

Расчет строительных конструкций

НЕЛИНЕЙНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОФАЗНЫХ СТЕРЖНЕЙ

А.В. МИЩЕНКО, канд. техн. наук, доцент

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)

630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, НГАСУ (Сибстрин),

mavr@hnet.ru

Предложена расчетная модель нелинейного термоупругого деформирования многофазного стержня, основанная на разложении нормального напряжения по заданным базисным функциям. Разработан метод решения краевой задачи, базирующийся на секующих жесткостных характеристиках сечения стержня квазилинейной физической системы уравнений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многофазный стержень, слоистая структура, физическая нелинейность, базисные функции, жесткостные характеристики высших порядков.

Применение неоднородных структур в сочетании с принципами рационального проектирования позволяет создавать весьма эффективные несущие конструкции [1, 2, 3], адаптированные к возникающему в них напряженно-деформированному состоянию и обладающими благодаря этому повышенной несущей способностью, жесткостью, трещиностойкостью при одновременном снижении массозатратных показателей. Номенклатура используемых в них материалов может быть весьма разнообразной и включать: металлы, бетоны, конструкционные пластмассы, древесину, искусственные дисперсные композиты и т. п. Широкое распространение неоднородных конструктивных стержневых элементов в инженерной практике в настоящее время сдерживается по ряду причин, главной из которых является отсутствие надежных, апробированных методов расчета, базирующихся на расчетных моделях, обладающих, с одной стороны, необходимой точностью и достоверностью, а с другой, – приемлемой трудоемкостью решения основных классов задач.

В данной статье рассматривается расчетная модель и метод решения прямых краевых задач нелинейного термоупругого деформирования стержней, неоднородная структура которых образована соединением различных по физическим свойствам и геометрической форме квазиоднородных частей (фаз) конечных размеров, выполненных из конструкционных материалов, в той или иной мере исполняющих несущие (не изолирующие) функции.

В локальной системе координат $хуz$ структура многофазного стержня (МФС) обладает симметрией относительно плоскости $ху$, в которой стержень испытывает прямой продольно-поперечный изгиб, продольная ось совмещена с осью $х$. Будем считать, что в s -фазном стержне: обеспечены условия идеального межфазного контакта при отсутствии разрывов в деформациях на границах фаз; фазовые материалы представляет собой сплошную, однородную, изотропную среду, обладающую свойствами нелинейной упругости; значения физических характеристик материалов в фазах имеют одинаковый порядок; длина и характерный поперечный размер стержня удовлетворяют условию $l \geq (5 \div 6)h$.

В зависимости от геометрических параметров фаз могут быть выделены ряд частных типов структур МФС (рис. 1): поперечно- и продольно-слоистые,

полярно- и радиально-слоистые, смешанные типы – поперечно-продольно-слоистые структуры. Отличаются они формами межфазных поверхностей и направлением реализации неоднородности. Так для схем «б», «в», «г», «д» такими направлениями соответственно являются: ось y , луч cm , радиус r , ось x .

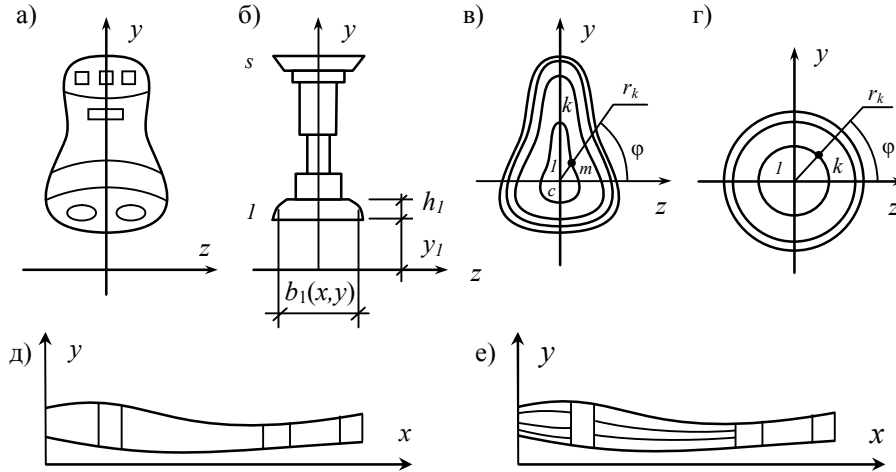


Рис. 1. Структуры многофазных стержней: общего вида (а), поперечно-слоистая (б), полярно-слоистая (в), радиально-слоистая (г), продольно-слоистая (д), продольно-поперечно-слоистая (е)

