Приложения релаксационных задач

РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗОГНУТОМ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОМ БРУСЕ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Е.А. ЛАРИОНОВ, *д-р техн. наук, профессор*.
Московский государственный строительный университет,
129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

В статье изучается задача релаксации напряжений в изогнутом железобетонном брусе. Учитываются структурные повреждения бетона и арматуры.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Структурные повреждения, ползучесть, напряжения.

Рассмотрим одиночно армированный железобетонный брус, изгибаемый моментом $M(t)$ и определим нормальные напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_S(t)$ в его компонентах с учетом структурных повреждений и ползучести. В линейной постановке механическое состояние бетона описывается уравнением (1)

$$\varepsilon_b(t,t_0)=\frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)}+C_b^*(t,t)\sigma_b(t)-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,, \tag{1}$$

где $E_b(t)$ – модуль мгновенных упругих деформаций; $C_b^*(t,\tau)$ – мера простой ползучести бетона в момент t при нагружении в момент τ.

Напряжение в арматуре, расположенной на расстоянии h_a от нейтральной оси Ox ,

$$\sigma_a(t)=\frac{1}{\mu n_0}\left[\frac{M(t)h_a}{J_b}-\sigma_b(t,h_a)\right]. \tag{2}$$

Здесь $\mu = A_a/A_b$; A_a и A_b – площади нормальных сечений арматуры и бетонной части; $n_0 = J/J_b$, где J и J_b – моменты инерции бетонной компоненты и приведенного нормального сечения относительно оси Ox, $\sigma_b(t,\ h_a)$ – нормальное напряжение в бетонном слое, соприкасающемся с арматурой.

Условие совместности деформаций арматуры и бетона на уровне h_a

$$\frac{1}{\mu n_0 E_a(t)}\left[\frac{M(t)h_a}{J_b}-\sigma_b(t,h_a)\right]=$$
$$=\sigma_b(t,h_a)\left[\frac{1}{E_b(t)}+C_b^*(t,t)\right]-\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau,h_a)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (3)$$

порождает уравнение для искомой величины $\sigma_b(t,h_a)$

$$\sigma_b(t,h_a)=\tilde{\sigma}_b(t,h_a)+\lambda(t)\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau,h_a)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,. \qquad (4)$$

В этом уравнении $\tilde{\sigma}_b(t,h_a)=\dfrac{M(t)h_a}{J_b\left[\mu n_0 m(t)+1+E_a(t)C_b^*(t,t)\right]}$

– мгновенное упругопластическое напряжение,

$$\tilde{\lambda}(t)=\frac{\mu n_0 E_a(t)}{J_b\left[\mu n_0 m(t)+1+E_a(t)C_b^*(t,t)\right]},\quad m(t)=E_a(t)/E_0(t)\,,$$

$E_a(t)$ – модуль мгновенных упругих деформаций арматуры.

Линейное интегральное уравнение (4) решается методом простых итераций с нулевым приближением $\sigma_{b0}(t,h_a)=\hat{\sigma}_b(t,h_a)$. В расчетах для старого бетона принимается $E_b(t)=E_b$, $E_a(t)=E_a$, $C_b^*(t,\tau)=C_0^*\left[1-\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$ и $t=0$.

Тогда согласно уравнению (4):

$$\sigma_b(t,h_a)=\tilde{\sigma}_b(t,h_a)-\lambda(t)\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau,h_a)e^{-\gamma(t-\tau)}dt\,, \qquad (5)$$

$$\hat{\sigma}_b(t,h_a)=\frac{M(t)h_a}{J_b\left[\mu n_0 m(t)+1+E_aC_0^*(1-\beta)\right]}, \qquad (6)$$

$$\lambda=\frac{\mu n_0\beta\gamma E_aC_0^*}{J_b\left[\mu n_0 m(t)+1+E_aC_0^*(1-\beta)\right]}. \qquad (7)$$

В этом случае интегральное уравнение (5) умножением на $e^{\gamma t}$ и затем дифференцированием по t с последующим умножением на $e^{\gamma t}$ сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma_b(t,h_a)}{dt}+(\lambda+\gamma)\sigma_b(t,h_a)=\gamma\hat{\sigma}_b(t,h_a)+\frac{d\hat{\sigma}_b(t,h_a)}{dt}\,, \qquad (8)$$

