Расчеты на устойчивость

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ СИСТЕМ

С.П. ИВАНОВ, *д-р техн. наук, профессор,*
А.С. ИВАНОВА, *аспирант,*
Поволжский государственный технологический университет,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, д.3;
E-mail: sp-ivanov@mail.ru, IvanovSP@volgatech.net

В работе представлен метод расчета на динамическую устойчивость пластинчатых систем из физически нелинейных материалов. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости пластинчатых систем. В качестве примера выполнен расчет на устойчивость П-образной оболочки.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая устойчивость, физическая нелинейность, пластинчатые системы.

Тонкостенные пространственные конструкции (в том числе пластинчатые системы) находят широкое применение в строительстве, авиастроении, машиностроении, приборостроении и других областях техники.

Современные конструкции изготавливаются в основном из высокопрочных материалов (железобетона, различных сплавов, композитов). Для большинства таких материалов характерна физическая нелинейность, т.е они имеют нелинейную диаграмму деформирования. Тонкостенные конструкции способны выдерживать различные виды нагрузок (например, статические и динамические). Особую опасность представляют динамические нагрузки. Поэтому задачи расчета тонкостенных пространственных конструкций на устойчивость при действии динамических нагрузок (или на динамическую устойчивость) с учетом физической нелинейности материала являются актуальными для науки и практики. Исследованиям устойчивости тонкостенных конструкций при статических и динамических воздействиях посвящены работы многих авторов [1, 2, 5, 6, 7].

Результаты численного анализа устойчивости цилиндрических оболочек из композиционных материалов при несимметричном статическом нагружении с учетом физической и геометрической нелинейности получены в работе [1]. Нелинейная динамика замкнутых цилиндрических оболочек при действии локальных поперечных динамических нагрузок различных типов исследуется в работе [2]. Рассмотрен вопрос о динамических критических нагрузках для замкнутых цилиндрических оболочек [2]. Метод расчета на динамическую устойчивость стержней из физически нелинейных материалов был ранее представлен авторами данной работы в [3]. Вопросам динамической и статической устойчивости стержней, пластин, конических и цилиндрических оболочек посвящены публикации некоторых иностранных авторов [4 - 7].

В большинстве рассмотренных работ расчеты на устойчивость выполнены без учета физической нелинейности материала. Почти нет опубликованных ранее работ, посвященных исследованиям динамической устойчивости пластинчатых систем типа призматических оболочек с учетом физической нелинейности материала. Таким образом, данное направление мало изучено и является перспективным.

Диаграмма деформирования физически нелинейных материалов хорошо аппроксимируется кубическим полиномом:

$$\sigma_i = E \cdot e_i - E_1 \cdot e_i^3, \tag{1}$$

где σ_i – интенсивность напряжений, e_i – интенсивность деформаций, E – начальный модуль упругости материала, а E_1 – постоянная, учитывающая степень физической нелинейности материала [8].

Рассмотрим пластинчатые системы типа призматических оболочек при действии сжимающей динамической нагрузки $P(t)$ (рис. 1).

Перемещения точки M оболочки в направлении оси x обозначим u, в направлении оси y – v, оси z – w.

При решении задачи будем учитывать гипотезы Кирхгофа-Лява ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$), гипотезу о нелинейно-упругом теле.

Запишем соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_x = e_x - z\chi_x; \qquad \varepsilon_y = e_y - z\chi_y; \qquad \varepsilon_{xy} = e_{xy} - 2z\chi_{xy}, \tag{2}$$

где $e_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $e_y = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}$; $e_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$; $\chi_x = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $\chi_y = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$; $\chi_{xy} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Составим выражение интенсивности деформаций e_i и объемной деформации θ с учетом гипотез Кирхгофа-Лява ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{yz} = 0$):

$$\begin{gathered} e_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{xy}^2}, \\ \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \end{gathered} \tag{3}$$

где ν - коэффициент Пуассона материала оболочки.