Модели «в» и «г» при $r_1 > 0$ описывают полые многослойные стержни, что может применяться при моделировании слоистых трубопроводов и высотных дымовых труб. Наиболее эффективной при изгибе в плоскости xy является поперечно-слоистая структура «б», в которой фазы отделены друг от друга цилиндрическими поверхностями $y_k(x)$ ($k=1, \dots, s+1$) с образующими, параллельными оси z . Ширина и высота k -го слоя в нормальном к оси x сечении заданы в функциональном виде $b_k(x, y)$, $h_k(x) = y_{k+1} - y_k$ ($k=1, \dots, s$).

Будем считать, что МФС деформируется при выполнении для малых величин продольных ε_x и поперечных ε_y деформаций, сдвигов γ_{yx} , продольных u и поперечных v перемещений точек отсчетной оси, углов поворота поперечных сечений θ следующих соотношений

$$\varepsilon_x + 1 \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_0 - \kappa \cdot y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y) = -\gamma_0(x) = v' - \theta, \quad (1)$$

$$\varepsilon_0(x) = u', \quad \kappa(x) = \theta', \quad (') = \partial(\cdot) / \partial x, \quad (2)$$

использование которых в рассматриваемых стержнях с оговоренными выше геометрическими и физическими ограничениями, является вполне приемлемым с точки зрения обеспечения требуемой достоверности расчетов [1, 2, 3].

Выражения для интегральных силовых факторов и дифференциальные уравнения равновесия стержня в деформированном состоянии имеют вид

$$[N, Q, M](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA, \quad (3)$$

$$N' + (Q\theta)' = -q_x, \quad Q' - (N\theta)' = q_y, \quad M' = Q + m_z. \quad (4)$$

Известно, что введение в расчетную модель гипотез для функций напряженно-деформированного состояния вносит определенную «нефизичность» в

состояние системы и не позволяет построить непротиворечивую систему основных соотношений. В таких случаях в ряде подходов при построении приближенных теорий принято допускать противоречия в физических соотношениях для некоторых (второстепенных) компонент напряжения [1, 4]. В рассматриваемом классе расчетных схем основной компонентой тензора напряжений является σ_x , а τ_{yx} , σ_y – второстепенными, из них учитывать будем лишь τ_{yx} .

Компоненту $\sigma_x^{(k)}$ для материала k -й фазы представим в виде суммы

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} f_{\varepsilon,i}(\varepsilon), \quad (5)$$

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k T_k(x, y) \quad (6)$$

с набором гладких базисных функций (БФ) $f_{\varepsilon,i}$ ($i = 0, \dots, r$), определенных на $\varepsilon \in \Pi_{\varepsilon}^i \in \Pi_{\varepsilon}$, с числовыми параметрами $p_{k,i}^{\sigma} = [p_{k,i}^{\sigma+}, p_{k,i}^{\sigma-}]$ для областей растяжения и сжатия в k -м материале; $T_k(x, y)$ – функция изменения температуры в пространстве k -й фазы по отношению к исходному состоянию; α_k – коэффициент температурного расширения материала k -й фазы.

В зависимости от вида принятых БФ и областей их определения могут быть выделены типы модели (5): а) модель с глобальными БФ, заданными на единой области $\Pi_{\varepsilon}^i = \Pi_{\varepsilon}$; б) модель с различными локальными БФ, определенными на непересекающихся подобластях $\Pi_{\varepsilon}^i \in \Pi_{\varepsilon}$, что дает возможность описывать особенности законов деформирования материалов, в частности, – площадку текучести и др.

Подстановка (5), (6) в (3) дает систему уравнений, связывающих обобщенные деформации с интегральными силовыми факторами и температурой

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} f_{\varepsilon,i}(\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k) dA = N, \\ - \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} f_{\varepsilon,i}(\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k) y dA = M. \end{cases} \quad (7)$$

Умножив и разделив подынтегральные выражения в (7), содержащие нелинейные операторы $f_{\varepsilon,i}$, на деформацию (6), после преобразований получим квазилинейный аналог системы физических соотношений. Дополнив их связью поперечной силы с осредненным сдвигом, получим

$$\begin{cases} \bar{D}_A \varepsilon_0 - \bar{D}_S \kappa = N - N_T, \\ -\bar{D}_S \varepsilon_0 + \bar{D}_I \kappa = M - M_T, \\ \gamma_0 D_Q = Q, \end{cases} \quad (8)$$