а при постоянном изгибающем моменте M к

$$d\sigma_b(t,h_a)/dt+(\lambda+\gamma)\sigma_b(t,h_a)=\gamma\hat{\sigma}_b(h_a)\,. \qquad (9)$$

Уравнения (8) и (9) при начальном условии $\sigma_b(0,h_a)=\hat{\sigma}_b(0,h_a)$ имеют соответственно решения

$$\sigma_b(t,h_a)=$$
$$=\frac{\gamma\hat{\sigma}_b(t,h_a)+\dot{\hat{\sigma}}(t,h_a)+\left[\lambda\hat{\sigma}_b\left(0,h_a(\lambda+\gamma)-\gamma\hat{\sigma}_b(t,h_a)-\hat{\sigma}_b(t,h_a)\right)e^{-(\lambda+\gamma)t}\right]}{\lambda+\gamma}, \qquad (10)$$

$$\sigma_b(t,h_a)=\frac{\hat{\sigma}_b(0,h_a)}{\lambda+\gamma}\left[\gamma+\lambda e^{-(\lambda+\gamma)t}\right], \qquad (11)$$

где в (10) величина $d\hat{\sigma}_b(t,h_a)/dt$ обозначена $\dot{\hat{\sigma}}_b(t,h_a)$.

Согласно соотношениям (10) и (11) ползучесть бетона влечет релаксацию его напряжений и для достаточно больших t $(t \to \infty)$ оценкой для напряжения $\sigma_b(t, h_a)$ является величина $\dfrac{\gamma\hat{\sigma}_b(t, h_a) + \hat{\sigma}(t, h_a)}{\lambda + \gamma}$, а при $M(t) = M$

$$\sigma_b(\infty, h_a) = \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}\hat{\sigma}_b(0, h_a), \tag{12}$$

$$\sigma_b(\infty, h_a) = \frac{Mh_a}{\mu n_0 \beta E_a C_b^* + \mu n_0 m + 1 + E_a C_{0b}^*(1-\beta)}. \tag{13}$$

В результате длительного перераспределения напряжений $\hat{\sigma}_b(0, h_a)$ с бетона на арматуру ее начальное напряжение

$$\sigma_a(0) = \frac{Mh_a\left[\mu n_0 m + E_a C_{0b}^*(1-\beta)\right]}{\mu J\left[\mu n_0 m + 1 + E_a C_{0b}^*(1-\beta)\right]}, \tag{14}$$

при $t \to \infty$ увеличивается до величины

$$\sigma_a(\infty) = \frac{1}{\mu n_0}\left[\frac{Mh_a}{J_0} - \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}\hat{\sigma}_b(0, h_a)\right], \tag{15}$$

$$\sigma_a(\infty) = \frac{Mh_a\left[\mu n_0 m + \mu n_0 \beta E_a C_{0b}^* + E_a C_{0b}^*(1-\beta)\right]}{\mu J\left[\mu n_0 m + 1 + \mu n_0 \beta E_a C_b^* + E_a C_{0b}^*(1-\beta)\right]}.$$

Возрастающее нормальное усилие $N(\tau)$ $(\tau \in [t_0, t])$ уменьшает способные к силовому сопротивлению площади $A_b(\tau)$ и $A_a(\tau)$ нормальных сечений компонент бруса. Перераспределения усилий $N_b(\tau)$ и $N_a(\tau)$ с $A_b(t_0)$ и $A_a(t_0)$ на $A_b(\tau)$ и $A_a(\tau)$ увеличивает расчетные напряжения $\sigma_b(\tau) = N_b(\tau)/A_b(t_0)$ и $\sigma_a(\tau) = N_a(\tau)/A_a(t_0)$ до структурных (истинных) напряжений $\sigma_{bc}(\tau) = N_b(\tau)/A_b(\tau)$ и $\sigma_{ac}(\tau) = N_a(\tau)/A_a(\tau)$.

