

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А.И. СЕЙФУЛЛАЕВ\*,  
Г.А. МАМЕДОВА\*\*

*Национальная Академия Наук Азербайджана,  
Институт Математики и Механики, г. Баку AZ1141, ул. Б.Вахабзаде,9,  
[a.seyfullayev@yahoo.com](mailto:a.seyfullayev@yahoo.com)\*; [gular-gulshan@rambler.ru](mailto:gular-gulshan@rambler.ru)\*\**

*В данной работе исследуется нестационарное движение цилиндрического включения с осциллятором в акустической среде после прохождения волны. Вычислены и проиллюстрированы граничные функции и потенциалы в зависимости от времени, а также исследуется свободное колебание вышеупомянутой системы. При некоторых значениях параметров задачи определены собственные частоты колебаний системы.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** колебания, волна, частота, плотность, включения, давления, потенциал.

**Введение.** В настоящее время исследования движения конструкции, взаимодействующих с окружающей средой является актуальным. Практика современных отраслей машиностроения и строительства требует расчета элементов конструкций и сооружений на действие волн, распространяющихся в окружающей тело среде или в среде заполняющей его. Из-за сложности динамики конструкций, их можно смоделировать как систему с одной степенью свободы. Так же наземные, подземные, цилиндрические, сферические конструкции и емкости, находящиеся во взаимодействии с сейсмическими или взрывными волнами могут быть смоделированы как жесткие включения, содержащие упруго закреплённую массу, взаимодействующую со сплошной средой. Такими конструкциями могут быть нефтеперерабатывающие конструкции, высотные здания, цилиндрические и сферические емкости и т.д.

В связи с указанным, с целью упрощения задач, рассматриваются упрощенные модели, как то, сооружения представляются в виде дискретной колебательной системы, а окружающая среда рассматривается в двухмерной постановке. Воздействия, которым подвергаются сооружения, могут иметь различную природу и соответственно должны изменяться постановки задач.

Кроме того, изучение совместного движения сплошной среды с дискретными системами имеет большое практическое значение. Например, в показания датчиков измерительных устройств волновых процессов вносятся помехи от их собственных колебаний, или при взаимодействии с сейсмическими волнами сооружения, могут рассматриваться как дискретные системы.

С практической точки зрения представляет интерес исследование поведения оболочечных конструкций, к которым крепятся дополнительные массы. Основное внимание в таких задачах уделяют вопросам оценки амортизирующей способности конструкции (при действии динамических нагрузок). Если жесткость оболочки велика по сравнению с жесткостью амортизаторов (пружин), то деформацией оболочки в ряде случаев можно пренебречь.

Влияние системы грузов, расположенных внутри цилиндрической оболочки, на ее поведение при взаимодействии со сферической волной давления рассматривалось в [1,2,3]. Система грузов (сосредоточенных масс) с помощью упругих пружин крепится к внутренней поверхности оболочки.

Численные расчеты проводились для стальной оболочки, погруженный в воду, при падении на нее сферической волны экспоненциального профиля.

В работе [4] исследована дифракция упругих волн на абсолютно жесткой сфере с внутренними элементами. В работе [5] исследованы нелинейные совместные колебания абсолютно твердого цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью со свободной поверхностью, присоединенного пружиной к платформе, под действием гармонического нагружения. В работе [6] исследовано движение сферического включения с осциллятором в акустической среде после прохождения волны (нестационарная задача). В данной работе исследуется нестационарное движение цилиндрического включения с осциллятором в акустической среде после прохождения волны, а также исследуется свободное колебание вышеупомянутой системы так как, исследование собственных колебаний важно с практической точки зрения, например, если включение представляет собой конструкцию, в которой имеются источники колебаний, которые могут вызвать резонанс. Система также может оказаться в состоянии резонанса от воздействия внешних источников колебаний.

**Постановка задачи.** Исследуется движения жесткого цилиндрического включения внутри которого упруго подвешена масса. Предполагается что, цилиндр движется в среде безотрывно (рис.1).

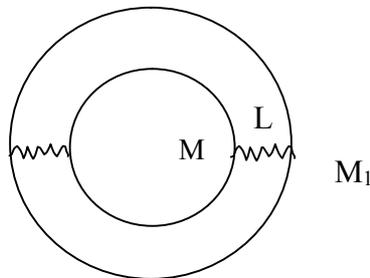


Рис. 1.

Рассмотренная задача является плоской. Безвихревое движение среды в акустической постановке описывается уравнением:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $a$  - скорость распространения звука,  $\varphi$  - потенциал скорости  $\vec{v} = grad \varphi$ ,

$\vec{v}$  - скорость,  $\Delta$  - оператор Лапласа. После прохождения волны если пренебречь переходными явлениями (дифракцией), неподвижное включение в начальный момент оказывается окруженным средой движущейся в одном направлении с известной скоростью.