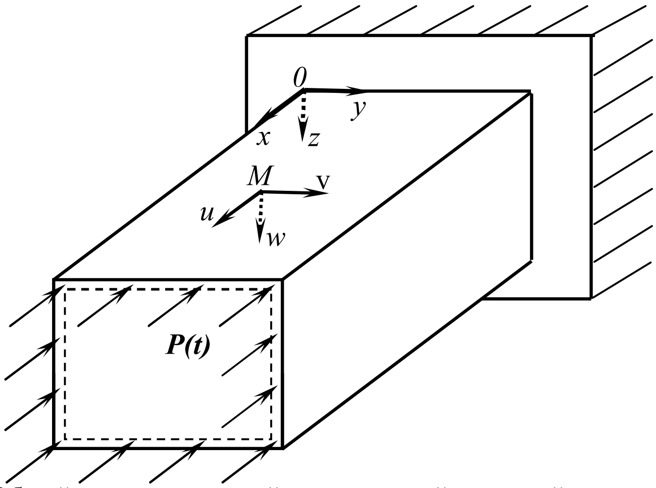

Рис. 1. Общий вид пластинчатой системы с действующей нагрузкой $P(t)$

Тогда деформацию ε_z определим по формуле:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \tag{4}$$

Для решения задачи используем энергетический метод. Составим выражение для полной энергии L системы:

$$L = \Pi - \mathrm{T}, \tag{5}$$

где Π – потенциальная энергия, T – кинетическая энергия.

Выражение для определения потенциальной энергии системы имеет вид:

$$\Pi = \iint\left[A - \frac{1}{2}P(t)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + q_y \cdot w\right]dydx, \tag{6}$$

где q_y – нагрузка, которая действует в направлении оси y и учитывает начальное несовершенство системы, A – работа внутренних сил, отнесенная к единице площади поверхности оболочки.

Определим работу внутренних сил A:

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\Phi dz, \tag{7}$$

где δ – толщина составляющих пластин оболочки, Φ – удельная энергия изменения объема и формы. Удельная энергия Φ определяется по формуле [9]:

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{K}\theta^2 + \frac{2}{3}(1+\nu)\int_0^{e_i}\sigma_i \cdot de_i, \tag{8}$$

где $\mathrm{K} = E/[3(1-2\nu)]$ – модуль объемного сжатия, ν - коэффициент Пуассона материала оболочки.

Выражение для определения кинетической энергии системы имеет вид:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\iint\frac{\rho\delta}{g}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dydx, \tag{9}$$

где ρ – объемный вес материала, g – ускорение свободного падения.

Перемещения u, v, w представим в виде разложений по В.З. Власову [10]:

$$u(x,y,t)=\sum_i U_i(t)\varphi_i(x,y); \qquad \text{v}(x,y,t)=\sum_{\text{k}} V_{\text{k}}(t)\psi_{\text{k}}(x,y);$$
$$w(x,y,t)=\sum_{\text{d}} W_{\text{d}}(t)f_{\text{d}}(x,y); \qquad (i=1,2,3,...,m; \quad k,d=1,2,3,...,n), \tag{10}$$

где $U_i(t)$, $V_k(t)$, $W_d(t)$ являются искомыми функциями и обобщенными перемещениями в направлении осей x, y и z, а $\varphi_i(x,y)$, $\psi_k(x,y)$, $f_d(x,y)$ – координатные функции, которые выбираются по виду деформированного состояния системы.

Из условий совместности деформаций в узловых точках контура системы можно принять, что при $d = k$,

$$W_d(t) = V_k(t). \tag{11}$$

Учитывая соотношение (10), определим минимум функционала (5), используя уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial U_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial U_{i,t}}=0; \qquad \frac{\partial L}{\partial V_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial V_{k,t}}=0. \tag{12}$$

Раскрывая (12), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\sum\limits_i(\gamma_1 a_{ji}-b_{ji})U_i-\sum\limits_k c_{jk}V_k-\dfrac{\rho}{gG}\sum\limits_i a_{ji}U_{i,tt}=\Phi_j;\\ \sum\limits_k\left[-\gamma_1 e_{hk}+r_{hk}+\dfrac{P(t)}{a^*G}e^*_{hk}-\gamma_1 n_{hk}\right]V_k+\sum\limits_i c_{hi}U_i-\dfrac{\rho}{gG}\sum\limits_k d_{hk}V_{k,tt}+Q_k=\Phi_h;\\ (i,j=1,2,3,...,m; \quad k,h=1,2,3,...,n),\end{cases} \tag{13}$$

