

Теория упругости

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕРЕГОВ ИСКРИВЛЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В ИЗГИБАЮЩЕЙСЯ ПОЛОСЕ (БАЛКЕ) ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА

А.Б. МУСТАФАЕВ, канд. физ.-мат. наук,
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку
AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 9, e-mail: azer_bm@list.ru

Рассматриваются некоторые задачи о влиянии температурного поля на торможение роста искривленной трещины в полосе (балке), когда полоса изгибается в ее плоскости заданной системой нагрузок (постоянными изгибающими моментами, равномерно распределенным давлением и другими). Задача о равновесии искривленной трещины с частично контактирующими берегами при действии внешних нагрузок, наведенного температурного поля и усилий на контактирующих поверхностях трещины сводится к решению сингулярных интегральных уравнений. Принято, что на некоторой части контакта возникает сцепление берегов, а на остальной возможно проскальзывание.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изгиб полосы (балки), искривленная трещина, температурное поле, контактная зона сцепления, зона проскальзывания, контактные напряжения.

Полосы (балки) широко используются в технике и строительстве и для практики исследование вопросов разрушения полос (балок) имеет важное значение. Проблема торможения роста трещин имеет научное и важное практическое, так как и ее решение дает возможность продлить срок эксплуатации разнообразных конструкций и изделий практически во всех областях техники, а главное избежать катастроф связанных с внезапным разрушением. Представляет интерес оценка эффективности применения локальных изменений температуры вблизи конца трещины на ограничения роста трещин в элементах конструкций. Такие локальные изменения температуры полосы (балки) легко выполнимы технологически. Их задача состоит в задержке или торможении развития сквозной трещины. Поэтому решение задач механики разрушения для полос (балок) с трещиной, вблизи кончика которой, имеются изменения температуры, представляет теоретический и практический интерес. В последние годы этой проблеме был посвящен ряд работ [1-6]. Рассмотрим однородную изотропную полосу (балку). Обозначим через $2c$ и $2h$ соответственно ширину и толщину полосы. Срединная плоскость балки (плоскость xOy) является плоскостью симметрии. Примем, что полоса ослаблена искривленной трещиной, которая расположена вдоль оси x при $a \leq x \leq b$ (рис. 1), a , b – абсциссы концов трещины. В реальных материалах из-за структурных и технологических факторов поверхности трещины имеют неровности и искривления.

На полосу (балку) действуют внешние нагрузки (изгибающие моменты, равномерно распределенное по длине полосы давление или сосредоточенные силы), расположенные в срединной плоскости полосы. Грани полосы, параллельные плоскости xOy , и берега трещины свободны от внешних нагрузок.

Рассмотрим задачу механики разрушения об искривленной трещине в полосе (балке), полагая, что контур трещины имеет неровности (малые отклонения от прямолинейной формы). Уравнения контура трещины принимается в виде $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Для торможения роста трещины на пути ее роста (в растянутой зоне балки) с помощью нагрева тепловым источником области S до температуры T_0 создается зона сжимающих напряжений. Приняты следующие

допущения: все термоупругие характеристики материала плоскости не зависят от температуры; материал пластины представляет собой однородную изотропную среду. Считается, что в начальный момент $t=0$ произвольная область S на пути роста трещины в плоскости мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$. Остальная часть плоскости в начальный момент имеет температуру $T = 0$.

