,t) dx^* = q(x,t), \quad (6)$$

$$m \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + k \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^6 w(x,t)}{\partial x^6} - \mu^2 m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \mu^2 k \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \mu^2 EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - \mu^2 c w(x,t) = -\mu^2 q(x,t) + \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Заметим, что при  $\mu \rightarrow \infty$  из уравнения (4) следует уравнение (2) для балки на винклеровском основании, а из уравнения (7) - аналогичное уравнение при

динамической постановке задачи, т.е. с увеличением параметра  $\mu$  основание балки стремится к основанию Винклера-Циммермана.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \omega t, \quad \xi = x/l, \quad \text{где } l^4 = EI/c, \quad \omega^2 = EI/(ml^4).$$

Тогда уравнение (6) записывается следующим образом

$$\frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} + 2\varepsilon \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^4 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + l \int_0^{L/l} C(|\xi - \xi^*|) w(\xi^*, \tau) d\xi^* = q^*(\xi, \tau), \quad (8)$$

где  $q^*(\tau, \xi) = q(\tau, \xi)l^4/(EI)$ .

На примере бесконечно длинной балки, находящейся под действием внезапно приложенной по ее середине единичной сосредоточенной силы  $F$ , оценим влияние нелокальности упругого отпора основания на величину и характер распределения прогиба балки по длине, а также изменения максимального прогиба во времени. Для численного решения уравнения (8) воспользуемся методом конечных разностей (для представления производных по  $\xi$ ) и методом Рунге-Кутты для решения обыкновенных дифференциальных уравнений по  $\tau$ . Определенные интегралы вычисляются с помощью формулы трапеций.

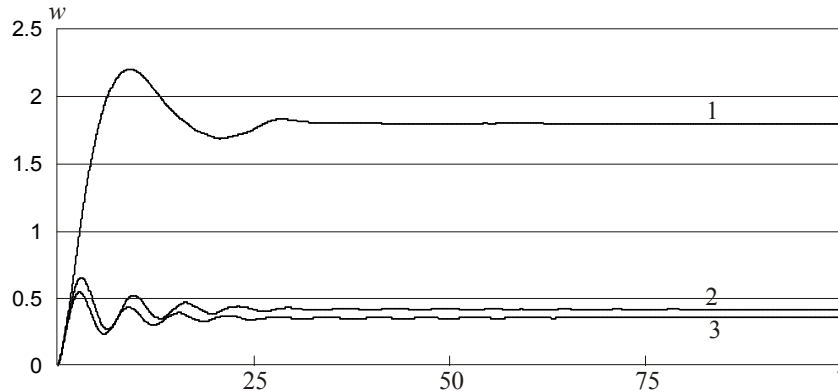


Рис. 1.

На рис. 1 показаны графики изменения  $w_{\max}$  во времени на отрезке времени  $0 < \tau < 100$ , а на рис. 2 и 3 — графики изменения  $w(\xi)$  и реакции основания  $r(\xi)$  вдоль оси балки при  $\tau = 100$ . Эти результаты получены при  $\Delta \xi = 0.1$ ,  $\Delta \tau = 0.005$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . На всех графиках кривые 1 отвечают безразмерной величине  $\mu l = 0.1$ , кривые 2 —  $\mu l = 1.0$ . Для сравнения на рисунках представлены аналогичные графики для такой же балки при использовании гипотезы Винклера-Циммермана (кривые 3).

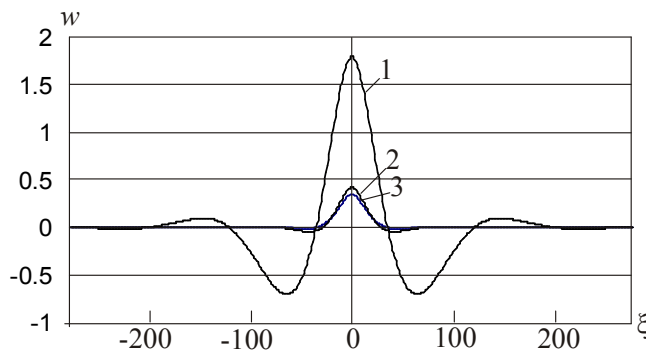


Рис. 2.

Для оценки точности решения уравнения (7) приведем значения  $w_{\max}$  при  $\tau = 100$ : для  $\mu l = 0.1$  -  $w_{\max} = 1.796$ , для  $\mu l = 1.0$  -  $w_{\max} = 0.420$ . В случае винклеровского основания аналогичная величина равна 0.335. Точное значение  $w_{\max}$  для винклеровского основания равно 0.354. Отличие между последними значениями обусловлено тем, что при численном решении интегродифференциального уравнения сосредоточенная сила заменяется распределенной нагрузкой, меняющей по треугольнику в пределах двух соседних участков разностной сетки с максимальной ординатой равной  $1/\Delta\xi$ .

