

Прочность летательных аппаратов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЁТОМ «ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ»

Вал.В. ФИРСАНОВ, д-р техн. наук, профессор
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
 высшего профессионального образования «Московский авиационный институт
 (национальный исследовательский университет)» «МАИ»,
 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д.4; k906@mai.ru

Сущность этой модели состоит в построении основного напряжённого состояния, базирующегося на новой гипотезе вертикального элемента, и дополнительного напряжённого состояния краевой плоской деформации, возникающей вблизи жёстко защемлённого края. Это даёт возможность более точно оценить прочность авиационных конструкций вблизи нерегулярностей типа соединений, подкрепляющих элементов (лонжеронов) переменной толщины, крыльев малого удлинения, оперения самолётов и ракет.

Применяется метод асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трёхмерной теории упругости. С помощью специально введённой косоугольной системы координат получены соотношения для двух краевых задач. Решение задачи о краевой плоской деформации осуществляется вариационным методом Власова-Канторовича. На примере расчёта балки постоянной толщины показано, что существенный вклад в общее напряжённое состояние вносят поперечные нормальные и касательные напряжения, которыми в классической теории стержней и оболочек пренебрегают.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: балка переменного сечения, изотропный материал, вариационный метод Власова-Канторовича, напряженно-деформированное состояние, авиационные конструкции, косоугольная система координат, лонжерон, асимптотическое интегрирование.

Пусть балка из изотропного материала, нагруженная поперечной нагрузкой $q(x)$, отнесена к прямоугольной системе координат (x, z) (рис. 1).

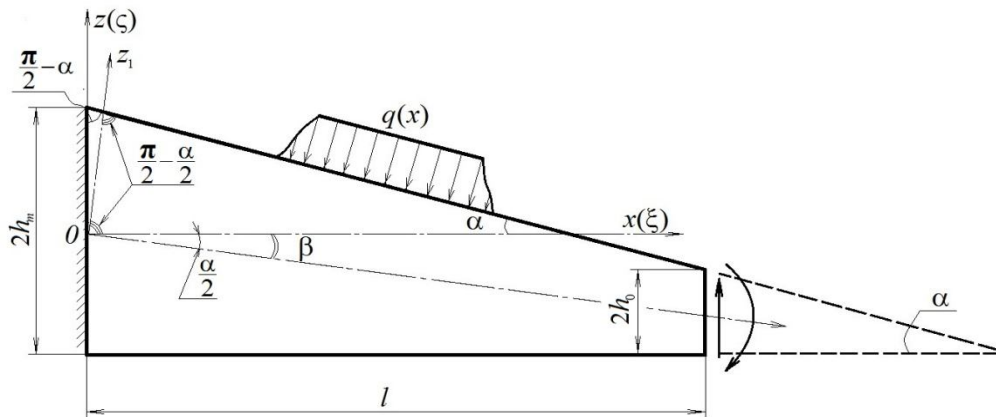


рис. 1

Для определённости положим, что край балки $x=0$ жёстко защемлённый. Другой край балки может быть любым, в том числе и свободным, нагруженным крайвыми усилиями типа изгибающих моментов и перерезывающих сил.

Обозначим через l , b длину и ширину балки соответственно, а через $2h$ - её переменную толщину, определяемую соотношением

$$h = h_m - x \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_m - h_0}{l} . \quad (2)$$

Наряду с системой координат (x, y) будем рассматривать косоугольную систему координат (x_1, z_1) , для которой справедливы равенства,

$$x_1 = \frac{x}{\cos \alpha}, \quad z_1 = z + x \sin \alpha .$$

Проводя аналогию с прямоугольной пластинкой, выполненной из композиционного материала [1], цилиндрической оболочкой переменной толщины [2] и опуская выкладки, сформулируем для данной балки основные результаты, относящиеся к построению её полного напряжённого состояния. Применяя метод прямого асимптотического интегрирования [3] уравнений трехмерной теории упругости в декартовых координатах, приведем результаты построения первых приближений двух итерационных процессов, соответствующих определению основного напряженного состояния и напряженного состояния краевой плоской деформации (типа «пограничный слой») вблизи жёстко закреплённого края балки. Тогда погрешность полного напряженного состояния будет равна

$$h^* = h / l .$$

При написании указанных результатов введены безразмерные независимые переменные по формулам: $x_1 = l \xi$, $z_1 = h \zeta$, а также учитывается, что

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 / 2 \operatorname{tg} \beta$$