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [1, y, y^2] \frac{f_{\varepsilon,i}(\varepsilon)}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA, \quad (9)$$

$$[N_T, M_T](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [-1, y] \frac{f_{\varepsilon,i}(\varepsilon) T_k}{\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k} dA. \quad (10)$$

Здесь (9) – секущие жесткостные характеристики сечения МФС при нелинейном термоупругом деформировании; D_Q – сдвиговая жесткость сечения; (10) – силовые факторы, обусловленные стесненностью температурных деформаций.

Объединив физические уравнения (8) с уравнениями равновесия (4) при учете шести соответствующих граничных условий, получим нелинейную краевую задачу для нахождения функций $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $\theta(x)$, отражающих деформирование МФС.

Хорошие результаты в плане получения универсального решения, приемлемой точности и трудоемкости дает способ представления модели (5) на основе степенных БФ с натуральными показателями

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\sigma} \varepsilon^i, \quad (11)$$

с учетом которой уравнения (7) и выражения (9), (10) принимают вид

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k)^i dA = N, \\ -\sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k)^i y dA = M, \end{cases} \quad (12)$$

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [1, y, y^2] (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k)^{i-1} dA, \quad (13)$$

$$[N_T, M_T](x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^s \alpha_k \sum_{i=0}^r p_{k,i}^{\pm} \iint_{A_k} [-1, y] (\varepsilon_0 - \kappa y - \alpha_k T_k)^{i-1} T_k dA.$$

В случае силового воздействия полученные выражения упрощаются. Нелинейная система уравнений (12) при $T = 0$ примет компактный вид

$$\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j = N, \quad -\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{i,j+1} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j = M \quad (14)$$

с жесткостными характеристиками сечения i -го физического и j -го геометрического порядков

$$D_{ij}(x) = \sum_{k=1}^s p_{k,i}^{\sigma} \iint_{A_k} y^j dA, \quad (15)$$

где c_{ij} ($j = 0, \dots, i$) – коэффициенты биномов Ньютона $(\varepsilon_0 - \kappa)^i$.

Набор однородных блоков ($i = 1, \dots, r$) в (7), (12), (14), порожденных членами в (5), (11), может быть произвольным и не обязательно последовательным. Система уравнений (14) является обобщением частных случаев. Так, обозначив через A_k , S_k , I_k – площадь, статический момент и момент инерции сечения k -й фазы, при $r = 0$ из нее получаем уравнения

$$D_{00} = N, \quad -D_{01} = M,$$

$$D_{00} = \sum_{k=1}^s (\pm \sigma_{k,s}^{\pm} A_k), \quad D_{01} = \sum_{k=1}^s (\pm \sigma_{k,s}^{\pm} S_k)$$

с жесткостями, зависящими от положения нейтральной линии, описывающие предельные состояния сечения из жесткопластических разносопротивляющихся

растяжению и сжатию материалов ($\sigma_{k,s}^{\pm}$ – пределы текучести материалов). При удержании линейных членов, уравнения (14) становятся квазилинейными с жесткостными характеристиками сечения из разномодульных материалов

$$D_{10}\varepsilon_0 - D_{11}\kappa = N, \quad -D_{11}\varepsilon_0 + D_{12}\kappa = M,$$

$$D_{10} = \sum_{k=1}^s E_k^{\pm} A_k, \quad D_{11} = \sum_{k=1}^s E_k^{\pm} S_k, \quad D_{12} = \sum_{k=1}^s E_k^{\pm} I_k.$$

Удерживая в (11) линейный и квадратичный члены, получим степенную зависимость Герстнера $\sigma = E\varepsilon + p\varepsilon^2$, обобщенную на случай разносопротивляемости материалов, использованную в [5] для расчета физически нелинейных деревянных рам со смещенными центрами поперечных сечений. Система уравнений (14) в этом случае будет содержать лишь линейный и квадратичный блоки с жесткостными характеристиками первого и второго физического и 1 – 3 – геометрического порядков.