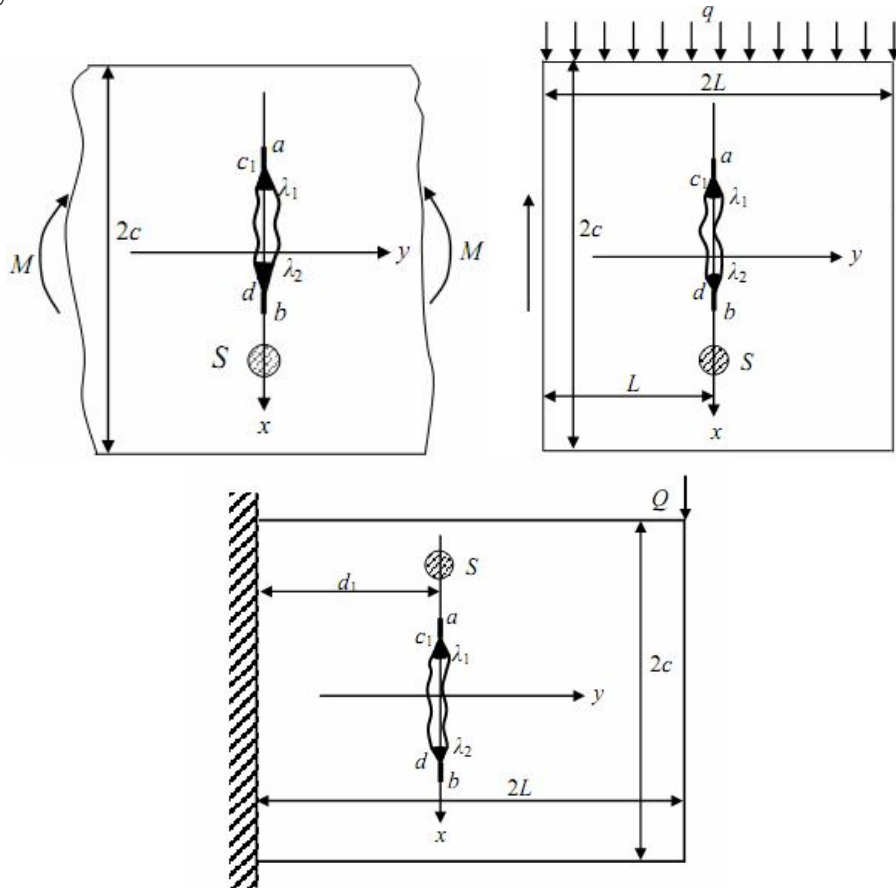


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Для многих металлических материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) экспериментально установлено [7, 8], что в диапазоне изменения температуры до $300^{\circ}\text{--}400^{\circ}\text{C}$ зависимость термоупругих характеристик слабо меняется с температурой. Таким образом, для всех конструкционных материалов существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве характеристик материала является корректным. Этот диапазон устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры.

Рассматривается случай когда, одна из вершин трещины находится в сжимаемой зоне, а другая в растянутой зоне. Воздействие теплового источника уменьшает [3] деформацию полосы в направлении, перпендикулярном трещины, что снижает коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров полосы и теплового источника будет появляться зона сжимающих напряжений, в которой берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до 70°--

100°C наблюдается замедление и торможение трещины. Существуют другие публикации [2-4], где дается положительный ответ о наблюдаемом эффекте частичного закрытия трещины. В отмеченных выше работах не было исследовано влияние искривленности берегов трещины, а также их взаимодействие с учетом проскальзывания и сцепления берегов. В настоящей статье исследовано влияние криволинейности трещины и взаимодействие ее берегов со скольжением на торможение роста трещины температурным полем в полосе (балке) при изгибе. Область практического применения результатов заключается в возможности предотвратить рост трещины и разрушение элементов конструкций и избежать катастроф, связанных с внезапным разрушением.

Полагаем, что в процессе деформации берега трещины в окрестностях вершин вступают в контакт на участках (a, λ_1) и (λ_2, b) (рис. 1). Считается, что каждая площадка контакта состоит из участков сцепления берегов (a, c_1) и (d, b) и двух участков (c_1, λ_1) и (λ_2, d) , на которых возможно проскальзывание. Обозначим через L_1 – совокупность участков сцепления; L_2 – совокупность участков проскальзывания; L_3 – участок берегов трещины, свободный от нагрузки. При определении температурного поля для упрощения задачи не учитывается его возмущение из-за наличия трещины.

Граничные условия на берегах трещины для рассматриваемой контактной задачи имеют вид

$$\text{при } y = f(x) \quad a \leq x < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \leq x \leq b: \quad \sigma_n = p_y(x); \quad (1)$$

$$a \leq x \leq c_1 \text{ и } d \leq x \leq b: \quad \tau_{nt} = p_{xy}(x);$$

$$c_1 < x < \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 < x < d: \quad \tau_{nt} = f_* p_y(x);$$

$$\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2: \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_{nt} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) = 0 \quad \text{на } L_1 + L_2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) = 0 \quad \text{на } L_1. \quad (3)$$

Здесь n, t – натуральные координаты; σ_n, τ_{nt} – компоненты тензора напряжений; u, v – составляющие вектора перемещений; $f_*(x)$ – коэффициент трения. Принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Кулона).

Модель контакта с трением и сцеплением впервые была рассмотрена Л.А. Галиным [9, 10]. Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению.