Согласно принципу относительности можно рассматривать среду неподвижной, а включению придать скорость жидкости.

Включение движется по закону

$$\begin{cases} M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = P + L(x_2 - x_1) \\ M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -L(x_2 - x_1) \end{cases}, \quad (2)$$

$M_1$  – масса обоймы,  $M_2$  – масса подпружиненного тела,  $x_1$  – перемещение обоймы,  $x_2$  – перемещение подпружиненного тела,  $L$  – жесткость пружины,  $P$  – сила воздействия жидкости на включение.

Для цилиндрического включения радиуса  $r_0$ :

$$P = r_0 \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta, \quad \text{где } p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \rho - \text{плотность, } \theta - \text{полярный угол.} \quad (3)$$

Условие равенства нормальных составляющих скорости к поверхности обоймы, составляющих скорость жидкостей и обоймы, имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{dx_1}{dt} \cos \theta. \quad (4)$$

Таким образом, рассматривается задача для уравнения (1) с граничными условиями (2) с учетом (3) и (4) и начальными условиями

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (1) в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) можно представить в виде:

$$\varphi(r, \theta, t) = \varphi_1(r, t) \cos \theta. \quad (7)$$

С учетом выражения для оператора Лапласа соотношение (6) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \varphi_1 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}. \quad (8)$$

После преобразования Лапласа- Карсона уравнение (8) в изображениях будет

$$\overline{\varphi_1} + \frac{1}{r} \overline{\varphi_1} - \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \overline{\varphi_1} = 0. \quad (9)$$

Решение уравнение (9) при условии ограниченности на бесконечности имеет вид:

$$\overline{\varphi_1} = CK_1(pr/a), \quad (10)$$

$r$ - расстояние от центра обоймы,  $K_1$ - функция Макдональда первого порядка.

Учитывая (7), из формулы (3) следует:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cdot \cos \theta, \quad P = -\rho r_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \cdot \pi \quad (11)$$

Уравнения (2) с учетом (11), (4) и (7) примут вид:

$$\begin{cases} M_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial t} + \rho r_0 \pi \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = L(x_2 - x_1) \\ M_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + L(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Последняя система после преобразования Лапласа –Карсона имеют вид:

$$\begin{cases} pM_1(\bar{\varphi}_1' - \dot{x}_0) + \rho r_0 \pi p \bar{\varphi}_1 = L(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ M_2(p^2 \bar{x}_2 - p\dot{x}_0) + L(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = 0 \end{cases}, \quad (13)$$

$\dot{x}_0$  - начальная скорость включения.

Учитывая (10), из (13) получаем:

$$C = \frac{- (M_1 M_2 p^2 + M_1 L + M_2 L) \cdot \dot{x}_0}{\left[ (M_1 M_2 p^2 + M_1 L + M_2 L) \cdot \left( \frac{p}{a} K_0 + \frac{1}{r} K_1 \right) - \rho r_0 \pi K_1 (M_2 p^2 + L) \right]}, \quad (14)$$

$K_0$ - функция Макдональда нулевого порядка.

Перепишем выражение (14) в виде:

$$C = \frac{-r_0 \cdot \dot{x}_0}{\frac{pr_0}{a} K_0 + K_1 + \left( 1 + \frac{M_2 L}{M_1 M_2 p^2 + M_1 L + M_2 L} \right) \frac{\rho r_0^2 \pi}{M_1} K_1}. \quad (15)$$

Для нахождения оригинала знаменателя в (15) понадобятся следующие оригиналы:

$$PK_0\left(\frac{pr}{a}\right) \rightarrow \frac{a}{r \sqrt{\left(\frac{at}{r}\right)^2 - 1}}; \quad PK_1\left(\frac{pr}{a}\right) \rightarrow \sqrt{\left(\frac{at}{r}\right)^2 - 1};$$

$$\frac{p}{p^2 + e^2} \rightarrow \frac{\sin et}{e}, \quad t > \frac{r}{a}, \quad e^2 = \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) L$$

Обозначив оригинал всего знаменателя через  $z$ , а также  $\theta_1 = at/r_0$  имеем:

$$-z = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + \left( 1 - \frac{\rho r_0^2 \pi}{M_1} \right) \sqrt{\theta_1^2 - 1} + \frac{L \rho \pi r_0^2}{M_1^2 e} \int_0^t \sin(t - \eta) \cdot e \cdot \sqrt{\left(\frac{a\eta}{r_0}\right)^2 - 1} d\eta$$

Введя  $M_1 = \rho_* r_0^2 \pi$ ,  $L = M_2 \omega^2$ ,  $e = \omega \sqrt{M_2 / M_1 + 1}$ , имеем:

$$-z = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right) \sqrt{\theta_1^2 - 1} + \frac{\rho}{\rho_*} \cdot \frac{\omega r_0}{a \sqrt{\frac{M_1}{M_2} + \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2}} \cdot \int_1^{\theta_1} \sqrt{\theta_*^2 - 1} \sin \frac{r_0 e}{a} (\theta_1 - \theta_*) d\theta_* \quad (15^a)$$

В частных случаях при некоторых значениях параметров задачи определены граничные функции.