Для квазилинейной физической системы (8) принятие аппроксимации (11) при силовом воздействии и $p_{k,0}^{\sigma} = 0$ дает жесткости (13):

$$[\bar{D}_A, \bar{D}_S, \bar{D}_I](x, \varepsilon) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{i-1} c_{ij} [D_{ij}, D_{i,j+1}, D_{i,j+2}] \varepsilon_0^{i-j-1} \kappa^j. \quad (16)$$

Откуда в случае квадратичной зависимости (11) при $r = 2$ имеем

$$\bar{D}_A = D_{10} + \varepsilon_0 D_{20} - \kappa D_{21},$$

$$\bar{D}_S = D_{11} + \varepsilon_0 D_{21} - \kappa D_{22}, \quad \bar{D}_I = D_{12} + \varepsilon_0 D_{22} - \kappa D_{23},$$

а для нечетной кубической при $r = 3$ –

$$\bar{D}_A = D_{10} + \varepsilon_0^2 D_{30} - 2\varepsilon_0 \kappa D_{31} + \kappa^2 D_{32}, \quad \bar{D}_S = D_{11} + \varepsilon_0^2 D_{31} - 2\varepsilon_0 \kappa D_{32} + \kappa^2 D_{33},$$

$$\bar{D}_I = D_{12} + \varepsilon_0^2 D_{32} - 2\varepsilon_0 \kappa D_{33} + \kappa^2 D_{34}. \quad (17)$$

При линейном термоупругом деформировании ($r = 1, p_{k,0}^{\sigma} = 0, p_{k,1}^{\sigma+} = p_{k,1}^{\sigma-} = E_k$) из постановки (11), (12) вытекают формулы для компонент нормального $\sigma_{x,N}, \sigma_{x,M}, \sigma_{x,T}$ и касательного $\tau_{yx,Q}, \tau_{yx,N}, \tau_{yx,M}, \tau_{yx,T}, \tau_{yx,qx}, \tau_{yx,mz}$ напряжений [6]. Касательные напряжения находятся из условия равновесия части $y \in [y, y_{s+1}]$ малого элемента dx МФС

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y) = -\frac{q_x}{b_k(x, y)} - \frac{1}{b_k(x, y)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_y^{y_{s+1}(x)} \sigma_x(x, y) b(x, y) dy \right). \quad (18)$$

При нелинейном деформировании касательное напряжение может быть получено на основе аппроксимации погонной сдвигающей силы (производная от интеграла в (18)) в форме

$$\frac{\partial N^{\text{sec}}(x, y)}{\partial x} = b_0 \tau_0(x) f_{\tau}(y), \quad (19)$$

где $f_{\tau}(y)$ – заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям $f_{\tau}(y_1) = f_{\tau}(y_{s+1}) = 0$; $\tau_0(x)$ – функциональный параметр, характеризующий продольное распределение сдвигающих сил; b_0 – характерный размер (ширина) МФС.

Объединив (18), (19) и (3), получим формулу касательного напряжения

$$\tau_{yx}^{(k)}(x, y) = \frac{Q(x)}{b_k(x, y)} \frac{f_\tau(y)}{F_\tau}, \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy. \quad (20)$$

Приравнивая энергию деформации интегрального усилия Q и напряжений (20), получим сдвиговую жесткость сечения МФС

$$D_Q(x) = F_\tau^2 \left/ \sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k} dy \right. \quad (21)$$

Рассмотрим итерационной алгоритм решения краевой задачи нелинейного термоупругого деформирования МФС.

Интегрирование (4) при учете малых величин первого порядка, сосредоточенных силовых факторов F_x, F_y, M_z , распределенных – q_x, q_y, m_z (условно взятых по одному каждого из них) при удовлетворении условий

$$N(0) = N_0 - Q_0\theta, \quad Q(0) = Q_0 + N_0\theta, \quad M(0) = M_0$$

дает выражения внутренних силовых факторов в форме метода начальных параметров

$$\begin{aligned} N(x) &= N_0 - Q_0\theta - F_x - \theta F_y - \int_{x_{qx}}^x q_x dx - \theta \int_{x_{qy}}^x q_y dx, \\ Q(x) &= N_0\theta + Q_0 - \theta F_x + F_y - \theta \int_{x_{qx}}^x q_x dx + \int_{x_{qy}}^x q_y dx, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0 + N_0v + Q_0x + M_z + \int_{x_m}^x m_z dx + F_y(x - x_{F_y}) - F_x[v(x) - v(x_{F_x})] - \\ &\quad - \int_{x_{qx}}^x q_x(\xi)[v(x) - v(\xi)]d\xi + \int_{x_{qy}}^x q_y(\xi)(x - \xi)d\xi. \end{aligned}$$