При выводе уравнения (1) предполагается отсутствие структурных повреждений – $A_b(\tau) = A_b(t_0)$; $A_a(\tau) = A_a(t_0)$ – влекущее линейную зависимость

$$\varepsilon_b(t, t_0) = \sigma_b(t)/E_b(t, t_0) \tag{16}$$

деформаций от напряжений, где

$$E_b(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_b(t,)} + C_b^*(t, t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma_b(\tau)}{\sigma_b(\tau)} \frac{\partial C_b^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau\right]^{-1} \tag{17}$$

– временный модуль упруго-пластических деформаций. Аналогично для арматуры с мерой простой ползучести $C_a^*(t, \tau)$ имеем

$$\varepsilon_a(t, t_0) = \sigma_a(t)/E_a(t, t_0), \tag{18}$$

$$E_a(t, t_0) = \left[\frac{1}{E_a(t,)} + C_a^*(t, t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\sigma_a(\tau)}{\sigma_a(\tau)} \frac{\partial C_a^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau\right]^{-1}, \tag{19}$$

Структурные повреждения материалов порождают нелинейную зависимость деформаций и напряжений и квазилинейные реологические уравнения [2]

$$\varepsilon_b(t, t_0) = \frac{S_b^0(t, t_0)\sigma_b(t)}{E_b(t, t_0)}, \tag{20}$$

$$\varepsilon_a(t, t_0) = \frac{S_a^0(t, t_0)\sigma_a(t)}{E_a(t, t_0)} \tag{21}$$

Здесь $S_b^0(t, t_0) = A_b(t_0)/A_b(t)$ и $S_a^0(t, t_0) = A_a(t_0)/A_a(t)$ – функции нелинейности напряжений, зависящие от уровней $S_b(t)=\sigma_b(t)/R_b(t)$ и $S_a(t)=\sigma_a(t)/R_a(t)$; $R_b(t)$ и $R_a(t)$ – прочности бетона и арматуры.

В расчетах применяются функции

$$S^0[s(t)]=1+\sum_{i=1}^{n}a_i[s(t)]^i, \tag{22}$$

а для бетона часто используется [3]

$$S_b^0[s(t)]=1+V_b\cdot[s(t)]^4, \tag{23}$$

V_b – эмпирический параметр.

При расчете и нелинейности деформирования компонент согласно (21) и (22) получим следующее условие совместности деформаций на уровне h_a

$$\frac{S_a^0(t,t_0)\sigma_a(t)}{E_a(t,t_0)}=\frac{S_b^0(t,t_0)\sigma_b(t,h_a)}{E_b(t,t_0)}. \tag{24}$$

В силу (21) и (22) имеем линейную зависимость деформаций от структурных напряжений $\sigma_{bc}(t)=S_b^0(t,t_0)\sigma_b(t)$ и $\sigma_{ac}(t,t_0)=S_a^0(t,t_0)\sigma_a(t)$ и из (24) следует

$$\sigma_{ac}(t)/E_a(t,t_0)=\sigma_{bc}(t,h_a)/E_b(t,t_0). \tag{25}$$

Соотношение (25) вместе с (2), (18) и (20) приводит к линейному интегральному уравнению вида (4) с соответствующими функциями $\tilde{\sigma}_{bc}(t,h_a)n\tilde{\lambda}(t)$ решение которого находится итерациями. Для старого бетона при $C_a^*(t,\tau)=C_{0a}^*\left[1-\beta e^{-\gamma_a(t-\tau)}\right]$ интегральное уравнение сводится как в п.2 к линейному дифференциальному уравнению. После определения $\sigma_{bc}(t)$ и $\sigma_{ac}(t)$ напряжения $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ находятся решением уравнений

$$S_b^0\left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)}\right]\sigma_b(t)=\sigma_{bc}(t);\quad S_a^0\left[\frac{\sigma_a(t)}{R_a(t)}\right]\sigma_a(t)=\sigma_{ac}(t). \tag{26}$$

Структурные повреждения бетона наряду с его ползучестью уменьшают $\sigma_b(t)$ и тем самым увеличивают $\sigma_a(t)$. В то же время процесс перераспределения напряжений с бетона на арматуру ослабляется вследствие ее структурных повреждений и ползучести. Пренебрегая последними факторами оценим наибольший прирост напряжений $\sigma_a(t)$ в случае $M(t) = M$ для старого бетона.