Компоненты тензора напряжений и вектора смещений выразим [11] через две аналитические функции комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (4)$$

$$2\mu \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

где μ – модуль сдвига материала; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν – коэффициент Пуассона.

Напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины определяем приближенно в том смысле [11], что будем удовлетворять граничным условиям задачи на контуре трещины (условиям (1)-(3)), и требовать, чтобы на

значительном расстоянии от трещины напряженное состояние в полосе совпадало с напряженным состоянием, определяемым функциями

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = \Phi_0^*(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3, \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Omega(z) = \Omega_0^*(z) = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3.$$

Функции (5) в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, 2, 3$) определяют напряженное состояние в полосе (балке) без трещины. Считая в формулах (5)

$$\begin{aligned} A_0 = 0; & \quad A_1 = 0; & \quad A_2 = \frac{M}{4I}; & \quad A_3 = 0 \\ B_0 = 0; & \quad B_1 = 0; & \quad B_2 = \frac{3M}{4I}; & \quad B_3 = 0 \end{aligned}$$

где I – момент инерции площади сечения полосы, можно убедиться, что в этом случае функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ дают решение задачи о чистом изгибе моментами M бесконечной полосы (балки) без трещины.

При

$$\begin{aligned} A_0 = \frac{q}{24I}; & \quad A_1 = 0; & \quad A_2 = \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{2c^2}{5} \right); & \quad A_3 = -\frac{qc^3}{12I}; \\ B_0 = \frac{7q}{24I}; & \quad B_1 = 0; & \quad B_2 = \frac{q}{8I} \left(3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right); & \quad B_3 = \frac{qc^3}{12I} \end{aligned}$$

функции (5) дают решение задачи об изгибе балки длиной $2L$ без трещины, когда балка нагружена равномерным давлением интенсивности q . В этом случае принято, что балка свободно расположена на двух опорах, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

Если же

$$\begin{aligned} A_0 = 0; & \quad A_1 = -\frac{iQ}{8I}; & \quad A_2 = -\frac{Q(2L-d)}{4I}; & \quad A_3 = 0; \\ B_0 = 0; & \quad B_1 = \frac{5iQ}{8I}; & \quad B_2 = -\frac{3Q(2L-d)}{4I}; & \quad B_3 = -\frac{iQc^2}{2I}, \end{aligned}$$

то функции (5) дают решение задачи об изгибе жестко заземленной консольной балки без трещины под действием постоянной поперечной силы Q , приложенной на ее свободном конце.

Напряженное состояние в полосе с трещиной представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_{x1}, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_{y1}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy1}, \quad (6)$$

где σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 – решение задачи термоупругости для полосы (балки) без трещины.

Для нахождения напряженного состояния σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 решаем задачу термоупругости для сплошной полосы. Вначале определяем распределение температуры в полосе. Для этого решаем задачу теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа; a – коэффициент температуропроводности материала полосы.

Находим температурное поле для сплошной неограниченной полосы

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) d\xi d\eta, \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Для обобщенного плоского напряженного состояния, считается, что полоса теплоизолирована на боковых поверхностях. С помощью термоупругого потенциала перемещений [12] решение задачи термоупругости для сплошной полосы (балки) найдено в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} \left[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + 2(y - \eta)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4at}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) \right] d\xi d\eta \right\} \\ \sigma_y^0 &= -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} \left[(y - \eta)^2 - (x - \xi)^2 + 2(x - \xi)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4at}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) \right] d\xi d\eta \right\} \\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{\mu(1 + \nu)\alpha T_0}{\pi} \iint_S \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{R^2} \left[1 - \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4at}\right) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения.

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию неровной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ представляют собой малые величины, функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \varepsilon H(x)$, $a \leq x \leq b$, где ε – малый параметр.