Выразив из (8) обобщенные деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \bar{\delta}_A(N - N_T) + \bar{\delta}_S(M - M_T), \\ \kappa &= \bar{\delta}_S(N - N_T) + \bar{\delta}_I(M - M_T), \quad \gamma_0 = \delta_Q Q \end{aligned} \quad (23)$$

через податливости сечения (с учетом (13), (21))

$$\bar{\delta}_A = \frac{1}{\bar{D}_A - \bar{D}_S^2 / \bar{D}_I}, \quad \bar{\delta}_S = \frac{\bar{D}_S}{\bar{D}_I \bar{D}_A - \bar{D}_S^2}, \quad \bar{\delta}_I = \frac{1}{\bar{D}_I - \bar{D}_S^2 / \bar{D}_A}, \quad \delta_Q = \frac{1}{D_Q}$$

интегрируя (2) при учете (22), получим перемещения

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + N_0 \int_0^x (\bar{\delta}_A + \bar{\delta}_S v) dx + M_0 \int_0^x \bar{\delta}_S dx + Q_0 \int_0^x (\bar{\delta}_S x + \bar{\delta}_A \theta) dx - \\ &\quad - F_x \int_{x_{F_x}}^x [\bar{\delta}_A + \bar{\delta}_S (v(x) - v(x_{F_x}))] dx + F_y \int_{x_{F_y}}^x [\bar{\delta}_S (x - x_{F_y}) - \bar{\delta}_A \theta] dx + M_z \int_{x_{M_z}}^x \bar{\delta}_S dx - \\ &\quad - \int_{x_{q_x}}^x \left\{ \bar{\delta}_A \int_{x_{q_x}}^x q_x dx + \bar{\delta}_S \int_{x_{q_x}}^x q_x(\xi)[v(x) - v(\xi)] d\xi \right\} dx + \end{aligned}$$

$$+ \int_{x_{q_y}}^x \left\{ \bar{\delta}_S \int_{x_{q_y}}^x q_y(\xi)(x-\xi)d\xi - \bar{\delta}_A \theta \int_{x_{q_y}}^x q_y dx \right\} dx + \int_{x_{m_z}}^x \bar{\delta}_S dx \int_{x_{m_z}}^x m_z dx + u^{(T)}, \quad (24)$$

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + N_0 \int_0^x \left(\int_0^x (\bar{\delta}_S + \bar{\delta}_I v) dx - \delta_Q \theta \right) dx + Q_0 \int_0^x \left(\int_0^x (\bar{\delta}_I x + \bar{\delta}_S \theta) dx - \delta_Q \right) dx +$$

$$- M_0 \int_0^x dx \int_0^x \bar{\delta}_I dx - F_x \int_{x_{F_x}}^x \left(\int_{x_{F_x}}^x [\bar{\delta}_S + \bar{\delta}_I (v(x) - v(x_{F_x}))] dx + \delta_Q \theta \right) dx +$$

$$+ F_y \int_{x_{F_y}}^x \left(\int_{x_{F_y}}^x [\bar{\delta}_I (x - x_{F_y}) - \bar{\delta}_S \theta] dx - \delta_Q \right) dx - \int_{x_{q_y}}^x \delta_Q dx \int_{x_{q_x}}^x q_y dx -$$

$$- \int_{x_{q_x}}^x dx \int_{x_{q_x}}^x \left\{ \bar{\delta}_S \int_{x_{q_x}}^x q_x dx + \bar{\delta}_I \int_{x_{q_x}}^x q_x(\xi)[v(x) - v(\xi)] d\xi \right\} dx + \int_{x_{q_x}}^x \delta_Q \theta dx \int_{x_{q_x}}^x q_x dx +$$

$$+ \int_{x_{q_y}}^x dx \int_{x_{q_y}}^x \left\{ \bar{\delta}_I \int_{x_{q_y}}^x q_y(\xi)(x-\xi)d\xi - \bar{\delta}_S \theta \int_{x_{q_y}}^x q_y dx \right\} dx +$$

$$+ \int_{x_{m_z}}^x dx \int_{x_{m_z}}^x \bar{\delta}_I dx \int_{x_{m_z}}^x m_z dx + M_z \int_{x_{M_z}}^x dx \int_{x_{M_z}}^x \bar{\delta}_I dx + v^{(T)}, \quad (25)$$

$$u^{(T)} = - \int_0^x (N_T \bar{\delta}_A + M_T \bar{\delta}_S) dx, \quad \theta^{(T)} = - \int_0^x (N_T \bar{\delta}_S + M_T \bar{\delta}_I) dx,$$

$$v^{(T)} = - \int_0^x dx \int_0^x (N_T \bar{\delta}_S + M_T \bar{\delta}_I) dx.$$