При невозрастающем нагружении разрушенная часть A_b не меняется и

$$S_b^0(t,0)=S_b^0\left[\frac{\sigma_b(0)}{R_b(0)}\right]=S_b^0[s(0)],$$

а потому

$$\sigma_b(\infty,h_a)=\frac{\gamma\hat{\sigma}_b(0,h_a)}{(\lambda+\gamma)S_b^0[s(0)]}, \tag{27}$$

$$\sigma_b(\infty)=\frac{1}{\mu n0}\left[\frac{Mh_a}{J_0}-\frac{\gamma\hat{\sigma}_b(0,h_a)}{(\lambda+\gamma)S_b^0[s(0)]}\right]. \tag{28}$$

Из (12) и (28) явствует, что структурные повреждения значительно уменьшают напряжение в бетоне, влекущее согласно (15) и (28) существенное увеличение напряжений в арматуре. Заметим, что для близких к $R(0)$ напряжений $\hat{\sigma}_b(0,h_a)$ имеем $S_b^0[s(0)]\approx 1+V$, а по экспериментальным данным [3] параметр $V\geq 1$.

В [4] предложен другой подход к рассматриваемому вопросу на основе уравнения

$$\varepsilon_b(t,t_0)=\frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)}+\int_{t_0}^{t}\sigma_b(\tau)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau+\int_{t_0}^{\max\sigma}f[\sigma(t)]\cdot F[T(\sigma,t)]d\sigma. \qquad (29)$$

Здесь $f[\sigma(t)]=\xi[\sigma(t)]^u$; ζ – малый параметр; u – параметр нелинейности; $F[T(\sigma,t)]=F_0\left[1-e^{-\varphi T(\sigma,t)}\right]$; $T(\sigma,t)$ – суммарная длительность напряжения σ; F_0 и φ – эмпирические параметры.

Предполагается [4], что структурные повреждения порождают нелинейную зависимость лишь деформаций ползучести от $\sigma_b(t)$.

К уравнению вида (29) приводит дифференциальное равенство

$$d\varepsilon_b(t,\tau)=\left\{\frac{1}{E_b(t)}+\left[1+V_b\cdot\left[\frac{\sigma_b(t)}{R_b(t)}\right]^u\right]\cdot C_b^*(t,\tau)\right\}d\sigma(\tau) \qquad (30)$$

при $C_b^*(t,t)=0$. Следует отметить, что пренебрежение кратковременной ползучестью $C_b^*(t,t)$ приводит к значительным погрешностям в расчетах.

Согласно (30) получим реологическое уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon_b(t,t_0)=\frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)}+C_b^*(t,t)\sigma_b(t)-\\-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial C_b^*(t,\tau)}{\partial\tau}+\frac{V\cdot[\sigma_b(t)]^u}{[R(t)]^u}C_b^*(t,\tau)d\sigma_b(\tau)\end{gathered}, \qquad (31)$$

а с учетом нелинейной зависимости и мгновенных деформаций

$$\varepsilon_b(t,t_0)=\frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)}+\frac{V}{[R(t)]^u}\cdot[\sigma_b(t)]^u\left[\frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)}+\int_{t_0}^{t}C_b^*(t,\tau)d\sigma_b(\tau)\right]. \qquad (32)$$

К представлению $\varepsilon_b(t,t_0)$ суммой деформаций соответственно линейно и нелинейно зависящих от $\sigma_b(t)$ приходим и согласно (20) при

$$S_b^0[s(t)]=1+V_1\cdot[\sigma(t)]^u;\quad V_1=V_b/[R_b(t)]^u.$$

В силу (29) и (32) для старого бетона

$$\sigma_b(t)=\hat{\sigma}_b(t)-\lambda\int_0^1\sigma_b(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}dt-\zeta\lambda_1\int_0^{\max\sigma}[\sigma_b(t)]^u\cdot F[T(\sigma,t)]d\sigma, \qquad (33)$$

$$\begin{gathered}\sigma_b(t)=\hat{\sigma}_b(t)-\lambda\int_0^1\sigma_b(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}dt-V_1\lambda_1[\sigma_b(t)]^u\times\\\times\left\{\frac{\sigma_b(t)}{E_b}+C_{0b}^*\int_0^1 e^{-\gamma(t-\tau)}d\sigma_b(\tau)\right\}\end{gathered}. \qquad (34)$$

Предполагая отсутствие структурных повреждений (то есть, сохраняя в (33) и (34) лишь первые два слагаемых), определяем структурное напряжение $\sigma_{bc}(t)$. Отброшенные слагаемые отвечают той части $\sigma_{bc}^{н}(t)$ напряжения $\sigma_{bc}(t)$, которая порождает нелинейное слагаемое $\varepsilon_{bн}(t,t_0)$ деформации $\varepsilon_b(t,t_0)$.