Напряжения σ_{y_1} , σ_{x_1} , τ_{xy_1} , p_y , p_{xy} и u , v , λ_1 , λ_2 , c_1 , d ищем в виде разложений по малому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots, \quad \sigma_{y_1} = \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots, \quad \tau_{xy_1} = \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots, \\ u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad p_y = p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)} + \dots, \quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)} + \dots, \\ \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \varepsilon \lambda_1^1 + \dots, \quad \lambda_2 = \lambda_2^0 + \varepsilon \lambda_2^1 + \dots, \quad c_1 = c_1^0 + \varepsilon c_1^1 + \dots, \quad d = d^0 + \varepsilon d^1 + \dots, \end{aligned}$$

Значения напряжений при $y = f(x)$ найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $y = 0$. Используя метод возмущений с учетом предыдущих формул, найдем граничные условия при $y = 0$, $a \leq x \leq b$:

в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_3, \\ \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_1, \\ \sigma_y^{(0)} - i\tau_{xy}^{(0)} &= (1 - if_*) p_y^{(0)} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \quad \text{на } L_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_0^+ - v_0^-) = 0 \quad \text{на } L_1+L_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_0^+ - u_0^-) = 0 \quad \text{на } L_1;$$

в первом приближении

$$\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = N - iT \quad \text{на } L_3 \quad (9)$$

$$\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)} + N - iT \quad \text{на } L_1$$

$$\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = (1 - if_*)p_y^{(1)} + N - iT \quad \text{на } L_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1^+ - v_1^-) = 0 \quad \text{на } L_1+L_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1^+ - u_1^-) = 0 \quad \text{на } L_1$$

$$N = 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}, \quad N = (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} \quad (10)$$

Если в формулах (4) перейти к граничным значениям на контуре трещины, т.е. положить $y \rightarrow \pm 0$, и принять во внимание граничные условия (8), то получим задачу линейного сопряжения граничных значений искомых функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ в нулевом приближении

$$[\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^+ + [\Phi_0(t) + \Omega_0(t)]^- = 2f_0(t), \quad (11)$$

$$[\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^+ - [\Phi_0(t) - \Omega_0(t)]^- = 0,$$

где

$$f_0(t) = \begin{cases} -(\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3 \\ p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1 \\ (1 - if_*)p_y^{(0)} - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2 \end{cases}$$

Решение задачи линейного сопряжения граничных значений в нулевом приближении в классе всюду ограниченных функций запишется [11] в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-z)}} + \quad (12)$$

$$+ \sqrt{(z-a)(z-b)} P_n(z) + \frac{1}{2} [\Phi_0^*(z) - \Omega_0^*(z)]$$

$$\Omega_0(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-z)}} +$$

$$+ \sqrt{(z-a)(z-b)} P_n(z) - \frac{1}{2} [\Phi_0^*(z) - \Omega_0^*(z)]$$

где функции $\Phi_0^*(z)$ и $\Omega_0^*(z)$ определяются равенствами (5), а полином $P_n(z)$ имеет вид

$$P_n(z) = D_n z^n + D_{n-1} z^{n-1} + \dots + D_0 \quad (13)$$

Степень полинома (13) и его коэффициенты D_0, D_1, \dots, D_n определяются из условия поведения функций $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ в окрестности точки $|z| = \infty$. Функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ аналитичны в области вне трещины и при больших значениях $|z|$ имеют вид

$$\Phi_0(z) = \Phi_0^*(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Omega_0(z) = \Omega_0^*(z) + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (14)$$

Следовательно, для нахождения коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин λ_1^0, λ_2^0 необходимо функцию $\Phi_0(z)$, представленную в (12), разложить в ряд по степеням z в окрестности точки $|z| = \infty$ и сопоставить это разложение с выражением (14).

Осуществляя необходимые вычисления для определения коэффициентов D_0, D_1, \dots, D_n и величин λ_1^0, λ_2^0 , находим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} D_2 + \frac{1}{2}(A_0 - B_0) &= A_0, \\ D_1 - \frac{1}{2}(a+b)D_2 + \frac{1}{2}(A_1 - B_1) &= A_1, \\ D_0 - \frac{1}{2}(a+b)D_1 - \frac{1}{8}(a-b)^2 D_2 + \frac{1}{2}(A_2 - B_2) &= A_2, \\ -C_1 - \frac{1}{2}(a+b)D_0 - \frac{1}{2}(a-b)^2 D_1 + \frac{1}{2}(A_3 - B_3) &= A_3, \\ \frac{1}{2}(a+b)C_1 - C_2 - \frac{1}{8}(a-b)^2 D_0 &= 0, \\ D_n &= 0, \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (15)$$

где
$$C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}, \quad C_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{t f_0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}.$$

Последние два уравнения в (15) служат для определения параметров λ_1^0, λ_2^0 .