где $\gamma_1=\gamma/(1-\nu^2)$, $\gamma=E/G$ – отношение модуля упругости E к модулю сдвига G, значение которого определяется по формуле $G=E/[2(1+\nu)]$. Величина a^* – длина контура поперечного сечения оболочки, на который действует динамическая нагрузка $P(t)$. Нагрузка Q_k позволяет учитывать начальное несовершенство оболочки. Коэффициенты уравнений (13) имеют следующий вид:

$$a_{\text{ji}}=\int_x\int_y \varphi_{\text{j,x}}\varphi_{i,\text{x}}\,\delta\; dy\,dx; \qquad b_{ji}=\int_x\int_y \varphi_{\text{j,y}}\varphi_{i,\text{y}}\,\delta\; dy\,dx;$$

$$c_{\text{jk}}=\int_x\int_y \varphi_{\text{j,y}}\psi_{\text{k,x}}\,\delta\; dy\,dx; \qquad c_{hi}=\int_x\int_y \psi_{h,x}\,\varphi_{i,\text{y}}\,\delta\, dy\,dx;$$

$$e_{\text{hk}}=\int_x\int_y Jf_{\text{h,xx}}\,f_{\text{k,xx}}\;dy\,dx; \qquad r_{\text{hk}}=\int_x\int_y \psi_{\text{h,x}}\psi_{\text{k,x}}\,\delta\,dy\,dx;$$

$$d_{\text{hk}}=\int_x\int_y (Jf_{\text{k}}f_{\text{h}}+\psi_{\text{k}}\psi_{\text{h}}\,\delta)\,dy\,dx; \qquad e^*_{\text{hk}}=\int_x\int_y f_{\text{h,xx}}\,f_{\text{k,xx}}\;dy\,dx;$$
$$n_{\text{hk}}=\int_x\int_y Jf_{\text{h},yy}\,f_{\text{k,yy}}\;dy\,dx; \qquad J=\delta^3/12. \tag{14}$$

В выражениях (14): $\varphi_{i,x}=\partial\varphi_i/\partial x$, $\varphi_{j,y}=\partial\varphi_j/\partial y$, $f_{h,xx}=\partial^2 f_h/\partial x^2$, … .

Получим систему ($m + n$) дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости призматических оболочек. В системах уравнений (12) и (13) в функциях $U_{i,t}$, $V_{k,t}$, $U_{i,tt}$, $V_{k,tt}$ индексы после запятой указывают на дифференцирование по времени t.

Для оболочек средней длины можно принять коэффициенты $e_{hk} = 0$.

Правая часть уравнений (13) учитывает физическую нелинейность материала и имеет следующий вид:

$$\Phi_j = -\int_x\int_y (N_{1,x}\varphi_j + N_2\varphi_{j,y})\,dy\,dx;$$
$$\Phi_h = \int_x\int_y (N_2\psi_h - N_{3,x}\psi_h + N_{4,xx} f_h + N_5 f_{h,yy} - N_{6,x} f_h)\,dy\,dx, \tag{15}$$

где $N_{i,x} = \partial N_i / \partial x$, $N_{i,xx} = \partial^2 N_i / \partial x^2$, $i = 1,2...,6$.

Функции, находящиеся под интегралами в выражениях (15), имеют вид:

$$N_1 = -\overline{B}_1 b_0(\nu_1 e_x + 0{,}5\nu_2 e_y) - \overline{Д}_2[b_1(\nu_1\chi_x + 0{,}5\chi_y) + b_2(\nu_1 e_x - 0{,}5\nu_2 e_y)];$$
$$N_2 = -\overline{B}_1 b_0(\nu_1 e_y + 0{,}5\nu_2 e_x) - \overline{Д}_2[b_1(\nu_1\chi_y + 0{,}5\chi_x) + b_2(\nu_1 e_y - 0{,}5\nu_2 e_x)];$$
$$N_3 = -0{,}25\overline{B}_1\left(b_0 e_{xy}\right) - 0{,}5\overline{Д}_2(b_1\chi_{xy} + 0{,}5 b_2 e_{xy});$$
$$N_4 = \overline{Д}_2[b_0(\nu_1\chi_x + 0{,}5\nu_2\chi_y) + b_1(\nu_1 e_x + 0{,}5\nu_2 e_y)] + \overline{Д}_1 b_2(\nu_1\chi_x + 0{,}5\nu_2\chi_y);$$
$$N_5 = \overline{Д}_2[b_0(\nu_1\chi_y + 0{,}5\nu_2\chi_x) + b_1(\nu_1 e_y + 0{,}5\nu_2 e_x)] + \overline{Д}_1 b_2(\nu_1\chi_y + 0{,}5\nu_2\chi_x);$$
$$N_6 = \overline{Д}_2(b_0\chi_{xy} + 0{,}5 b_1 e_{xy}) + \overline{Д}_1 b_2\chi_{xy},$$

