

## Геометрические исследования пространственных структур и оболочек

### **ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ГРАФИЧЕСКОМ ДИЗАЙНЕ И ПРОЕКТИРОВАНИИ ВИРАЖЕЙ ГОРОК И САНЫХ ТРАСС**

Н.Е. МИСЮРА, *старший преподаватель,*

Е.А. МИТЮШОВ, *профессор*

*Уральский федеральный университет им. первого Президента России*

*Б.Н. Ельцина, кафедра теоретической механики*

*Предлагаются инвариантные алгоритмы построения нормальных поверхностей и приводятся примеры их применения в графическом дизайне и в моделировании желобов летних, зимних, водных горок и санных трасс. На примере моделирования пространственных роз Гвидо Гранди показано, как использование аналитических гладких направляющих нормальных поверхностей позволяет получить многообразие декоративных форм. Дается метод моделирования безопасных горок путем совместного интегрирования уравнений Френе, уравнений динамики несвободной материальной точки и динамического формообразования нормальных поверхностей.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** математический дизайн, розы Гвидо Гранди, компьютерная геометрия, нормальная поверхность, желоб санной трассы, скелетон, натурбан, бобслей, тюбинг.

#### **Введение**

Компьютерная геометрия и параметрическая архитектура открывают безграничные возможности в геометрическом моделировании и математическом дизайне пространственных строительных конструкций, с изменением традиционных представлений об их проектировании – от стадии архитектурной проработки до инженерных решений. Вместо традиционного использования ограниченного набора геометрических примитивов и их трансформаций в парадигме математического дизайна создается многопараметрическая математическая модель создаваемой конструкции, которая позволяет выполнить ее оптимизацию по эстетическим и техническим характеристикам, и выполнить чертежи ее элементов в любых поддерживающих масштаб графических пакетах. Уникальное собрание многообразных форм и поверхностей, нацеленное на решение различных фундаментальных и прикладных задач в архитектурно-строительной сфере, представлено в энциклопедическом издании С.Н. Кривошапка и В.Н. Иванова [1]. Значительного продвижения в применении аналитических поверхностей к решению практических задач можно достичь на пути перехода к инвариантным (векторно-матричным) их представлениям. При этом возникают широкие возможности их трансформации путем линейных и нелинейных преобразований для решения различных композиционных задач, для привязки к плану пространственных конструкций, и сочленению их элементов. В работе иллюстрируются инвариантные алгоритмы построения некоторых нормальных поверхностей и приводятся примеры их применения в графическом дизайне и моделировании виражей желобов летних, зимних, а так же водных горок и санных трасс.

#### **1. 3-D «розы» Гвидо Гранди**

Методы компьютерной геометрии позволяют создавать не только плоские художественные графические формы с использованием тех или иных математических алгоритмов, но и объемные графические элементы на основе универсальных математических моделей. К таким моделям могут быть отнесены нормальные поверхности с семейством ортогональных координатных линий [1,2].

Одним из путей построения нормальных поверхностей является использование локального базиса цилиндрической системы координат, начало которой перемещается вдоль некоторой гладкой направляющей кривой, полярный угол при этом отсчитывается от главной нормали этой направляющей кривой. Уравнение такой поверхности записывается в следующем виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_n(t) + \rho(t, \varphi) \cos \varphi \vec{n}(t) + \rho(t, \varphi) \sin \varphi \vec{b}(t), \quad (1)$$

где  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(t)$  - уравнение гладкой регулярной направляющей кривой,  $\vec{n}(t), \vec{b}(t)$  - единичные векторы нормали и бинормали этой кривой

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}_n/dt}{|d\vec{r}_n/dt|}, \quad \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}/dt}{|d\vec{\tau}/dt|}, \quad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}. \quad (2)$$

Координатные линии нормальной поверхности (1) ортогональны.

В качестве примера, демонстрирующего применение поверхностей вида (1), рассмотрим математический дизайн «3-D цветов». Стебель цветка при этом моделируется винтовой линией, а винтовая линия для удобства дальнейшей записи задаётся следующим матричным равенством:

$$\hat{r}_n = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ct \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Профиль лепестка определяется кривой Гвидо Гранди в полярных координатах [3]:  $\rho = a \sin k\varphi$ .