Для основного напряженного состояния имеем систему уравнений, интегрируя которую, находим:

$$\begin{aligned} w &= w(\xi), u = \zeta u_1 + u_0(\xi), \\ \sigma_x &= \zeta \sigma_{x1} + \sigma_{x0}, \tau_{xz} = \zeta^2 \tau_{xz2} + \zeta \tau_{xz1} + \tau_{xz0}, \\ \sigma_z &= \zeta^3 \sigma_{z3} + \zeta^2 \sigma_{z2} + \zeta \sigma_{z1} + \sigma_{z0}, \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными числовыми индексами внизу - функции переменной ξ , связанные с функциями u_0, w следующими равенствами:

$$\begin{aligned} u_1 &= -h_* \frac{dw}{d\xi}, \sigma_{x1} = -\frac{E}{l} \left(h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{dw}{d\xi} \right), \sigma_{x0} = \frac{E}{l} \left(\frac{du_0}{d\xi} - \operatorname{tg} \alpha \frac{dw}{d\xi} \right), \\ \tau_{xz2} &= \frac{E h_*}{2l} \left(h_* \frac{d^3 w}{d\xi^3} - 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right), \tau_{xz1} = \frac{E}{l} \left(2 \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{dw}{d\xi} - h_* \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right), \\ \tau_{xz0} &= \frac{E}{l} \left(\frac{1}{2} h_*^2 \frac{d^3 w}{d\xi^3} - 3 \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{dw}{d\xi} + h_* \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right), \\ \sigma_{z3} &= -\frac{E h_*}{6l} \left(h_*^2 \frac{d^4 w}{d\xi^4} - 4 \operatorname{tg} \alpha h_* h_* \frac{d^3 w}{d\xi^3} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right), \\ \sigma_{z2} &= -\frac{E h_*}{2l} \left(3 \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{d^3 w}{d\xi^3} - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{d^2 w}{d\xi^2} - h_* \frac{d^3 u_0}{d\xi^3} + \operatorname{tg} \alpha \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right), \\ \sigma_{z1} &= \frac{E}{l} \left(\frac{1}{2} h_*^3 \frac{d^4 w}{d\xi^4} - 4 \operatorname{tg} \alpha h_*^2 \frac{d^3 w}{d\xi^3} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{dw}{d\xi} + h_*^2 \frac{d^3 u_0}{d\xi^3} \right), \\ \sigma_{z0} &= \frac{E}{l} \left(\frac{1}{3} h_*^3 \frac{d^4 w}{d\xi^4} - \frac{11}{6} \operatorname{tg} \alpha h_*^2 \frac{d^3 w}{d\xi^3} - \frac{5}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{dw}{d\xi} + \frac{1}{2} h_*^2 \frac{d^3 u_0}{d\xi^3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Система дифференциальных уравнений относительно неизвестных перемещений u_0, w записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} h_*^2 \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} - \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{du_0}{d\xi} - \operatorname{tg} \alpha h_*^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \operatorname{tg}^2 \alpha h_* \frac{dw}{d\xi} - \frac{h}{bE} q \operatorname{tg} \alpha = 0, \\ h_*^4 \frac{d^4 w}{d\xi^4} - 10 \operatorname{tg} \alpha h_*^3 \frac{d^3 w}{d\xi^3} + 17 \operatorname{tg}^2 \alpha h_*^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} - 3 \operatorname{tg}^3 \alpha h_* \frac{dw}{d\xi} + \\ + 3 h_*^3 \frac{d^3 u_0}{d\xi^3} - 6 \operatorname{tg} \alpha h_*^2 \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} + \frac{3h}{2bE} q = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что для балок переменной толщины изгиб и растяжение не отделяются друг от друга.

Поскольку частный интеграл системы (5) находится для каждого конкретного случая нагрузки q , определим общий интеграл однородной системы (5), представляющий собой систему уравнений типа Эйлера. Подстановкой

$$h_* = e^t \quad (6)$$

приводим её к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, решая которую, найдем

$$\begin{aligned} u_0^0 = C_5 + C_4 \ln h_* + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h_*^{1/2}} (C_2 \cos \delta + C_3 \sin \delta), \\ w^0 = C_0 + C_1 \ln h_* + \frac{1}{h_*^{1/2}} (C_2 \cos \delta + C_3 \sin \delta) \end{aligned} \quad (7)$$