При чистом изгибе моментами M полосы с трещиной из системы (15) имеем в нулевом приближении:

$$\begin{aligned} D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad D_0 = \frac{M}{2I}, \\ -\frac{1}{2}(a+b)D_0 = C_1, \quad -\frac{1}{2}(a+b)C_1 - C_2 = \frac{1}{8}(a-b)^2 D_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Последние два уравнения (условия размещимости краевой задачи) служат для определения параметров λ_1^0, λ_2^0 . При изгибе полосы равномерным давлением интенсивности q имеем систему (15). Из системы (15) находим

$$\begin{aligned} D_2 = \frac{q}{6I}, \quad D_1 = \frac{1}{2}(a+b)\frac{q}{6I}, \\ D_0 = \frac{1}{4}(a+b)D_1 + \frac{1}{8}(a-b)^2 D_1 + \frac{q}{4I} \left(L^2 - \frac{2c^2}{5} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$-\frac{1}{2}(a+b)D_0 - \frac{1}{2}(a-b)D_1 = C_1,$$

$$-\frac{1}{8}(a-b)^2 D_0 = -2C_2.$$

Последние два уравнения, как и в предыдущем случае, служат для нахождения параметров λ_1^0 , λ_2^0 . При изгибе консольной балки из системы (13) получаем:

$$D_2 = 0, \quad D_1 = \frac{iQ}{4I}, \quad D_0 = \frac{1}{2}(a+b)\frac{iQ}{4I} - \frac{Q}{2I}(2L-d),$$

$$-\frac{1}{2}(a+b)D_0 - \frac{1}{2}(a-b)^2 D_1 + \frac{iQc^3}{4I} = C_1, \quad (16)$$

$$\frac{1}{8}(a-b)^2 D_0 = -2C_2.$$

В этом случае последние два уравнения также служат для определения параметров λ_1^0 , λ_2^0 в нулевом приближении.

В полученные соотношения входят неизвестные контактные напряжения. Условиями, определяющими неизвестные контактные напряжения между берегами трещины в контактных зонах, являются дополнительные соотношения (8) для перемещений. Используя полученное решение задачи, находим раскрытие между противоположными берегами трещины в нулевом приближении:

$$2\mu i \frac{\partial}{\partial x} \left[u_0^+(x,0) - u_0^-(x,0) + i(v_0^+(x,0) - v_0^-(x,0)) \right] = \quad (19)$$

$$= (1+\kappa) \left[\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) - \frac{F_n(x)}{2} \sqrt{(x-a)(x-b)} \right]$$

где $F_n(x) = d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0$.

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [13], на основании полученного решения (12), находим

$$\Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{f_0(t) dt}{\sqrt{(x-a)(x-b)(t-x)}} + 2P_n(x) \right\}. \quad (20)$$

Подставляя выражение (20) в соотношение (19), получаем комплексное сингулярное интегральное уравнение для определения контактных напряжений $p_y^{(0)}(x)$ и $p_{xy}^{(0)}(x)$.

При чистом изгибе и при изгибе балки под действием равномерно распределенной нагрузки имеем

$$F_n(z) = 0.$$

В случае изгиба консольной балки имеем

$$d_0 = -\frac{iQ}{16I}(b+a)[(b-a)^2 - 8c^2],$$

$$d_1 = -\frac{iQ}{8I}[8c^2 + (b-a)^2], \quad d_3 = \frac{iQ}{I}, \quad d_2 = -\frac{iQ}{2I}(b+a).$$

Отделяя в сингулярном интегральном уравнении действительные и мнимые

части, получаем систему двух действительных сингулярных интегральных уравнений **относительно**

$$\int_a^b \frac{p_y^{(0)}(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + f_y^0(x) = 0 \quad (a \leq x \leq \lambda_1^0 \quad \text{и} \quad \lambda_2^0 \leq x \leq b), \quad (21)$$

$$\int_a^b \frac{p_{xy}^{(0)}(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + f_{xy}^0(x) = 0 \quad (a < x \leq c_1^0 \quad \text{и} \quad d^0 \leq x \leq b). \quad (22)$$

Здесь:
$$f_y^0(x) = -\int_a^b \frac{\sigma_y^0 dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + \operatorname{Re} \left[2P_n(x) - \frac{1}{2}F_n(x) \right],$$

$$f_{xy}^0(x) = \int_a^b \frac{\tau_{xy}^0 dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + \operatorname{Im} \left[2P_n(x) - \frac{1}{2}F_n(x) \right] + \int_{L_2} \frac{f_* p_y^0(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}.$$

Решение интегральных уравнений (21) и (22) можно получить путем решения соответствующей задачи Римана [13]. Решая интегральное уравнение (21) с учетом ограниченности контактных напряжений на концах площадок контакта, найдем формулу для подсчета нормальных контактных напряжений $p_y^{(0)}(x)$:

$$p_y^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} X^+(x) \int_{L_1+L_2} \frac{f_y^0(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (23)$$

где $X^+(x) = \sqrt{(x-a)(\lambda_1^0 - x)(x - \lambda_2^0)(b-x)}$.

