

Численные методы расчета конструкций

РАСЧЕТ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

В.П. АГАПОВ, *докт. техн. наук, профессор*

А.В. ЦЕВА, *студент*

Московский государственный строительный университет, agapovpb@mail.ru

Рассматривается способ вычисления матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента изгибаемой плиты с учетом деформации поперечного сдвига. Элемент образуется из четырех базовых треугольников. Матрица жесткости треугольного элемента получается с использованием гипотезы Тимошенко. Элемент сформирован как многослойный, что дает возможность рассчитывать композитные, в частности, железобетонные, плиты.

Ключевые слова: плита средней толщины, треугольный КЭ, МКЭ, статика.

В практике работы проектных организаций, конструкторских бюро и научно-исследовательских институтов все большую роль играют методы расчета конструкций и сооружений, ориентированные на использование вычислительных машин. Особое место среди этих методов занимает метод конечных элементов. Одной из основных задач, возникающих при расчете этим методом, является формирование матриц жесткости отдельных конечных элементов.

В данной работе рассматривается решение этой задачи при расчете плит средней толщины с учетом деформаций поперечного сдвига. В качестве базового элемента разработан простой треугольный плоский конечный элемент. На базе этого элемента создан более удобный для практического применения четырехугольный элемент произвольной (не обязательно прямоугольной) формы. Элемент образуется из четырех базовых треугольников, образуемых разделением четырехугольника сначала вдоль одной диагонали, а затем вдоль другой. Методика построения такого элемента известна и описана в работе [5]. Поэтому в данной работе основное внимание уделено получению матрицы жесткости базового треугольного элемента с учетом деформаций поперечного сдвига.

Рассмотрим конечный элемент треугольной формы, имеющий 9 узловых степеней свободы (рис.1).

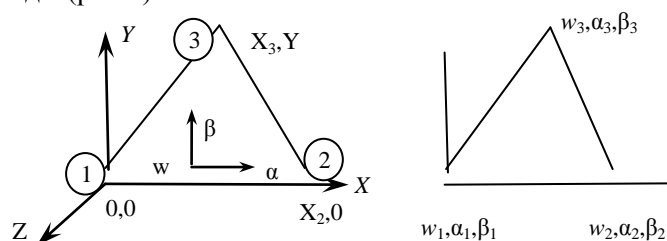


Рис.1. Конечный элемент треугольной формы

Примем для элемента следующую аппроксимирующую функцию прогибов:

$$w = q_1 + q_2x + q_3y + q_4x^2 + q_5xy + q_6y^2 + q_7x^3 + q_8xy^2 + q_9y^3 + \gamma_x x + \gamma_y y, \quad (1)$$

где γ_x и γ_y – углы сдвига в плоскости XY и YZ , соответственно. Углы поворота нормалей определяются в этом случае следующими формулами:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y, \quad \beta = -\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x. \quad (2)$$

В формулах (2) учтено, что углы поворота нормалей к срединной поверхности отличаются от углов наклона касательных к линии прогибов. Это поясняется на рис. 2, а и 2, б.

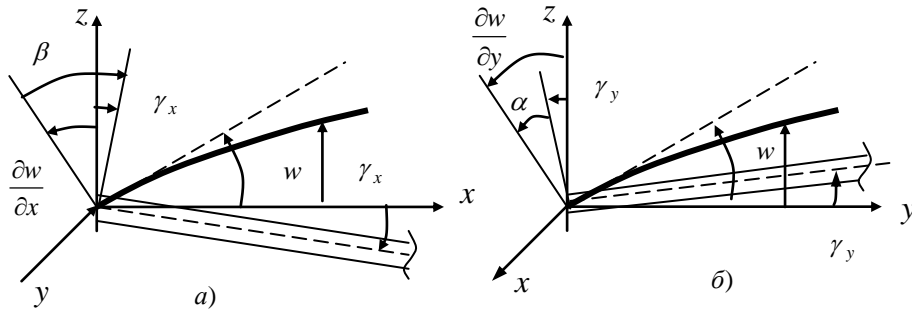


Рис. 2

Введем в рассмотрение вектор узловых перемещений:

$$\underline{\delta} = [w_1 \alpha_1 \beta_1 w_2 \alpha_2 \beta_2 w_3 \alpha_3 \beta_3]^T. \quad (3)$$