(16)

где $\overline{B}_1 = 12E_2\,\delta$; $\overline{Д}_1 = 3E_2\,\delta^5/20$; $\overline{Д}_2 = E_2\,\delta^3$; $E_2 = E_1/E(1+\nu)^2$;

$$b_0 = \nu_1(e_x^2 + e_y^2) + \nu_2 e_x e_y + \frac{1}{4}e_{xy}^2;$$
$$b_1 = 2\nu_1(e_x\chi_x + e_y\chi_y) + \nu_2(e_x\chi_y + e_y\chi_x) + e_{xy}\chi_{xy};$$
$$b_2 = \nu_1(\chi_x^2 + \chi_y^2) + \nu_2\chi_x\chi_y + \chi_{xy}^2,$$
$$\nu_1 = \frac{1}{3}\left[\frac{\nu}{(1+\nu)^2} + 1\right]; \qquad \nu_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1\right].$$

Пример расчета. Исследуем на динамическую устойчивость П-образную оболочку (рис. 2), которая опирается торцами на диафрагмы.

Геометрические параметры оболочки: толщина пластин оболочки $\delta = 0{,}1a$; длина оболочки $l = 5a$. Коэффициент Пуассона материала оболочки $\nu = 0{,}2$; объемный вес материала $\rho = 20$кН/м^3.

Пусть динамическая нагрузка изменяется по закону:

$$P(t) = s \cdot t \cdot a^* \cdot \delta, \tag{17}$$

где s – величина, характеризующая скорость изменения сжимающего напряжения.

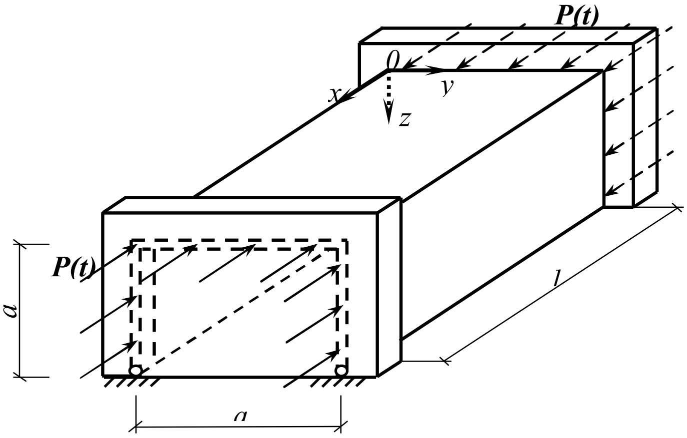

Рис. 2. Общая схема П-образной оболочки с действующими нагрузками

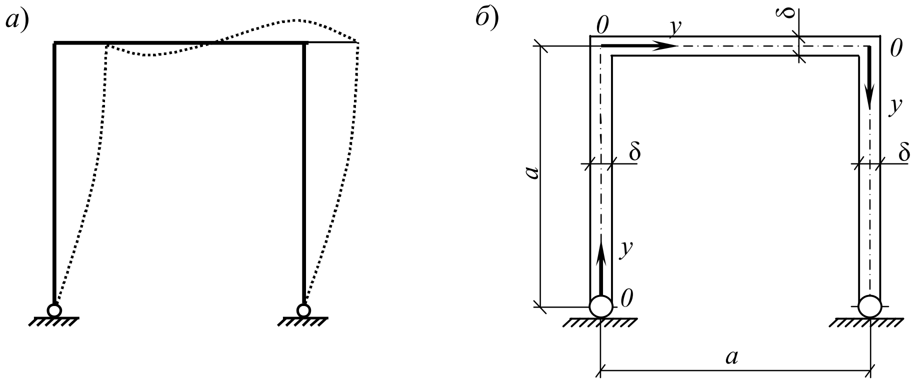

Рис. 3. Кососимметричная форма потери устойчивости П-образной оболочки (*а*), схема обхода контура поперечного сечения оболочки координатой *y* (*б*)