Аналогично, решая интегральное уравнение (22) найдем формулу для подсчета касательных напряжений на участке сцепления берегов трещины

$$p_{xy}^0(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} X_1^+(x) \int_{L_1} \frac{f_{xy}^0(\tau) d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (24)$$

где $X_1^+(x) = \sqrt{(x-a)(c_1^0 - x)(x - d^0)(b-x)}$.

Для определения параметров c_1^0 и d^0 имеем следующие уравнения

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}^0(t) dt}{X_1^+(t)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (25)$$

После нахождения решения задачи в нулевом приближении переходим к отысканию решения задачи в первом приближении. Находим по формулам (10) N и T . Решение граничной задачи (9) запишется в виде:

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-z)}}, \quad (26)$$

где
$$f_1(t) = \begin{cases} N - iT & \text{на } L_3 \\ p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)} + N - iT & \text{на } L_1 \\ (1 - if_*) p_y^{(1)} + N - iT & \text{на } L_2 \end{cases}.$$

Поступая аналогично нулевому приближению, для контактных напряжений $p_y^{(1)}(x)$, $p_{xy}^{(1)}(x)$ и размеров контактных зон получим два сингулярных интегральных уравнения

$$\int_{L_1+L_2} \frac{p_y^{(1)}(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + f_y^1(x) = 0 \quad (a \leq x \leq \lambda_1^1 \text{ и } \lambda_2^1 \leq x \leq b), \quad (27)$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}^{(1)}(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + f_{xy}^1(x) = 0 \quad (a < x \leq c_1^1 \text{ и } d^1 \leq x \leq b). \quad (28)$$

Здесь

$$f_y^1(x) = \int_a^b \frac{Ndt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}},$$

$$f_{xy}^1(x) = \int_a^b \frac{Tdt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}} + \int_{L_2} \frac{f_* p_y(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}.$$

Решение интегральных уравнений (27) и (28), как и в нулевом приближении, получаем путем решения соответствующей задачи Римана. Решая интегральное уравнение (27) с учетом ограниченности контактных напряжений на концах площадок контакта, получим формулу для подсчета нормальных контактных напряжений $p_y^{(1)}(x)$:

$$p_y^{(1)}(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} X^+(x) \int_{L_1+L_2} \frac{f_y^1(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (29)$$

где $X^+(x) = \sqrt{(x-a)(\lambda_1^1-x)(x-\lambda_2^1)(b-x)}$.

Для определения параметров λ_1^1 и λ_2^1 имеем следующие уравнения

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_y^1(t)dt}{X_1^+(t)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (30)$$

Аналогично, решая интегральное уравнение (28) найдем формулу для подсчета касательных напряжений на участке сцепления берегов трещины

$$p_{xy}^1(x) = \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi^2} X_1^+(x) \int_{L_1} \frac{f_{xy}^1(\tau)d\tau}{X_1^+(\tau)(\tau-x)}, \quad (31)$$

где $X_1^+(x) = \sqrt{(x-a)(c_1^1-x)(x-d^1)(b-x)}$.

Из условий разрешимости интегрального уравнения (28) имеем

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}^1(t)dt}{X_1^+(t)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (32)$$

Окончательно для контактных напряжений имеем:

$$p_y = p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)}, \quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)}.$$

Анализ частичного закрытия искривленной трещины в полосе (балке) с помощью наведенного температурного поля сводится к параметрическому исследованию

дованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в полосе, геометрических параметров трещины, а также механических постоянных материала. Непосредственно из решения сингулярных интегральных уравнений и дополнительных условий определяются нормальные и касательные напряжения в контактной области, а также размеры зон контакта берегов трещины. Система двух последних уравнений (15) и (25) в нулевом приближении и (30), (32) в первом приближении решаются численно методом итераций. Необходимые интегралы, содержащие функции $X^+(t)$ и $X_1^+(t)$, вычислялись приемом, предложенным Н.И. Мухелишвили [11, §110]. Напомним ограничения на использование полученных результатов: а) диапазон температур должен быть таким, чтобы упругие свойства не зависели от температуры; б) нагретая область S должна быть мала по сравнению с шириной полосы (балки).