Представим вектор δ в виде:

$$\underline{\delta} = \underline{A}_\gamma \underline{\gamma} + \underline{A}_q \underline{q}, \quad (4)$$

где $\underline{\gamma} = [\gamma_x \gamma_y]^T$; $\underline{q} = [q_1 q_2 \dots q_0]^T$. (5)

Вектор $\underline{\gamma}$ в свою очередь представим в виде:

$$\underline{\gamma} = \underline{A}_{\gamma q} \underline{q}, \quad (6)$$

тогда $\underline{\delta} = [\underline{A}_\gamma \underline{A}_{\gamma q} + \underline{A}_q] \underline{q} = \underline{A}_b \underline{q}$, (7)

где $\underline{A}_b = [\underline{A}_\gamma \underline{A}_{\gamma q} + \underline{A}_q]$. Матрица \underline{A}_q выражает зависимость узловых перемещений $\underline{\delta}$ от обобщенных координат \underline{q} и находится обычным путем [2].

Матрицу \underline{A}_γ легко найти из (1)÷(3). Получаем

$$\underline{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_2 & y_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Осталось найти матрицу $\underline{A}_{\gamma q}$. Для этого рассмотрим перемещения, деформации и напряжения и воспользуемся уравнениями равновесия.

Функцию прогибов (1) выразим в матричном виде:

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ xy^2 \ y^3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_9 \end{bmatrix} + [x \ y] \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \underline{\Phi}_b \{q\} + [x \ y] \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Обозначим: $\underline{\Phi}_b = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ xy^2 \ y^3]$ (10)

Деформации произвольного слоя, расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, равны:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Подставляя в (11) значение w из (9) и дифференцируя, приходим к следующему соотношению:

$$\underline{\varepsilon} = \left[-z \underline{B}_b \underline{A}_b^{-1} \right] \underline{\delta}, \quad (12)$$

где матрица \underline{B}_b получена путем дифференцирования Φ_b в соответствии с формулами (11), а также учтено соотношение (7), согласно которому $\{q\} = \underline{A}_b^{-1} \underline{\delta}$.

Напряжения в слоях могут быть найдены из закона Гука, а именно:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[C_{cl} \right] \underline{\varepsilon} = \left\{ -z \underline{C}_{cl} \underline{B}_b \underline{A}_b^{-1} \underline{\delta} \right\} \quad (13)$$

Дополним векторы деформаций и напряжений компонентами, обусловленными поперечным сдвигом, а именно:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в каждом слое найдем из уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Интегрируя по z , получаем:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = - \int \begin{Bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \end{Bmatrix} dz = - \int \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (16)$$

После подстановки в (16) напряжений из (13) находим:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} &= - \int \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[-z \underline{C}_{cl} \underline{B}_b \underline{A}_b^{-1} \underline{\delta} \right] dz = \\ &= \frac{z^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\underline{C}_{cl} \underline{B}_b \underline{A}_b^{-1} \underline{\delta} \right] + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\underline{F} = [F_x F_y]^T$ – постоянные интегрирования. Обозначим:

$$\underline{\Phi}_{\gamma}^{c,l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [C_{c,l}] [B_b], \quad (18)$$

тогда
$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{c,l} \underline{q} + \underline{F} = \frac{z^2}{z} \underline{\Phi}_{\gamma}^{c,l} \underline{A}_b^{-1} \underline{\delta}. \quad (19)$$

Найдем вектор \underline{F} .

Слой 1:
$$\tau_1 = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q} + \underline{F}_1. \quad (20)$$

На верхней поверхности касательные напряжения равны нулю, следовательно, при $z = z_{1e}$ $\underline{\tau}_1 = 0$. Из этого условия получаем:

$$\frac{z_{1e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q} + \underline{F}_1 = 0 \Rightarrow \underline{F}_1 = -\frac{z_{1e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q}. \quad (21)$$

Таким образом,
$$\underline{F}_1 = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{Bmatrix} = -\frac{z_{1e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q}. \quad (22)$$

Деформации поперечного сдвига в слое № 1 могут быть найдены по закону

Гука:
$$\underline{\gamma}_1 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_1 = \underline{G}_1^{-1} \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q} + \underline{F}_1 \right). \quad (23)$$