Задавая параметр  $k = m/n$  отношением натуральных чисел можно получить замкнутые кривые, при определенных условиях превращающиеся в лепестковые цветы или ажурные розетки (табл.1), которые могут служить элементами декора или орнамента.

Таблица 1. 2- D розы Гвидо Гранди

n\m	1	2	3	4	5	6	7
7							
6							
5							
4							
3							
2							
1							

Получение модели «распускающегося цветка» обеспечивается заданием образующей нормальной поверхности (1) следующим уравнением:

$$\rho = a(e^t - 1) \sin k\varphi. \quad (4)$$

Единичные векторы направляющей кривой определяются по уравнениям (2) и в матричной форме записи определяются равенствами:

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ c \end{pmatrix}, \hat{n} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \begin{pmatrix} c \sin t \\ -c \cos t \\ r \end{pmatrix}. \quad (5)$$

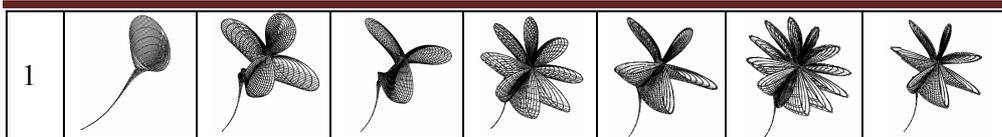
Тогда, после подстановки соотношений (3)–(5) в общее уравнение нормальной поверхности (1), математическая модель распускающихся цветов на розах Гвидо Гранди принимает вид:

$$\hat{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos t - a(e^t - 1) \sin k\varphi \cos \varphi \cos t + \frac{ac(e^t - 1)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \sin k\varphi \sin \varphi \sin t \\ r \sin t - a(e^t - 1) \sin k\varphi \cos \varphi \sin t - \frac{ac(e^t - 1)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \sin k\varphi \sin \varphi \cos t \\ ct + \frac{ar(e^t - 1)}{\sqrt{r^2 + c^2}} \sin k\varphi \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2. 3-D розы Гвидо Гранди

m \ n	1	2	3	4	5	6	7
7							
6							
5							
4							
3							
2							



Построение декоративных нормальных поверхностей возможно и при использовании более сложных кривых, в частности фрактальных [4].

## 2. Математическое моделирование виражей гор и санных трасс

Развитие древней народной забавы – катание с гор, в последние годы активно происходит в двух направлениях. Все более широкое распространение в индустрии развлечений получают летние, зимние и водные горки. Кроме того, развиваются высокотехнологичные виды зимнего спорта – санный спорт, натурбан, скелетон, бобслей, ставшие в разное время олимпийскими. Атракционные развлечения и спортивные соревнования объединяет обязательное присутствие разных по стоимости и оснащению, но близких по используемым физическим законам, технических сооружений.

Движение тела по гладкому желобу осуществляется под действием силы тяжести при минимальном трении. Удовольствие от катания, в одном случае, и спортивный интерес – в другом, обеспечивается наличием криволинейных участков – виражей. На вираже возникают кратковременные регулируемые перегрузки, усложняется процедура управления спортивным снарядом. Моделирование желоба спортивной трассы или аттракциона является нетривиальной задачей. «Продольный профиль желоба является проектной линией и одновременно служит направляющей для формообразования поверхности желоба на основании динамического расчета. Ось желоба в плане и продольном профиле состоит из отдельных прямолинейных участков, пересекающихся под различными углами и сопрягаемых криволинейными элементами. Для определения функциональной возможности трассы необходимо на основании динамики системы рассчитать характерные поперечные сечения виражей. Расчет выполняется последовательно после определения входной скорости в вираж. Желоб трассы – сложная поверхность из чередующихся прямолинейных отсеков, наклонных призматических и криволинейных поверхностей типа каналовых. Желоб трассы выстраивают кинематическим способом, перемещая вдоль направляющей (оси) плоскую образующую (шпангоут) переменной формы, лежащую в вертикальной плоскости. Плоскость шпангоута при своем движении остается ортогональной горизонтальной проекцией от оси трассы. Закон изменения формы и размеров образующей находится в зависимости от изменения кривизны по длине в плане и скорости на данном участке трассы» [5].