Угол поворота $\theta(x)$ определяется выражением идентичным (24) при заменах $\bar{\delta}_A \rightarrow \bar{\delta}_S$, $\bar{\delta}_S \rightarrow \bar{\delta}_I$, $u \rightarrow \theta$, $u_0 \rightarrow \theta_0$, $u^{(T)} \rightarrow \theta^{(T)}$. Начальные параметры находятся из шести граничных условий, формируемых на основе групп уравнений, первая из которых связывает перемещения и силовые факторы в конечном сечении с координатой x_* при наличии в нем линейно-деформируемых связей с податливостями δ_x , δ_y , δ_θ

$$u(x_*) = \delta_x [\pm N(x_*) \pm Q(x_*)\theta(x_*) + F_{x*}],$$

$$v(x_*) = \delta_y [\pm N(x_*)\theta(x_*) \mp Q(x_*) + F_{y*}], \quad \theta(x_*) = \delta_\theta [\pm M(x_*) - m_{z*}]. \quad (26)$$

Вторая – в случае задания силовых факторов в конечном сечении

$$N(x_*) + \theta(x_*)Q(x_*) = \mp F_{x*},$$

$$\theta(x_*)N(x_*) - Q(x_*) = \mp F_{y*}, \quad M(x_*) = \pm m_{z*}, \quad (27)$$

записанных с использованием соотношений (22), (24), (25). На левом конце применяются верхние, а на правом – нижние знаки.

При организации итерационной процедуры перемещения v и углы поворота θ , входящие в нелинейные множители (22)–(27) и податливости $\bar{\delta}_A$, $\bar{\delta}_S$, $\bar{\delta}_I$

определяются расчетом на предыдущем шаге. На первом шаге процедуры выражения (22), (24), (25) записываются при нулевых значениях перемещений и углов поворота в правых частях, с использованием жесткостных характеристик сечения из линейно упругих материалов.

Пример. На рис. 2 показана схема сжато-изогнутого стержня, имеющего поперечно-слоистую структуру, геометрически оформленную в виде составного двутавра. Силовое воздействие задано с точностью до параметра q (кН/м) и коэффициента $k_F = 15$ (м) горизонтальной силы. Модельные диаграммы деформирования представим единой симметричной кубической зависимостью $\sigma_x^{(k)} = p_{k,1}\varepsilon + p_{k,3}\varepsilon^3$ с параметрами $p_{k,1}$, $p_{k,3}$ материалов в трех слоях (в ГПа) равными: 13,0 и -42000 – для 1-го; 19,0 и -160000 – для 2-го; 31,0 и -970000 – для 3-го слоя. Графики $\sigma - \varepsilon$ показаны на рис. 2, г.

Решение задачи с использованием полученных выше соотношений выполним в форме метода сил для основной системы, полученной путем удаления угловой связи над средней опорой В. Принимая стандартные обозначения, пренебрегая сдвигами, запишем

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{[t]} X_1^{[t]} + \Delta_{1F}^{[t]} &= 0, \quad S^{[t]} = S_1^{[t]} X_1^{[t]} + S_F^{[t]}, \quad S \in [M, N], \\ \delta_{11}^{[t]} &= \sum_j \int_{l_j} M_1 \kappa_1^{[t-1]} dx + \sum_j \int_{l_j} N_1 \varepsilon_{0,1}^{[t-1]} dx, \\ \Delta_{1F}^{[t]} &= \sum_j \int_{l_j} M_1 \kappa_F^{[t-1]} dx + \sum_j \int_{l_j} N_1 \varepsilon_{0,F}^{[t-1]} dx. \end{aligned}$$

Здесь силовые факторы N_1 , M_1 находятся при помощи линеаризованных (принимая $v = 0$, $\theta = 0$) выражений (22) при соответствующем наборе воздействий в основной системе. Деформации $\varepsilon_{0,1}$, $\varepsilon_{0,F}$ и кривизны κ_1 , κ_F определяются нелинейными соотношениями (23) при подстановке в них а) нелинейных выражений N_1 , M_1 , N_F , M_F , найденных с использованием в правых частях перемещений v , θ из предыдущего шага для суммарного состояния и б) величин жесткостей \bar{D} (17) также найденных для суммарного состояния.