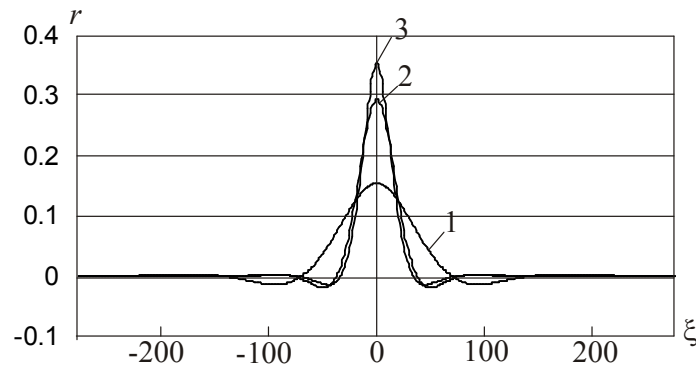


Рис. 3.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что с увеличением параметра  $\mu l$  графики изменения прогиба балки во времени и в пространстве приближаются к аналогичным графикам, полученным с использованием гипотезы Винклера-Циммермана. С другой стороны, нелокальность отпора упругого основания приводит к существенному изменению в количественных параметрах и характере изменения прогиба балки и реакции основания как по ее длине так и во времени. Чем меньше значение параметра нелокальности  $\mu l$ , т.е. чем большая часть упругого основания по длине балки вовлекается в определение отпора в рассматриваемой точке, тем больше отличаются значения и прогиба балки, и реакции упругого основания от аналогичных показателей, полученных с помощью гипотезы Винклера-Циммермана.

Следует заметить, что решение интегро-дифференциальных уравнений (4, б) несколько сложнее, чем аналогичных уравнений для балки на винклеровском основании, однако при наличии вычислительных машин это не вызывает серьезных затруднений.

#### Л и т е р а т у р а

1. *Winkler E.* Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. – Prague, 1867.
2. *Zimmerman H.* Die Berechnung des Eisenbahnoberbauee. – Berlin, 1888.
3. *Филоненко-Бородич М.М.* Простейшая модель упругого основания способная распределять нагрузку. Сб. трудов МЭМИИТ. – Вып. 53. – 1945.
4. *Wieghardt K.* Über den Ralken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1922, Bd. 2, N. 3, s. 165 - 184.
5. *Пастернак П. Л.* Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954.
6. *Жемочкин Б.Н., Сеницын А.П.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1962. – 240 с.
7. *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т. А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.

8. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1960. – 491 с.
9. Ahmadi G. Linear theory of nonlocal viscoelasticity. International Journal of Non - Linear Mechanics. – 1975. Vol. 10, № 2. – P. 253 - 258.
10. Banks H. T., Inman D. J. On damping mechanisms in beams. Journal of Applied Mechanics. – 1991, Vol. 58, № 3. – P. 716 - 723.
11. Eringen A. C., Edelen B. L. Nonlocal elasticity. International Journal of Engineering Science. – 1972. – Vol. 10, № 3. – P. 233 - 248.
12. Lei Y., Friswell M. I., Adhikari S. A. Galerkin method for distributed systems with non-local damping. International Journal of Solids and Structures. – 2006, Vol. 43, № 3, pp. 3381 - 3400.
13. V.D. Potapov. On the Stability of Rods under Stochastic Loading Considering Nonlocal Damping. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2012, V. 41, №4, pp. 284 – 290.
14. Potapov V.D. Stability via nonlocal continuum mechanics. International Journal of Solids and Structures. – 2013, Vol. 50, № 5. – P. 637 – 641.

#### References

1. Winkler E (1867). Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit. Prague.
2. Zimmerman H (1888). Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin,
3. Filonenko-Borodich MM (1945). The simplest model of an elastic base capable to distribute a load. Transactions of papers MEMIIT, Issue 53.
4. Wieghardt K (1922). Über den Ralcken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2, H. 3, s. 165 - 184.
5. Pasternak PL (1954). Principles of a new method for the calculations of bases on an elastic foundation with help of two coefficients soil. M.: Stroyizdat.
6. Zhemochkin BN, Sinityn AP (1962). Practical methods of the calculation of foundations bars and plates on an elastic foundation. 2-nd Ed., M.: Stroyizdat, 240 p.
7. Gorbunov-Posadov MI, Malikova TA, Solomin VI (1984). The design of structures on an elastic foundation. M.: Stroyizdat, 679 p.
8. Vlasov VZ, Leontiev NN (1960). Bars, plates and shells on an elastic foundation. M.: Fizmathgiz, 491 p.
9. Ahmadi G (1975). Linear theory of nonlocal viscoelasticity. International Journal of Non - Linear Mechanics, Vol. 10, № 2, 253 - 258.
10. Banks HT, Inman DJ (1991). On damping mechanisms in beams. Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, № 3, 716 - 723.
11. Eringen AC, Edelen BL (1972). Nonlocal elasticity. International Journal of Engineering Science, Vol. 10, № 3, 233 - 248.
12. Lei Y, Friswell MI, Adhikari S (2006). A Galerkin method for distributed systems with non-local damping. International Journal of Solids and Structures, Vol. 43, № 3, 3381 - 3400.
13. Potapov V D (2012). On the Stability of Rods under Stochastic Loading Considering Nonlocal Damping. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. Vol. 41, №4, pp. 284 – 290.
14. Potapov VD (2013). Stability via nonlocal continuum mechanics. International Journal of Solids and Structures. Vol. 50, № 5, 637 – 641.

#### ON CALCULATION OF BARS LYING ON NONLOCAL ELASTIC BASE

Potapov V. D.

Moscow State University of Railway Engineering, Moscow

The design of bars, lying on an elastic base is fulfilled usually with help of a simple model of the base proposed by Winkler-Zimmerman. This hypothesis was subjected to the repeated critics, because it doesn't take into account the influence of base fields, which are near to the point of the application of the concentrated force. Many models of the elastic base were proposed later by other authors, which allow to smooth away the indicated shortage of the Winkler-Zimmerman model. One more attempt of an improvement of this model is made in the present work.

KEY WORDS: bars, nonlocal continue elastic base, bend, oscillations.

*Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Основание». Учредители фонда: ОАО «Институт Гипростроймост», Группа компаний «СК МОСТ».*