Практически идеального формообразования желоба на криволинейном участке трассы можно добиться путем использования в качестве осевой линии, так называемой линии откоса [6]. Линией откоса называется пространственная кривая, у которой отношение кривизны к кручению в каждой точке кривой постоянно. Частным случаем линии откоса является винтовая линия, у которой кручение равно нулю. Свойством линии откоса является постоянство угла между касательной в каждой ее точке и некоторым фиксированным направлением в пространстве.

Осевая линия ищется путем интегрирования уравнения Френе для линии откоса и интегрирования уравнений движения под действием силы тяжести несвободной материальной точки [7] при параболическом законе изменения центростремительной силы, максимальное значение которой определяет величину перегрузки и достигается на половине пути проходимого виража.

Используя найденную траекторию движения в качестве направляющей кривой, поверхность желоба ищется последовательно. Сначала, в виде нормальной поверхности с образующей в виде окружности заданного радиуса (в качестве образующей может быть использована и другая гладкая кривая, записанная в полярных координатах). Далее, поверхность трансформируется так, чтобы центр образующей поверхности желоба окружности находился на линии действия суммарной реакции.

Математическая модель поверхности желоба определяется следующими параметрами: скорость при входе в вираж –  $v_0$ , уклон –  $\gamma$  (угол между касательной к осевой линии и горизонтом), разность уровней точек входа в вираж и выхода из него –  $h$  ( $h = l \sin \gamma$ ,  $l$  – длина виража), радиус образующей (шпангоута) –  $r$ , перегрузка –  $\Pi$ . Поверхность, определяющая форму желоба горки или санной трассы на вираже задается матричным уравнением:

$$\hat{r}'(s, \varphi) = \hat{r}(s, \varphi) + \left( [L(s)]^2 (1 - \cos \psi(s)) + L(s) \sin \psi(s) \right) (\hat{r}(s, \varphi) - \hat{r}_H(s)),$$

$$0 \leq s \leq l, \quad -\varphi^* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

где 
$$\hat{r}(s, \varphi) = \hat{r}_H(s) + \left( r \sin 2\varphi \hat{n}(s) - 2r \sin^2 \varphi \hat{b}(s) \right),$$

$$\hat{r}_H(s) = \begin{pmatrix} -\cos \gamma \int_0^s \sin \left( \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \right) ds \\ \cos \gamma \int_0^s \cos \left( \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \right) ds \\ s \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad L(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_z & \tau_y(s) \\ \tau_z & 0 & -\tau_x(s) \\ -\tau_y(s) & \tau_x(s) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\cos \psi(s) = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{[R_n(s)/mg]^2 + \cos^2 \gamma}}, \quad \sin \psi(s) = \frac{R_n(s)/mg}{\sqrt{[R_n(s)/mg]^2 + \cos^2 \gamma}}$$

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} -\cos \gamma \sin \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ \cos \gamma \cos \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ -\sin \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \sin \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ -\sin \gamma \cos \frac{1}{\cos \gamma} \int_0^s k(s) ds \\ \cos \gamma \end{pmatrix},$$

$$k(s) = \frac{R_n(s)}{mg(v_0^2/g + 2 \sin \gamma s)}, \quad \frac{R_n}{mg} = \frac{4}{l^2} \sqrt{\Pi^2 - \cos^2 \gamma (sl - s^2)}.$$

В табл. 1 приведены поверхности, образующие желоб на вираже при разных начальных скоростях и разных перегрузках при следующих значениях остальных параметров:  $\gamma = \pi/10$ ,  $l = 20\text{м}$ ,  $r = 1.5\text{м}$ ,  $\varphi^* \leq \pi/8$ .

Таблица 1. Влияние начальной скорости и планируемой перегрузки на форму желоба

$v_0$	5 м/с	10 м/с
1,2g		
2g		

Использование инвариантных алгоритмов построения нормальных поверхностей и возможностей компьютерной геометрии позволяет не только создавать трёхмерный образ пространственной конструкции, но получить необходимые цифровые массивы для их изготовления в виде координат точек узловых соединений её линейных, плоских и объёмных элементов, т.е. решать технологические задачи их производства. Высокотехнологичных аттракционы в виде летних, зимних и водных катальных горок, а так же тубинговые трассы расположены, как правило, в ограниченном пространстве. Это требует решения вопроса о повышении их безопасности. Одним из путей решения этой проблемы является создание противоуклонов с криволинейной осью, организация которых может быть также выполнена в рамках предложенной математической модели. Простые геометрические модели форм желоба и уравнений движения объектов на ледяных поверхностях применялись для объяснения выброса саней из ледяных трасс [8]. Предлагаемая в работе модель в большей мере обеспечивает безопасное движение за счет динамического формообразования поверхности.