Слой 2: Напряжения в слое:
$$\underline{\tau}_2 = \frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(2)} \underline{q} + \underline{F}_2. \quad (24)$$

Деформации в слое:
$$\underline{\gamma}_2 = \underline{G}_2^{-1} \underline{\tau}_2 = \underline{G}_2^{-1} \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(2)} \underline{q} + \underline{F}_2 \right). \quad (25)$$

Деформации на границе между 1-м и 2-м слоями должны быть равны. Следовательно, при $z = z_{2,e} = z_{1,n}$

$$\underline{G}_2^{-1} \left(\frac{z_{2e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(2)} \underline{q} + \underline{F}_2 \right) = \underline{G}_1^{-1} \left(\frac{z_{1n}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q} + \underline{F}_1 \right), \quad (26)$$

отсюда
$$\underline{F}_2 = \underline{G}_2 \underline{G}_1^{-1} \left(\frac{z_{2e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} \underline{q} + \underline{F}_1 \right) - \frac{z_{2e}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(2)} \underline{q}. \quad (27)$$

Аналогично для i -го слоя находим:

$$\underline{F}_i = \underline{G}_i \underline{G}_{i-1}^{-1} \left(\frac{z_{ie}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(i-1)} \underline{q} + \underline{F}^{(i-1)} \right) - \frac{z_{ie}^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(i)} \underline{q}, \quad (28)$$

$$\underline{\tau}_i = \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(i)} \underline{q} + \underline{F}_i \right), \quad (29) \quad \underline{\gamma}_i = \underline{G}_i^{-1} \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(i)} \underline{q} + \underline{F}_i \right). \quad (30)$$

Согласно соотношениям (21), (27), (28) вектор \underline{F}_i может быть представлен в виде:

$$\underline{F}_i = \underline{\bar{F}}_i \underline{q} \quad (31)$$

Например, из (22) находим
$$\underline{\bar{F}}_1 = z_{1e}^2 \underline{\Phi}_{\gamma}^{(1)} / 2 \quad (32)$$

и т.д. Тогда средняя величина деформации поперечного сдвига будет равна

$$\underline{\gamma}_{cp} = \frac{1}{h} \int \underline{\gamma}_{c,l} dz = \frac{1}{h} \int \underline{G}_i^{-1} \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_{\gamma}^{(i)} + \underline{\bar{F}}_i \right) \underline{q} dz =$$

$$= \frac{1}{h} \sum \left(\underline{G}_i^{-1} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \frac{z_{ie}^3 - z_{in}^3}{6} + \underline{G}_i^{-1} \underline{F}_i h_{cl} \right) \underline{q}. \quad (33)$$

Отсюда, используя (6) и (32), находим:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\gamma q} &= \frac{1}{h} \sum \left(\underline{G}_i^{-1} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \frac{z_{ie}^3 - z_{in}^3}{6} + \underline{G}_i^{-1} \underline{F}_i h_{cl} \right) = \\ &= \frac{1}{h} \sum \underline{G}_i^{-1} \left(\underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \frac{z_{ie}^3 - z_{in}^3}{6} + \underline{F}_i h_{cl} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Матрица жесткости в обобщенных координатах может быть найдена из соотношения

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}, \quad (35)$$

где Π – потенциальная энергия. Получаем:

$$\begin{aligned} \underline{k}_\gamma^q &= \sum \int_V \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} + \underline{F}_i \right)^T \underline{G}_i^{-1} \left(\frac{z^2}{2} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} + \underline{F}_i \right) dV = \sum \left\{ \frac{z_{ie}^5 - z_{in}^5}{20} \int_F \left[\underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \right]^T \underline{G}_i^{-1} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} + \frac{z_{ie}^3 - z_{in}^3}{6} \times \right. \\ &\times \left. \int_F \left[\left[\underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \right]^T \underline{G}_i^{-1} \underline{F}_i + \underline{F}_i^T \underline{G}_i^{-1} \underline{\Phi}_\gamma^{(i)} \right] dF + h_{cl} \int_F \underline{F}_i^T \underline{G}_i^{-1} \underline{F}_i dF \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, для учета деформации поперечного сдвига при формировании характеристик конечного элемента необходимо проделать следующие дополнительные вычисления:

- 1) В цикле по слоям элемента вычислить $\underline{A}_{\gamma q}$ и \underline{k}_γ^q по формулам (34) и (36).
- 2) По окончании цикла по слоям вычислить $\underline{A}_b = \underline{A}_\gamma \underline{A}_{\gamma q} + \underline{A}_q$ и найти обратную матрицу \underline{A}_b^{-1} .
- 3) Вычислить матрицу жесткости в физических координатах $\underline{k}_\gamma^\delta = \left[\underline{A}_b^{-1} \right]^T \underline{k}_\gamma^q \underline{A}_b$.
- 4) При вычислении напряжений в конечных элементах найти τ_{xz} и τ_{yz} по формуле (29).

Рассмотренный выше треугольный элемент обладает хорошо известными недостатками (см., например, [3]). Но на его основе можно получить усовершенствованные элементы как треугольной [3,4], так и четырехугольной формы [5]. Для получения матрицы жесткости четырехугольного КЭ используем методику работы [5]. Разобьем четырехугольный (не обязательно прямоугольный) конечный элемент на треугольники, как показано на рис. 3.

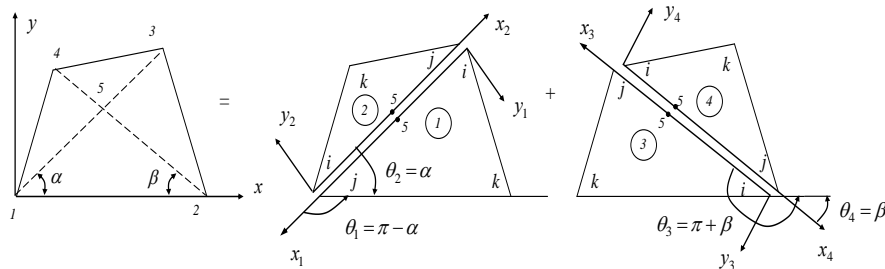


Рис.3

Матрицу жесткости четырехугольного элемента в его местных осях $x-y$ найдем усреднением матриц жесткости треугольников 1 ÷ 4, приведенных к этим осям, по формуле:

$$[K]_{x-y} = \frac{1}{4}([K_1]_{x-y} + [K_2]_{x-y} + [K_3]_{x-y} + [K_4]_{x-y}).$$

Матрицы жесткости треугольников в их местных осях находятся по формуле (36), а переход к местным осям четырехугольника осуществляется стандартным преобразованием:

$$[K_m]_{x-y} = [L_m]^T [K_m]_{x_m-y_m} [L_m], \quad m = 1, 2, 3, 4,$$

где $[K_m]_{x-y}$ – матрица жесткости m -го треугольника в местных осях четырехугольника, $[K_m]_{x_m-y_m}$ – матрица жесткости m -го треугольника в его местных осях, $[L_m]$ – матрица направляющих косинусов местных осей m -го треугольника в местных осях четырехугольника.

Разработанный конечный элемент адаптирован к вычислительному комплексу ПРИНС. Для проверки элемента решен ряд тестовых задач. Например, рассчитывалась бетонная плита, изображенная на рис. 4. Толщина плиты принималась равной 9 см; суммарная статическая нагрузка, приложенная в середине плиты, равна 10кН.

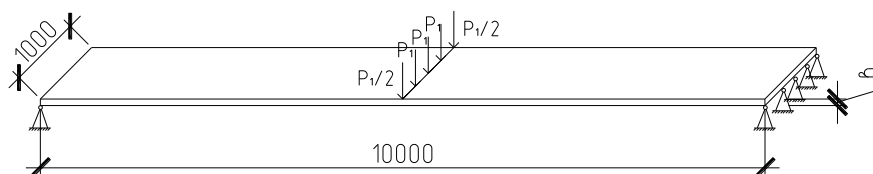


Рис. 4. Исследуемая бетонная плита.

Результаты расчета по программе ПРИНС представлены на рис. 5 ÷ 7, где показаны деформации плиты (рис. 5), а также распределение нормальных (рис. 6) и касательных (рис. 7) напряжений. Эти результаты сравнивались с результатами аналитического расчета, выполненного по балочной теории.