На рис. 2 и 3 приведены графики распределения нормального и касательного напряжения вдоль нижней контактной зоны для различных длин трещины. Здесь $\sigma_0 = M/W$, где W – момент сопротивления сечения полосы (балки). При расчетах были использованы безразмерные координаты x' : $2x = \lambda_2 + b + (b - \lambda_2)x'$ при следующих значениях свободных параметров $\nu = 0,3$; $t_* = 4at/L_0^2 = 10$; $R/L_0 = 0,5$; $b_0/L_0 = 0,2$; $(b - a)/c = 0,05$ (кривая 1); $(b - a)/c = 0,02$ (кривая 2). Здесь L_0 и b_0 координаты центра области S . В расчетах функция $f(x)$, описывающая неровности поверхности трещины, принималась стационарной случайной функцией с нулевым средним значением $\langle f(x) \rangle = 0$ и известной дисперсией $D[f(x)]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \frac{\pi n}{b-a} x + B_n \sin \frac{\pi n}{b-a} x), \quad a \leq x \leq b,$$

где A_n, B_n – некоррелированные случайные величины, удовлетворяющие условиям $\langle A_n \rangle = \langle B_n \rangle = 0$, $D(A_n) = D(B_n) = D_n$.

Следует отметить, что учет возмущенного температурного поля усиливает тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что созданное в течение некоторого ограниченного времени с целью торможения и частичного закрытия трещины локальное температурное поле является барьером [1] на пути распространения трещины. Последующее снятие температурного поля ($t \rightarrow \infty$) постепенно снижает значения сжимающих напряжений и эффект частичного закрытия трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений, достигнув нулевого значения при закрытии трещины, постепенно возрастут до величины, обусловленной механической нагрузкой. Под действием локального температурного поля одновременно с уменьшением максимального растягивающего напряжения в полосе (балке) происходит его разворачивание по направлению теплового источника, приводящее [1, 14] к наблюдаемому в опыте смещению плоскости разрыва материала полосы. Это обстоятельство после снятия локального температурного поля способствует увеличению внешней нагрузки необходимой для развития трещины.

Заключение. Предложена эффективная схема расчета частично закрытой при воздействии теплового источника искривленной трещины в полосе (балке) под действием внешних изгибающих нагрузок.

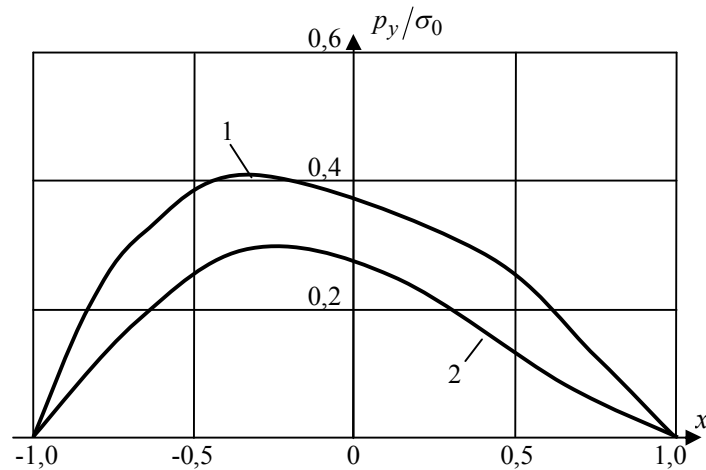


Рис. 2. Распределение нормального контактного напряжения вдоль нижней контактной зоны для различных длин трещины.

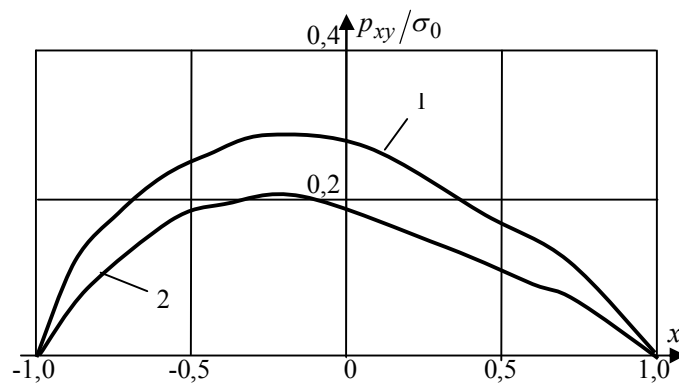


Рис. 3. Распределение касательного контактного напряжения вдоль нижней контактной зоны для различных длин трещины.