Количество уточняющих шагов итерационной процедуры на начальных этапах нагружения составляло 2–3, а по достижении каким-либо материалом значительных напряжений $\sigma_x^{(k)} \rightarrow \sigma_{x,\max}^{(k)}$ их число достигало 5–7.

Предельное состояние стержня, в котором в наиболее опасной точке напряжение достигает максимума для соответствующего материала, реализуется при $q = 22$ кН/м. Это точка, расположенная в сечении «С» на верхней поверхности третьего слоя ($k = 3$; $x = 4,75$ м; $y = 0,15$ м). Результаты нелинейных расчетов показаны сплошными линиями в виде эпюры изгибающих моментов (рис. 2, в) и нормальных напряжений в двух наиболее нагруженных сечениях «В» и «С». Для сравнения выполнены расчеты в линейной постановке (штриховые линии).

Нелинейность деформирования в структурно неоднородных стержнях проявляется следующим образом. Во-первых, в виде искривления, в силу учета физической нелинейности, эпюр напряжений (рис. 3). В некоторых слоях при незначительном и среднем уровне деформаций это практически не заметно, а в других с более развитыми деформациями – отклонения от прямолинейности значительны. Для иллюстрации этого эффекта на схеме рис. 3, (б) нелинейный

закон $\sigma_3(y)$ для третьего слоя условно продлен в виде штрих-пунктирной линии за пределы слоя до нейтральной оси.

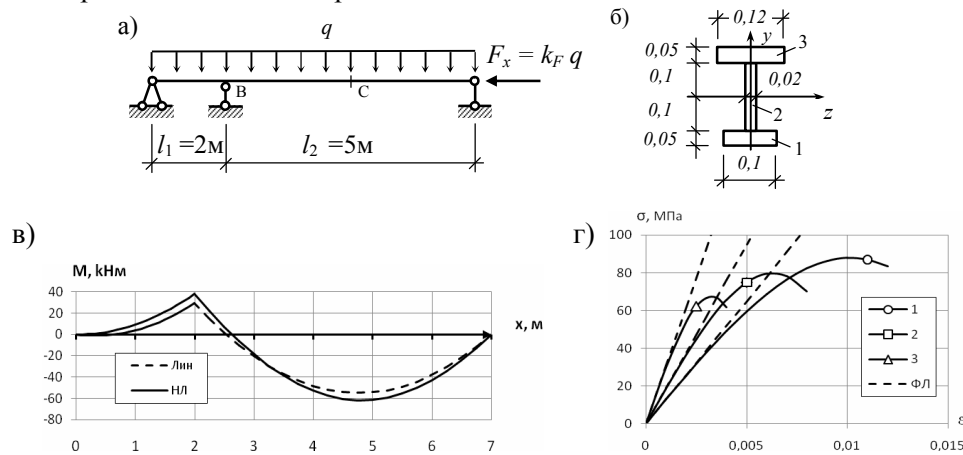


Рис. 2. Расчетная схема стержня (а), поперечное сечение (б), эпюры изгибающих моментов при $q = 22$ кН/м (в), модели диаграмм деформирования материалов (г)

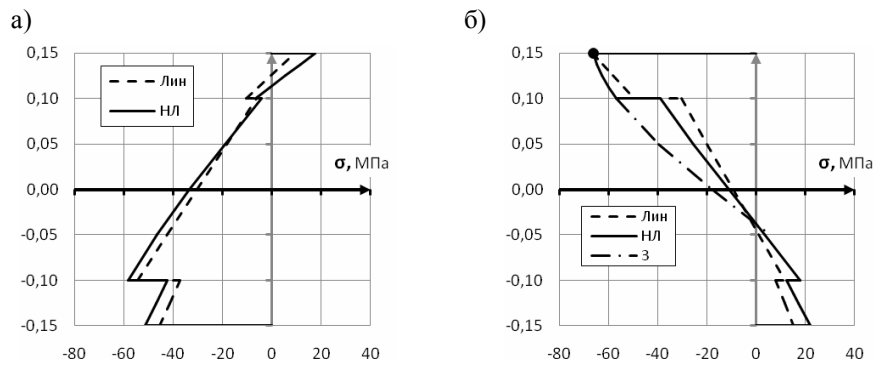


Рис. 3. Эпюры нормальных напряжений в опорном сечении В (а) и в сечении «с» пролета (б) при нагрузках $q = 22$ кН/м