Для данной П-образной оболочки при кососимметричной форме потери устойчивости (рис. 3, *а*) перемещения можно представить в виде:

$$u(x,y,t)=U_1(t)\varphi_1(x,y); \qquad v(x,y,t)=V_1(t)\psi_1(x,y); \qquad w(x,y,t)=W_1(t)f_1(x,y), \qquad (18)$$

где $U_1(t)$, $V_1(t)$, $W_1(t)$ – обобщенные перемещения в направлении осей *x, y* и *z*; $\varphi_1(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $f_1(x,y)$ – координатные функции, которые задаем согласно схеме деформирования (рис. 3, *а*).

Для данной оболочки в случае потери устойчивости по одной полуволне в направлении оси *x* координатные функции можно записать в виде:

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_1(y)\cos\lambda_1 x; \quad \psi_1(x,y)=\psi_1(y)\sin\lambda_1 x; \quad f_1(x,y)=f_1(y)\sin\lambda_1 x, \qquad (19)$$

где $\lambda_1=\pi/l$, l – длина оболочки.

При составлении функций $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$, $f_1(y)$ обходим контур поперечного сечения оболочки по часовой стрелке, начиная с левой опоры (рис. 3, *б*). Эпюры координатных функций представлены на рис. 4. Тогда дифференциальные уравнения динамической устойчивости (13) для данной призматической оболочки принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(\gamma_1 a_{11}-b_{11})\,U_1-c_{11}V_1-\frac{\rho}{g\,G}a_{11}U_{1,tt}=\Phi_1;\\
&(r_{11}+\frac{P(t)}{a^{*}G}e^{*}_{11}-\gamma_1 n_{11})V_1+c_{11}\,U_1-\frac{\rho}{g\,G}d_{11}\,V_{1,tt}+Q_1=\Phi_2.
\end{aligned} \qquad (20)$$

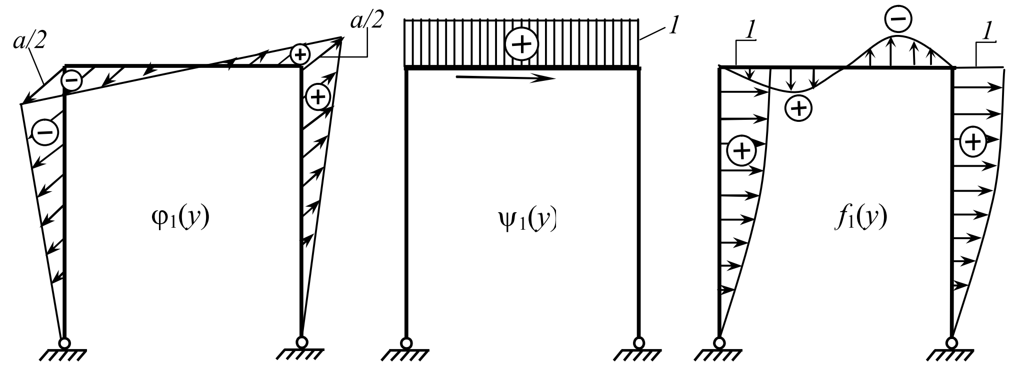

Рис. 4. Схема эпюр координатных функций

Если пренебречь продольными колебаниями, можно принять $U_{1,\text{tt}} \approx 0$.

Тогда система уравнений (20) сводится к дифференциальному уравнению:

$$\left[r_{11} + \frac{P(t)}{a^* G} e_{11}^* - \gamma_1 n_{11} + \frac{c_{11}{}^2}{\gamma_1 a_{11} - b_{11}}\right] V_1 - \frac{\rho}{\text{g}\, G} d_{11} V_{1,\text{tt}} + Q_1 = \Phi_{нел.}. \qquad (21)$$