Согласно (34) при известной величине $\sigma_{bc}(t)$ находим

$$\sigma_{bc}^{н}(t)=V_1\lambda_1[\sigma_{bc}(t)]^u\left\{\frac{\sigma_{bc}(t)}{E_b}+C_{0b}^*\int_0^1 e^{-\gamma(t-\tau)}d\sigma_{bc}(\tau)\right\}. \qquad (35)$$

Таким образом, напряжение $\sigma_b(t)$ находится решением уравнения

$$\sigma_b(t) = \hat{\sigma}_b(t) - \sigma_{bc}^{н}(t) - \lambda \int_0^1 \sigma_b(t) e^{-\gamma(t-\tau)} dt\,, \qquad (36)$$

сводящемуся к линейному дифференциальному уравнению.

В монографии [4] для решения релаксационных задач формально применяется метод малого параметра Пуанкаре введением множителя ζ в последние слагаемые уравнений (29) и (33).

Решение уравнения (34) ищется в виде

$$\sigma_b(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t)\zeta + \sigma_0(t) + \sigma_1(t)\zeta^2 + \ldots \quad . \qquad (37)$$

Из рассмотрений п. 6 явствует, что $\sigma_0(t) = \sigma_{bc}(t)$ и при условии адекватного соответствия последнего слагаемого (29) нелинейной части деформации $\varepsilon_b(t, t_0)$ напряжение $\sigma_b(t)$ находится решением уравнения (36) и тем самым отпадает необходимость поиска приближений кроме нулевого $\sigma_0(t)$.

Заметим, что решением интегрального уравнения при $\lambda(t) = \lambda$ сведением его к дифференциальному уравнению удобнее примененного в [4] способа решения с помощью преобразования Лапласа, который при переменном $\sigma_b(t)$ легко реализуем лишь в случаях, приводящих к простым изображениям функции $\sigma_b(t)$.

Реологическое уравнение (29) вместе с примененными в [4] методами делает нахождение $\sigma_b(t)$ и $\sigma_a(t)$ многодельной задачей.

В то же время в [4] изучены значимые приложения релаксационных задач. Это обстоятельство инициирует поиск их простых решений.

Л и т е р а т у р а

1. *Бондаренко В.М., Бондаренко С.В.* Инженерные методы нелинейной теории железобетона. – М.: Стройиздат, 1982. – 287с.

2. *Бондаренко В.М., Ларионов Е.А.* Принцип наложения деформаций при структурных повреждениях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М., 2011. – № 2. – С. 16-22.

3. Рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1986

4. *Галустов К.З.* Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 248с.

References

1. *Bondarenko VM* (1982). *Engineering Methods of Non-Linear Theory of Reinforced Concrete*. M.: Stroyizdat, 287 p.

2. *Bondarenko VM, Larionov EA* (2011). A principles of superposition of deformations under structural damages. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 2 , p. 16-22.

3. *Rekomendatzii po Uchetu Polzuchesti i Usadki Betona pri paschete Betonnyh i Zhelezobet. Konstruktziy*. Moscow: NIIZhB, 1986.

4. *Galustov KZ* (2006). *Non-linear Theory of Creeping of Concrete and Analysis of Reinforced Concrete Structures*. Moscow: Fizmatlit, 248 p.

STRESS RELAXATION IN CURVED REINFORCED CONCRETE BEAM WITH REGARD TO STRUCTURAL DAMAGE

E.A. Larionov

Moskovskiy Gosudarstvenniy Stroitelniy Universitet, Moscow

A stress relaxation of the curved reinforced concrete beam problem is studied in this article. The concrete and armature structural damages are also taken into account.

KEY WORDS: structural damage, creep, stress.