Расчеты, выполненные в физически и геометрически линейной постановке иллюстрируют вторую группу эффектов, связанную с перераспределением внутренних усилий и напряжений. Снижение опорного момента M_B в линейной постановке обусловлено игнорированием физической нелинейности, приводящей к непропорциональному росту жесткостных характеристик (пунктир на рис. 2, г). Основным фактором снижения пролетного момента M_C является геометрическая линейность – неучет дополнительного момента от действия сил N_0 , F_x в (25). Погрешности изгибающих моментов, найденных линейным расчетом, составили 22,4% и 11,2% в сечениях В и С соответственно. Погрешности максимальных в слоях напряжений составляют величины 15–24%.

В предельном состоянии прочность исчерпывается лишь в одной точке ($k = 3$; $x = 4,75$ м; $y = 0,15$ м), отмеченной на рис. 3 темным маркером. Множество остальных точек объема слоистого стержня существенно недогружено, что свидетельствует о том, что структура стержня может быть оптимизирована как путем выбора более рациональной структуры МФС (рис. 1) с соответствующим расположением материалов в фазах, так и путем выявления рациональных геометрических функций $b_k(x)$, $h_k(x)$ ($k = 1, 2, 3$).

Выводы. Изложенный метод расчета нелинейно деформируемых многофазных стержней, основанный на аппроксимации нормального напряжения степенным рядом (11) и применении жесткостных характеристик сечений высших порядков позволяет: а) выстроить алгоритмичную систему блочного формирования физических соотношений для интегральных силовых факторов; б) удовлетворительно описать диаграммы деформирования разнообразных конструкционных материалов и составленные из них структуры неоднородных конструктивных стержневых элементов; в) посредством использования квазилинейных уравнений и секущих жесткостных характеристик – применить расчетный аппарат линейной теории для построения физических соотношений нелинейно деформируемых стержневых систем.

Л и т е р а т у р а

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
2. Пискунов В.Г., Вериженко В.Е. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будивельник, 1986. – 176 с.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. – М: ВИНТИ, 1973. - 273 с.
4. Пискунов В.Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем // Механика композитных материалов. – 2003. – т. 39. - № 1. – с. 3-24.
5. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Расчет и проектирование деревянных стержневых систем с учетом физической нелинейности // Строительная механика и расчет сооружений, 2007. – № 6. – С. 46–52.
6. Мищенко А.В. Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций, 2007. – т. 13. – № 4. – С. 537–547.

R e f e r e n c e

1. Vasiliev, VV (1988), *Mechanics of the Composite Material Structures*, M.: Mashinostroenie, 272 p.
2. Piskunov, VG, Verizenko, VE (1986), *Linear and Nonlinear Tasks of Layered Structures Analysis*, Kiev: Budivelnik, 176 p.
3. Grigoluk, EI, Selezov, IT (1973), Nonclassic theories of rods, plates and shells rippling, *Science and Techical Results. Mechanic of Deformable Solids*, M.: VINITI, 273 p.
4. Piskunov, VG (2003), Iterative analytic theory in mechanic of layered composite systems, *Mechanic of Composite Materials*, Vol. 39, N 1, 3–24.
5. Mishchenko, AV, Nemirovsky YuV (2007), Analysis and rational designing of wood rod systems with the regard for physical nonlinear, *Structural Mechanics and Analysis of Building*, N 6, 46-52.
6. Mishchenko, AV (2007), Stresses on the layered rods of variable cross sections, *Composite Mechanics and Design*, Vol. 13, N 4, 537–547.

NON-LINEAR THERMOELASTIC DEFORMATION OF THE MULTIPHASE RODS

Mishchenko A.V.

Novosibirskiy Gosudarstvennyy Arhitekturno-Stroitel'nyy Universitet, Novosibirsk

The model of non-linear thermoelastic deformation of the multiphase rod is found on the given basal functions expansion of the normal stress. The method of the boundary problem, founded on the cross-section secant rigidity characteristics of the system quasi-linear physical equations are described.

KEY WORDS: multiphase rod, layered structure, physical non-linearity, basal functions, higher order rigidity characteristics.