Правая часть в уравнении (21) определяется по формулам (15). Найдем коэффициенты уравнения (21):

$$a_{11} = \int_y \int_x \varphi_{1,\text{x}}^2 \delta \, dxdy = 0{,}025a^3; \qquad b_{11} = \int_y \int_x \varphi_{1,\text{y}}^2 \delta \, dx\, dy = 0{,}15a^2;$$

$$c_{11} = \int_y \int_x \psi_{1,\text{x}} \varphi_{1,\text{y}} \delta \, dxdy = 0{,}1a^2; \qquad r_{11} = \int_y \int_x \psi_{1,\text{x}}^2 \delta \, dx\, dy = 0{,}1a^2; \qquad (22)$$

$$n_{11} = \int_y \int_x (J f_{1,yy}^2)\, dxdy = 0{,}33 \cdot 10^{-3}; \qquad e_{11}^* = \int_y \int_x J f_{1,xx}^2 \, dxdy = 0{,}429 / a^2;$$

$$d_{11} = \int_y \int_x \left(J f_1^2 + \psi_1{}^2 \delta\right) dxdy = 0{,}25a^3.$$

Введем следующие обозначения:

$$P_{кр} = 0{,}00713Ea^2; t* = \frac{P(t)}{P_{кр}}; \ \zeta = \frac{V_1}{\delta}; \ S^* = 23{,}81 \frac{s^2 \left(a^*\right)^2 \delta^2 \cdot l \cdot \rho}{g \cdot G}, \qquad (23)$$

где $P_{кр.}$ – величина статической критической нагрузки; $t*$ – безразмерный параметр времени; ζ – безразмерная величина прогиба пластин оболочки; S* – параметр скорости изменения напряжения.

Используя обозначения (23) в уравнении (21), получим окончательно дифференциальное уравнение для исследования динамической устойчивости П-образной оболочки:

$$(1 + 0{,}656t^*) \cdot \zeta - S^* \frac{d^2 \zeta}{dt^{*2}} + Q = \Phi_{нел.}. \qquad (24)$$

В уравнении (24) правая часть учитывает физическую нелинейность материала, а нагрузка Q – начальное несовершенство оболочки.

Интегрирование дифференциального уравнения (24) выполнено численным методом Рунге-Кутта на ПЭВМ.

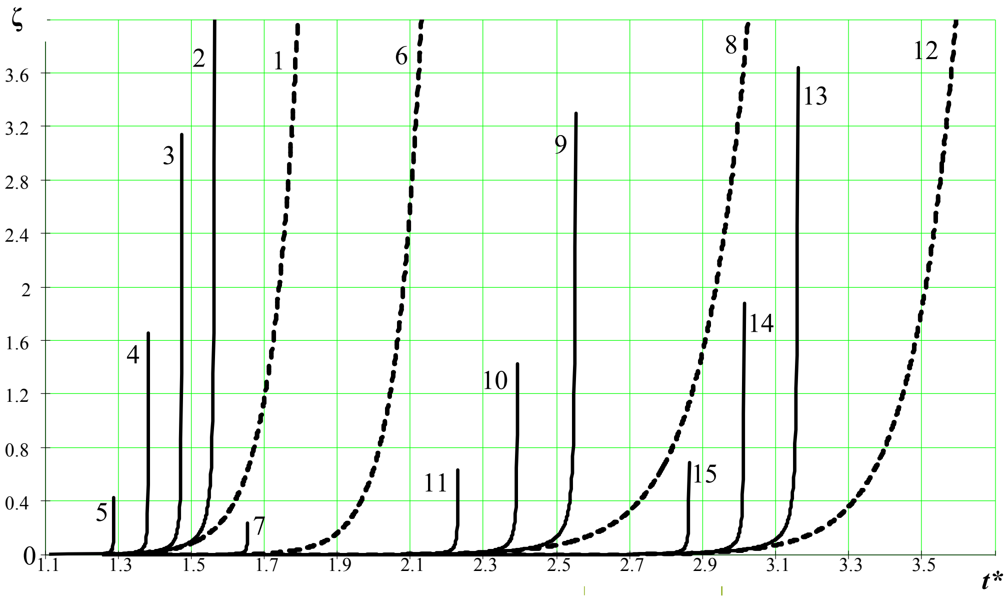

Рис. 5. Графики зависимости прогиба ζ от параметра времени t^*.