#### Л и т е р а т у р а

1. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
2. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений –2011. – №4 – С. 6-14
3. Савёлов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. – Изд 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 296с.
4. Geoffrey Irving & Henry Segerman. Developing fractal curves. Journal of Mathematics and the Arts. – Volume 7, Issue 3-4, December 2013, pp. 103-121.
5. Аристова Л.В. Физкультурно-спортивные сооружения /Быкова Г.И. Голубинский А.П. Жура Ю.Г. Климентьев Н.А. Кондратенков А.Н Кузьмичева Е.В. Лось Е.М. Макарова И.И. Машинский В.А. Мезенцева Н.Б. (<http://userdocs.ru/sport/41425/index.html?page=40>, дата обращения 01 февраля 2014 г.)

6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – Изд.5, испр. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 432 с.
7. *Митюшов Е.А., Роцева Т.А.* Об одной задаче механики несвободной материальной точки //Международный сборник научных трудов. Механика, вып. 4, БГУТ, Гомель, 2010. – С. 116-120.
8. *Mont Hubbard.* Luge Track Safety. *arXiv:1212.4901.*

References

1. *Krivoshapko SN, Ivanon VN* (2010). Encyclopedia of Analytic Surfaces, M.: Knizhnyi dom “Librocom”, 560 p.
2. *Ivanov VN.* (2011). Geometry and formation of conventional surfaces with the flat coordinate lines group, *Stroitel'naya Mehanika Inzhenernih Konstrukcii i Sooruzhenii*, №4, 6-14.
3. *Savelov AA.* (2010). *Construction Mechanics Of Engineering Frameworks and Structures: Spravochnoe rukovodstvo*, Pod red. A.P. Norden. Izd. 3-e, M.: Knizhnyi dom «Librocom», 296 p.
4. *Geoffrey Irving & Henry Segerman.* (2013). Developing fractal curves, *Journal of Mathematics and the Arts*, Volume 7, Issue 3-4, 103-121.
5. *Arisotova LV.* (2014). Fisulturno-sportivnie sooruzhenia/ *Bikova GI, Aristova LV, Golubinsky AP, Jura UG, Klimentiev NA, Kondratencov AN, Kuzmicheva EV, Lose EM, Makarova II, Mashinskei VA, Mezenceva NB* (<http://userdocs.ru/sport/41425/index.html?page=40>, data obrasienia 1.02.2014)
6. *Rashevsky PK* (2008). Differential Geometry Course, Izd. 5, M.: Izd-vo LKI, 432 p.
7. *Mityushov EA, Rosheva TA* (2010). On a problem of unfree material point mechanics, International collection of scientific works. *Mehanika*, vip.4, BGUT, Gomel, p.116-120.
8. *Mont Hubbard.* Luge Track Safety. *arXiv: 1212.4901*

**APPLICATION OF CONVENTIONAL SURFACES IN GRAPHIC DESIGN AND ENGINEERING OF SLIDES AND TOBOGGAN TRACKS TURNS**

Misyura N.E., Mityushov E.A.

*The Ural Federal University by the name of the first Russian president B.N. Elzin*

This paper investigates the invariant algorithms for the forming of normal surfaces and examples in their usage in graphic design and in modeling of summer, winter, water slide and sledge track gutters are given. It is shown on the Guido Grandi spatial roses example, how the usage of analytical smooth rails of normal surfaces allows us to obtain the variety of decorative forms. A method for the modeling of safe slides is given by joint integration of Frenet equations, the equations for the dynamics of the unfree material point and the dynamical shaping of normal surfaces is presented.

**KEY WORDS:** Mathematical design, Guido Grandi roses, computer geometry, normal surface, toboggan track gutter, skeleton, naturbahn, bobsleigh, tubing.