Анализ частичного закрытия искривленной трещины в полосе (балке) с помощью наведенного температурного поля сводится к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в полосе, геометрических параметров поверхности трещины и механических постоянных материала.

Л и т е р а т у р а

1. Финкель В.М. Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977. 360 с.
2. Беленький В.Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля // Проблемы прочности. 1984. №6. С. 35–38.
3. Кадиев Р.И., Мирсалимов В.М. Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. 2001. №4. С. 69–73.
4. Кадиев Р.И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
5. Kovtunen V.A. Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. angew Math. Mech. 2005. Bd. 85. Fasz. 4. S. 242-251.
6. Mirsalimov M.V., Rustamov B.E. Simulation of Partial Closure of a Crack-Like Cavity with Cohesion between the Faces in an Isotropic Medium // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013. №6, P. 1021-1029.

7. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И.И. Гольденבלата. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
8. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. М.: Наука, Т. 2. 1965. 480 с.
9. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. мат. и мех. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
10. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 5. С. 695–709.
11. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
12. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 252 с.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. Морозов Е.М. О расчете на прочность по стадии разрушения // Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях. М.: Атомиздат, 1969, Вып. 3. С. 87–90.

References

1. Finkel VM (1977), *Physical basis of fracture retardation*, Moscow: Metallurgiya, 360 p.
2. Belen'kii VD (1984), Closure of a central crack in a circular disk under the influence of a temperature field, *Strength of Materials*, Vol. 16, Iss. 6, 806-810.
3. Kadiyev RI, Mirsalimov VM (2001), Effect of heat source on the dynamics of crack growth, *Vestnik Dagestanskogo universiteta*, №4, 69-73.
4. Kadiyev RI (2003), The stress intensity factors for a plate weakened crack under the influence of the heat source, *Vestnik Dagestan Science Center*, №14, 15-18.
5. Kovtunen VA (2005), Nonconvex problem for crack with nonpenetration, *Z. angew Math. Mech.*, Bd. 85, Fasz. 4, 242-251.
6. Mirsalimov MV, Rustamov BE (2013), Simulation of Partial Closure of a Crack-Like Cavity with Cohesion between the Faces in an Isotropic Medium, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, №6, 1021-1029.
7. *Strength, stability and vibrations calculations at high temperatures*, Ed. II Goldenblat, Moscow: Mashinostroeniye, 1965, 567 p.
8. Timoshenko SP (1965), *Strength of materials*, Moscow: Nauka, 480 p.
9. Galin LA (1945), Stamp pushing in the presence of friction and cohesion, *Prikladnaya Mekhanika i Matematika*, Vol. 9, Iss. 5, 413–424.
10. Goryacheva IG, Malanchuk NI, Martynyak RM (2012), Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 76, Iss. 5, 621–630.
11. Muskhelishvili NI (1977), *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Amsterdam: Kluwer.
12. Parkus H (1963). *Transient Thermal Stresses*, Fizmatgiz, 252 p.
13. Gakhov, FD (1977), *Boundary Value Problems*, Moscow: Nauka, 640 p.
14. Morozov EM (1969), On calculation of the strength on the stage of destruction, *Deformation and Fracture under Thermal and Mechanical Effects*, Moscow: Atomizdat, Vol. 3, 87-90.

INTERACTION OF CURVED CRACK FACES IN BENDING STRIP (BEAM) UNDER INFLUENCE OF TEMPERATURE FIELD

Mustafayev A.B.

Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Science, Azerbaijan, Baku

Some problems of temperature field influence on the growth inhibition of curved crack in the strip (beam) when the strip is bent in the plane by given load system (constant bending moments, uniformly distributed pressure and other) is consider. The equilibrium problem of curved crack with partially contacting faces under action of external loads, induced temperature field and forces on the contacting crack surfaces is reduced to the problem of linear conjugation of analytic functions. It is assumed that on some part of the contact faces engagement occurs and on other part the slip is possible.

KEY WORDS: bending of strip (beam), curved crack, temperature field, contact engagement zone, slip zone, contact stresses.