В этих формулах $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ - произвольные постоянные и

$$\delta = \ln h_* \sqrt{3}/2. \quad (8)$$

Постоянные интегрирования в (7) определяются из условий закрепления балки. В случае жесткого защемления граничные условия имеют вид:

$$u_0 = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0. \quad (9)$$

Для свободного края, нагруженного сосредоточенными силами, они представляются в форме

$$N_x = N, \quad M_x = M, \quad Q_x = Q. \quad (10)$$

При других вариантах закрепления граничные условия на краях балки получаются комбинацией условий (8) и (9). Для нормального и перерезывающего усилий, а также изгибающего момента, фигурирующих в (9), справедливы равенства:

$$\begin{aligned} N_x = 2Eh_* \left(\frac{du_0}{d\xi} - \operatorname{tg} \alpha \frac{dw}{d\xi} \right), \\ M_x = -\frac{2}{3} Eh_* h \left(h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{dw}{d\xi} \right), \\ Q_x = -2Eh_* \left(\frac{1}{3} h_*^2 \frac{d^3 w}{d\xi^3} - \frac{8}{3} \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{dw}{d\xi} + h_* \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Построив внутреннее напряженное состояние балки надо присовокупить к нему напряженное состояние краевой плоской деформации, быстро меняющее-

ся по переменной x_1 . Для этой цели введём независимую переменную ζ , по формуле:

$$x_1 = h\xi_1$$

По аналогии с [1] получим систему дифференциальных уравнений и граничные условия для определения напряжённо-деформированного состояния краевой плоской деформации, быстро затухающих при удалении от края $\xi_1 = 0$. Решение этой краевой задачи приводит к определению функции $\Phi(\xi_1, \zeta)$ из уравнения четвёртого порядка, убывающее до нуля при $\xi_1 \rightarrow +\infty$ вместе с производными до второго порядка включительно, что обеспечивает затухания соответствующего напряженного состояния вглубь балки. Кроме того, на верхней и нижней плоскостях балки функция Φ должна удовлетворять однородным граничным условиям:

$$\Phi = d\Phi/ds = 0, \quad (12)$$

при $\zeta = \pm 1$

$$d^2\Phi/ds^2 = 0 \quad (13)$$

и двум неоднородным граничным условиям на краю $\xi_1 = 0$.

Задача определения функции Φ из вышеуказанных условий сопряжена со значительными математическими трудностями. По этой причине, отказываясь от прямого пути решения задачи, получим разрешающие уравнения для функции Φ и граничные условия на жёстко защемлённом краю $\xi_1 = 0$ энергетическим способом с помощью вариационного метода Власова-Конторовича [1]. При этом на функцию Φ будем налагать требование, чтобы она одновременно удовлетворяла и условиям затухания при $\xi_1 \rightarrow +\infty$ и граничным условиям (12), (13). При построении функции Φ для упрощения выкладок будем рассматривать только жёстко защемлённый край $\xi_1 = 0$, так как обобщение на произвольный случай не представляет труда.

Согласно общему вариационному методу представим функцию Φ в виде конечного ряда:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=n} F_i(\zeta)\Psi_i(\xi_1),$$

где $F_i(\zeta)$ - функции, аппроксимирующее функцию Φ по толщине балки и в соответствии с (12), (13), удовлетворяющие граничным условиям:

$$F_i = F_i' = 0, \quad \zeta = \pm 1, \quad (14) \quad F_i'' = 0, \quad (15)$$

а $\Psi_i(\xi_1)$ - функции, подлежащие определению.

Подставляя функцию Φ в форме (14) в выражение для вариации дополнительной энергии балки, группируя члены должным образом и приравнивая нулю коэффициенты при произвольных и независимых вариациях, получим систему уравнений для определения искомым функции $\Psi_i(\xi_1)$ и необходимое количество естественных граничных условий.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\Psi_i(\xi_1)$ в разложении (14) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_{ik}\Psi_i^{IV} + b_{ik}\Psi_i^{III} + c_{ik}\Psi_i^{II} + d_{ik}\Psi_i^I + e_{ik}\Psi_i) = P_k, \quad (16)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 a_{ik} &= \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta, b_{ik} = 4 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (F_i' F_k + F_i F_k'), \\
 c_{ik} &= -2 \int_{-1}^{+1} [(1 + 2 \sin^2 \alpha) F_i' F_k' - 2 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k + 3 F_i F_k')] d\zeta, \\
 d_{ik} &= -4 \sin^3 \alpha \int_{-1}^{+1} [\text{css}^2 \alpha F_i'' F_k' + \frac{2 + \nu \text{ctg}^2 \alpha}{1 - \nu} F_i' F_k' - \\
 &\quad - 3 F_i' F_k + \left(\frac{\text{ctg}^2 \alpha}{1 - \nu} - 6 \right) F_i F_k] d\zeta, \\
 e_{ik} &= \sin^2 \alpha \int_{-1}^{+1} [\text{css}^2 \alpha F_i'' F_k'' - 2 \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \nu} \right) F_i'' F_k' + \\
 &\quad + 2 \frac{4 \nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \nu}{1 - \nu} F_i' F_k' + 8 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k + 3 F_i F_k')] d\zeta, \\
 P_k(\xi_1) &= \frac{\nu}{1 - \nu^2} \sin^2 2\alpha h_*^2 \int_{-1}^{+1} [\sigma_{x1}(\zeta - 1) + \sigma_{x0}] F_k d\zeta,
 \end{aligned} \tag{17}, (18)$$

В равенстве (18) величина σ_{x1} представляет собой изгибное нормальное напряжение в верхнем продольном волокне балки и σ_{x0} - нормальное напряжение растяжения (сжатия).