Максимальная величина прогиба, найденная расчетом по программе ПРИНС, составила 0,114 м. Максимальное значение прогиба по балочной теории равно 0,1143. Расхождение составляет 0,26%. Максимальные значения нормальных и касательных напряжений, полученные методом конечных элементов, равны $\sigma_{max} = 18100$ КПа и $\tau_{max} = 93,7$ КПа. Теоретические значения напряжений составляют 18518 КПа и 83,3 КПа, соответственно.

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Разработанный конечный элемент обеспечивает необходимую для практических целей точность расчета.

2. Элемент позволяет определять не только нормальные, но и касательные напряжения с учетом деформаций поперечного сдвига. Это особенно важно при расчете сравнительно толстых бетонных и железобетонных плит с учетом трещинообразования, поскольку в тех зонах, где поперечные силы велики (как правило, вблизи опор) трещины могут возникать не на наружной поверхности, а во внутренних слоях.

3. Разработанный конечный элемент включен в библиотеку конечных элементов вычислительного комплекса ПРИНС и в составе этого комплекса может использоваться в практических расчетах бетонных и железобетонных конструкций.

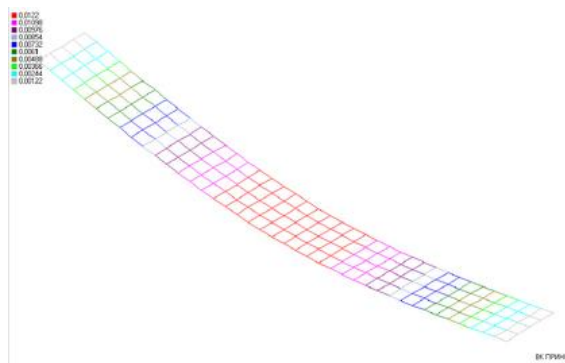


Рис. 5. Деформация конструкции

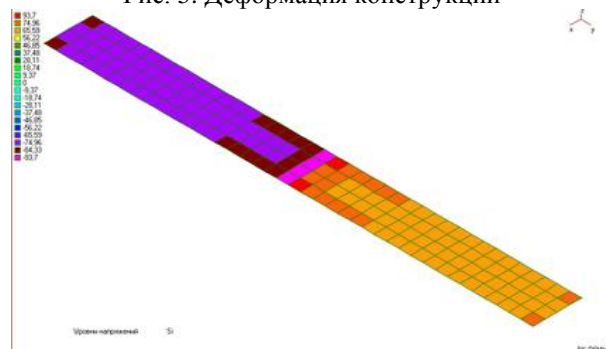


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений

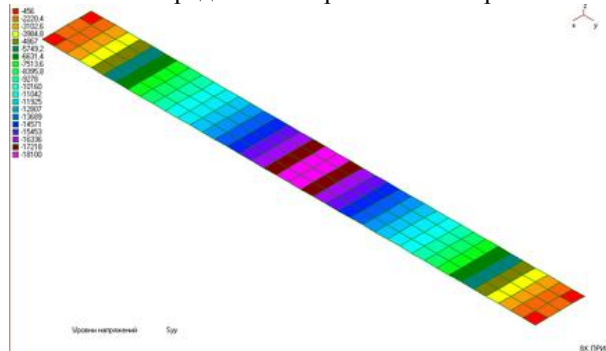


Рис. 7. Распределение касательных напряжений

Л и т е р а т у р а

1. Тимошенко С.Л., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: ГИФМЛ, 1963.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: МИР, 1978.
3. Агапов В.П. Расчет несущих конструкций на прочность с использованием вычислительного комплекса ПРИНС. – М.: Изд-во АСВ, 2007.
4. Clough R.W., Tocher J.L. Finite element stiffness matrix for analysis of plates bending // Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct.Mech. – Ohio, 1965. – P. 515-545.
5. The NASTRAN theoretical manual. R.H.McNeal, editor. – NASA SP-221(01), 1972.

THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLATES WITH THE ACCOUNT OF SHEAR DEFORMATIONS

V.P. Agapov, A.V. Tseva

The multilayered quadrilateral finite element of plate bending with the effect of shear deformations has been developed. The element was included in the element library of program PRINS.

KEY WORDS: thick plates, a triangular finite element, FEM, static loading.