Таблица 1

Номер графика	Степень физической нелинейности E_1/E	Нагрузка Q	Скорость изменения напряжения s, в МПа/сек^2	Динамический коэффициент $K_д$
1	0	10^{-6}	10^5	≈ 1,70
2	10^3	10^{-6}	10^5	≈ 1,50
3	10^4	10^{-6}	10^5	≈ 1,43
4	10^5	10^{-6}	10^5	≈ 1,35
5	10^6	10^{-6}	10^5	≈ 1,28
6	0	10^{-8}	10^5	≈ 2,0
7	10^6	10^{-8}	10^5	≈ 1,65
8	0	10^{-6}	$2{\cdot}10^5$	≈ 2,80
9	10^3	10^{-6}	$2{\cdot}10^5$	≈ 2,52
10	10^4	10^{-6}	$2{\cdot}10^5$	≈ 2,37
11	10^5	10^{-6}	$2{\cdot}10^5$	≈ 2,22
12	0	10^{-8}	$2{\cdot}10^5$	≈ 3,40
13	10^3	10^{-8}	$2{\cdot}10^5$	≈ 3,13
14	10^4	10^{-8}	$2{\cdot}10^5$	≈ 3,0
15	10^5	10^{-8}	$2{\cdot}10^5$	≈ 2,85

По результатам расчета на динамическую устойчивость П-образной оболочки построены графики зависимости прогиба ζ от параметра времени $t^* = P(t)/P_{кр}$ при различных значениях параметров E_1/E, Q, s (см. рис. 5 и табл. 1).

Введем понятие динамического коэффициента $K_д$, который равен отношению динамической «критической» нагрузки к статической критической нагрузке [11]. Динамическую «критическую» нагрузку определяем, исходя из бурного выпучивания оболочки, т.е. резкого возрастания прогиба ζ. Динамический коэффициент $K_д$ равен такому значению параметра времени t^*, которое соответствует бурному выпучивания оболочки. Например, из графика 3 (рис. 5) видно, что резкое возрастание прогиба ζ оболочки наблюдается, когда параметр времени $t^* = P(t)/P_{кр} \approx 1{,}43$. Динамический коэффициент $К_д = t^* \approx 1{,}43$. Графики 1, 6, 8, 12 построены без учета физической нелинейности материала оболочки ($E_1 = 0$), остальные графики – с учетом степени физической нелинейности E_1/E (рис. 5 и табл. 1). Рассмотрим графики 1 и 2 - 5 (рис. 5 и табл. 1). При учете физической нелинейности материала кривая зависимости прогиба от параметра времени $\zeta(t^*)$ смещается влево, динамический коэффициент $K_д$ уменьшается. Таким образом, если материал физически нелинейный, то бурное выпучивание оболочки наступает раньше, по сравнению с оболочкой, имеющей линейную диаграмму деформирования ($E_1 = 0$).

Из графиков 2 - 5 видно, что с увеличением степени физической нелинейности E_1/E динамический коэффициент $K_д$ уменьшается (рис. 5 и табл. 1) (при $E_1/E = 10^3$: $K_д \approx 1{,}5$ (график 2), при $E_1/E = 10^6$: $K_д \approx 1{,}28$ (график 5)). Таким образом, чем больше степень физической нелинейности материала оболочки, тем меньше динамическая «критическая» нагрузка, т.е. при меньшем значении динамической нагрузки $P(t)$ происходит бурное выпучивание оболочки.

С увеличением скорости изменения напряжения s динамический коэффициент $K_д$ возрастает. Если s увеличивается в 2 раза, то динамический коэффициент $K_д$ возрастает $\approx 1{,}7$ раза (графики 2 и 9, 3 и 10, 4 и 11, 6 и 12).

На динамический коэффициент $K_д$ влияет величина нагрузки Q, которая учитывает начальное несовершенство оболочки. С уменьшением Q динамический коэффициент $K_д$ возрастает (графики 1 и 6, 5 и 7, 9 и 13, 10 и 14, 11 и 15).

Выводы: Разработан метод расчета на динамическую устойчивость пластинчатых систем из физически нелинейных материалов. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений для исследования динамической устойчивости пластинчатых систем типа призматических оболочек. В качестве примера выполнен расчет на динамическую устойчивость П-образной оболочки. Рассмотрено влияние таких параметров, как степень физической нелинейности материала оболочки, скорость изменения сжимающего напряжения, начальное несовершенство оболочки, на критерии динамической устойчивости оболочки.