Естественные граничные условия для определения произволов интегрирования системы (17) записываются в форме:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{i=n} (f_{ik} \Psi_i'' + g_{ik} \Psi_i'' + h_{ik} \Psi_i') &= Q_k, \\
 \sum_{i=1}^{i=k} (m_{ik} \Psi_i'' + n_{ik} \Psi_i' + p_{ik} \Psi_i' + r_{ik} \Psi_i) &= R_k,
 \end{aligned} \quad \text{при } \xi_1 = 0, (k = 1, 2, \dots, n), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{ik} &= \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta, g_{in} = 2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (F_i' F_k + 2 F_i F_k') d\zeta, \\
 h_{ik} &= - \int_{-1}^{+1} [F_i' F_k' - 4 \sin^2 \alpha (F_i' F_k + F_i F_k')] d\zeta, \\
 Q_k(\xi_1) &= \frac{\nu}{1 - \nu^2} \cos^2 2\alpha h_*^2 \int_{-1}^{+1} (\sigma_{x1} \zeta + \sigma_{x0}) F_k d\zeta, \\
 m_{ik} &= - \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta, n_{ik} = -2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (2 F_i' F_k' + F_i F_k') d\zeta, \\
 p_{ik} &= \int_{-1}^{+1} [(1 + 4 \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \nu}) F_i' F_k' - 4 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k - F_i F_k')] d\zeta, \\
 r_{ik} &= 2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} [F_i'' F_k' + \frac{(5 - 4\nu) \sin^2 \alpha + 2 - \nu}{1 - \nu} F_i' F_k' + \\
 &\quad + 4 \sin^2 \alpha (F_i' F_k + 2 F_i F_k')] d\zeta, \\
 R_k(\xi_1) &= \frac{\nu}{1 - \nu^2} \sin 2\alpha \cos \alpha h_*^2 \int_{-1}^{+1} [\sigma_{x1} (2\zeta - 1) + 2\sigma_{x0}] F_k d\zeta,
 \end{aligned} \tag{20}$$

В качестве примера рассмотрим консольную балку, находящуюся под действием нагрузки $q = const$ (рис. 1), с относительной полутолщиной $h_{0*} = 0,0015$. Частный интеграл системы (0) в этом случае имеет вид

$$u_0^r = \frac{q}{bEtg\alpha} \left(1 - \frac{1}{2tg^2\alpha} \right) h, \quad w^r = -\frac{q}{2bEtg^4\alpha} h. \quad (21)$$

Суммируем интеграл (21) с общим решением (7) однородной системы. После этого, удовлетворяя на краю $\xi = 0$ граничным условиям (9), а на краю $\xi = 1$ однородным условиям, соответствующим (10) и, пренебрегая перемещениями балки, как абсолютно твердого тела, получаем следующие выражения для произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{h_0 \varepsilon^{1/2}}{bEtg^3\alpha} \left[\left(\frac{1}{2} + tg^2\alpha \right) (3 \cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma) - \frac{1}{2} (\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma - \varepsilon^{3/2}) \right] q, \\ C_2 &= \frac{h_0 h_*^{1/2}}{bEtg^4\alpha} \left[\left(\frac{1}{2} + tg^2\alpha \right) (3 \cos \beta_0 + \sqrt{3} \sin \beta) - \cos \beta_0 \right] q, \\ C_3 &= \frac{h_0 h_*^{1/2}}{bEtg^4\alpha} \left[\left(\frac{1}{2} + tg^2\alpha \right) (3 \sin \beta_0 + \sqrt{3} \cos \beta) - \sin \beta_0 \right] q, \end{aligned} \quad (22)$$

$$C_4 = \frac{h_0 \varepsilon^{1/2}}{bEtg^3\alpha} \left\{ \left(\frac{1}{2} + tg^2\alpha \right) (3 \cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma) - \frac{1}{2} \left[\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma + \xi^{3/2} (2tg^2\alpha - \varepsilon) \right] \right\} q,$$

в которых
$$\varepsilon = \frac{h_m}{h_0}, \quad \beta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln h_{0*}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \varepsilon. \quad (23)$$

По формулам (11) можно найти значение изгибающего момента в произвольном сечении, а затем и изгибные напряжения, максимальное значение которых в заделке представляется таким образом:

$$\sigma_{xm}^0 = -\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2b^2tg^2\alpha} \left[\sqrt{3} (1 + 4tg^2\alpha) \sin \gamma + \cos \gamma - \varepsilon^{3/2} \right] q. \quad (24)$$

График изменения напряжений (24) в зависимости от угла α изображен на (рис. 2).

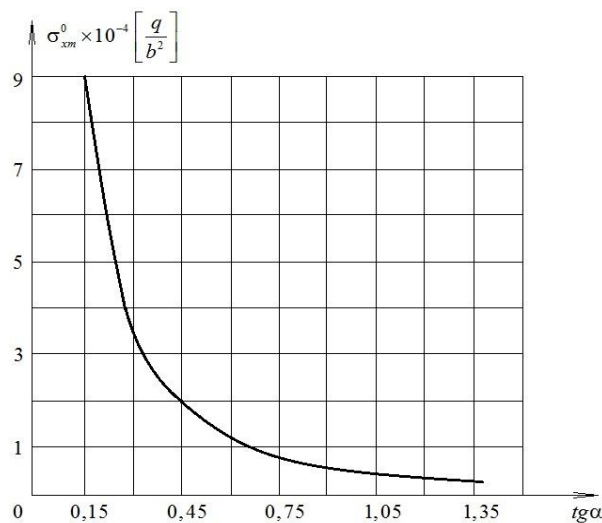


рис. 2

Далее определяем напряжение σ_{xn} для тех же значений угла α , что и на рис 2. Так как для данного интервала изменения угла α число $\sin 2\alpha$, будет порядка h_* , то в качестве аппроксимирующей функции в этом случае выберем функцию [1].

Применяя ранее описанную схему решения краевой задачи по определению плоской деформации, найдем напряжение σ_{xn}^0 в заделке в верхнем продольном волокне:

$$\sigma_{xn}^0 = 28C_1(\alpha)\sigma_{xm}^0, \quad (25)$$

где $C_1(\alpha)$ - произвольная постоянная, принимающая разные значения для различных α .

На основании соотношения (25) можно утверждать, что максимальное значение напряжений σ_{xn}^0 будет всегда составлять одну и ту же часть, а именно - 0,35, от основного напряжения изгиба.

Л и т е р а т у р а

1. *Фирсанов В.В.* Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – Изд. ИПРИМ РАН, 2002. – Т. 8. – № 1. – С. 28-64.
2. *Фирсанов В.В.* Погранслои и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. – М.: Изд-во МАИ, 2010. – Т.17. – № 5. – С.212-218.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

References

1. *Firsanov, V.V.* (2002). Refinement of the classical theory of rectangular plates made of composite materials, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, Ed. IPRIM Russian Academy of Sciences, Vol. 8, № 1, pp 28-64.
2. *Firsanov, V.V.* (2010). Boundary layer and its effect on the strength of a cylindrical hull, about varying thickness, *Bulletin of the Moscow Aviation Institute, Univ of MAI*, Vol. 17, №5, pp. 212-218.
3. *Goldenevizer, A.L.* (1976). *The Theory of Thin Elastic Shells*, Moscow: Nauka, 512 p.

MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A BEAM WITH A VARIABLE SECTION WITH AN EFFECT OF “BOUNDARY LAYER”

Val.V. Firsanov
MAI, Moscow

The essence of this mathematical model consist in construction of the basic stress-strain state which is based on a new hypothesis of a vertical element and an additional stress-strain state of the regional flat deformation arising of close rigidly jammed edge. It gives the chance more exactly to estimate the strength of aircraft structures near to irregularities of type of connections, join elements (spars) with variation in wall thickness, of the slender swept-delta wings, empennage, and rocket stabilizes.

The method of asymptotic integration of the differential equations of a three-dimensional theory of elasticity is applied. By means of special oblique-angled system of the coordinates relationship for the two of fringe problem was derived. The problems of additional, stress-strain state of the fringe flat deformation was solved by the variational method of Vlasov-Kantorovich. On the example of the calculation of the beam with constant thickness, it is shown that the considerable contribution to the general stress state is brought by the transverse normal and shearing stresses, which in the classical theory of bars and shells are neglected.

KEY WORDS: beam of variable cross-section, isotropic material, variational method of Vlasov – Kantorovich, stress-strain state, aviation structures, arbitrary system of coordinate, asymptotic integration.