Л и т е р а т у р а

1. *Трушин, С.И.* Устойчивость нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек из композиционного материала при действии неравномерных нагрузок / *С.И. Трушин, Е.В. Сысоева, Т.А. Журавлева* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. - №2. – С. 3-10.

2. *Крысько, В.А.* Нелинейная динамика замкнутых цилиндрических оболочек при действии локальных поперечных нагрузок / *В.А. Крысько, К.Ф. Шагивалеев* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. - №4.- С. 3-11.

3. *Иванов, С.П.* Колебания и устойчивость стержней из физически нелинейных материалов / *С.П. Иванов, А.С. Иванова* // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. - №3. – С. 3-6.

4. *Fujita K., Gotou A.* Dynamic stability of an elastic beam subjected to follower forces // ASME 2012. Pressure Vessels and Piping Conference, PVP 2012, Volume 8, 2012, P. 241-249.

5. *Shafei E., Kabir M. Z.* Dynamic stability optimization of laminated composite plates under combined boundary loading // Appl. Compos. Mater, 2011, 18, № 6, p. 539-557.

6. *Deniz A., Sofiyev A. H.* The nonlinear dynamic buckling response of functionally graded truncated conical shells // Journal of Sound and Vibration, 2013, № 4, p. 978-992.

7. *Wu J., Cheng Q.H., Liu B., Zhang Y.W., Lu W.B., Hwang K.C.* Study on the axial compression buckling behaviors of concentric multi-walled cylindrical shells filled with soft materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2012, 60, № 5, p. 803-826.

8. *Иванов, С.П.* Пластинчатые системы, контактирующие с упругой средой: монография / *С.П. Иванов, О.Г. Иванов*. - Йошкар-Ола: МарГТУ, 2008. - 164 с.

9. *Лукаш, П.А*. Основы нелинейной строительной механики / *П.А. Лукаш*. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.

10. *Власов, В.З.* Тонкостенные пространственные системы / *В.З. Власов*. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.

11. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / *А.С. Вольмир*. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

R e f e r e n c e s

1. *Trushin, SI, Sysoeva, EV, Juravleva, TA* (2013). The stability of nonlinear deformable cylindrical composite shells under the action of non-uniform loads. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, №2, p. 3-10.

2. *Krysko, VA, Shagivaleev, KF* (2010). Nonlinear dynamics of closed cylindrical shells under the action of local transverse loads. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, №4, p. 3-11.

3. *Ivanov, SP, Ivanova, AS* (2011). The vibrations and stability of bars with physically nonlinear materials. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, №3, p. 3-6.

4. *Fujita, K, Gotou, A* (2012). Dynamic stability of an elastic beam subjected to follower forces, ASME 2012 Pressure Vessels and Piping Conference, PVP 2012, Volume 8, p. 241-249.

5. *Shafei, E, Kabir, M Z* (2011). Dynamic stability optimization of laminated composite plates under combined boundary loading. Appl. Compos. Mater, 18, № 6, p. 539-557.

6. *Deniz, A, Sofiyev, AH* (2013). The nonlinear dynamic buckling response of functionally graded truncated conical shells. Journal of Sound and Vibration, № 4, p. 978-992.

7. *Wu, J, Cheng, QH, Liu, B, Zhang, YW, Lu, WB, Hwang, KC* (2012). Study on the axial compression buckling behaviors of concentric multi-walled cylindrical shells filled with soft materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 60, № 5, p. 803-826.

8. *Ivanov, SP, Ivanov OG* (2008). Plate systems, contacting with elastic medium. Yoshkar-Ola: MarSTU, 164 p.

9. *Lukash, P A* (1958). Fundamentals of nonlinear structural mechanics. Moscow: Stroizdat, 204 p.

10. *Vlasov, VZ* (1958). Thin-walled space systems. Moscow: Gosstroyizdat, 502 p.

11. *Volmir AS* (1972). Nonlinear dynamics of plates and shells. Moscow: Nauka, 432 p.

THE DYNAMIC STABILITY OF PHYSICALLY NONLINEAR PLATE SYSTEMS

S.P. Ivanov, A.S. Ivanova

Volga State University of Technology, Yoshkar-Ola

In the article, the technique of dynamic stability analysis of plate systems having the nonlinear diagram of material deformation is presented. The example of calculation of a flat-topped shell is given.

KEY WORDS: dynamic stability, physical nonlinearity, plate systems.