Учитываем, что  $M_1 = 0$ . Тогда выражения (14) примет вид:

$$C = \frac{1}{p} \cdot \frac{-\dot{x}_0}{\frac{1}{a} K_0 - pK_1 \cdot \frac{\rho \pi r_0}{L} + \frac{K_1}{p} \left( -\frac{\rho \pi r_0}{M_2} + \frac{1}{r_0} \right)}. \quad (16)$$

В (16) обозначив оригиналы знаменателя  $z$ , получим:

$$z = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{Arcch} \frac{at}{r} - \frac{\rho \pi r_0}{L} \cdot \frac{a}{r_0} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}} + \left( -\frac{\rho \pi r_0}{M_2} + \frac{1}{r_0} \right) \left( \frac{at}{2r_0} \sqrt{t^2 - \frac{r_0^2}{a^2}} - \frac{r_0}{2a} \operatorname{Arcch} \frac{at}{r_0} \right)$$

или

$$z = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{Arcch} \theta_1 - \frac{\rho \pi r_0}{L} \cdot \frac{\theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + \left( -\frac{\rho \pi r_0^2}{M_2} + 1 \right) \left( \frac{\theta_1}{2a} \sqrt{\theta_1^2 - 1} - \frac{1}{2a} \operatorname{Arcch} \theta_1 \right),$$

где  $\theta_1 = \frac{at}{r_0}$ . Обозначим  $\frac{pC(p)}{\dot{x}_0} \rightarrow S(t)$ .

Учитывая, что  $\frac{C \cdot p}{\dot{x}_0} \cdot \bar{z} = 1$ , по теореме Бореля получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t S(t-\tau) z(\tau) d\tau = 1.$$

Отсюда, получим:  $\int_0^t S(t-\tau) z(\tau) d\tau = t + c_1$ .

Известно что, при  $t < \frac{r_0}{a}$ ,  $S = 0$ ,  $z = 0$ ,

$$\int_{r_0/a}^t S(t-\tau) z(\tau) d\tau = t + c_1. \quad (17)$$

Учитываем, что при  $t = r_0/a$  интеграл равен нулю. В этом случае  $c_1$  определится, как  $c_1 = -r_0/a$ , а вводя следующие обозначения:

$$t = r_0 \theta_1 / a,$$

найдем оригиналы функции  $C(p)$  при помощи интегрального уравнения I рода Вольтерра:

$$\int_1^{\theta_1} S(\theta_1 - \tau) z(\tau) d\tau = \theta_1 - 1.$$

Рассмотрим частный случай при  $\rho = \rho_*$ ,  $M_1 = M_2$ ,  $e = \omega \sqrt{2}$ .

Формула (15<sup>a</sup>) примет вид:

$$-z = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + 2\sqrt{\theta_1^2 - 1} + \frac{\omega r_0}{a\sqrt{2}} \int_1^{\theta_1} \sqrt{\theta_*^2 - 1} \sin \frac{r_0 \omega \sqrt{2}}{a} (\theta_1 - \theta_*) d\theta_*. \quad (18)$$

Для примера примем:  $\omega r_0/a = 1/\sqrt{2}$ , где  $a/r_0 = \omega_1$  - собственная частота среды в  $r_0$ , тогда:

$$-z_n = \frac{1}{\sqrt{\theta_1^2 - 1}} + 2\sqrt{\theta_1^2 - 1} + \frac{1}{2} \int_1^{\theta_1} \sqrt{\theta_*^2 - 1} \sin(\theta_1 - \theta_*) d\theta_*. \quad (19)$$

При  $\theta_1 \approx 1$ ,  $S \approx 2/(\pi)$ ,  $S$  находится численным методом, аналогично работе [7], а потенциал  $\varphi$ , по формуле:

$$\frac{1}{a\dot{x}_0} \cdot \varphi_1 = \int_{r_0/a}^{\theta_1} \frac{S(\theta_1 - \theta_*) \theta_*}{\sqrt{\theta_*^2 - r^2/r_0^2}} d\theta.$$

Проведем численный анализ задачи. На рис. 1 и рис. 2 изображены графики зависимостей граничной функции  $S$  и потенциала  $\varphi$  от времени при значениях плотности  $\rho = 1$  и 2, масса колеблющегося тела:  $m = 1/M = 2; 1; 2/3; 0,5$ .

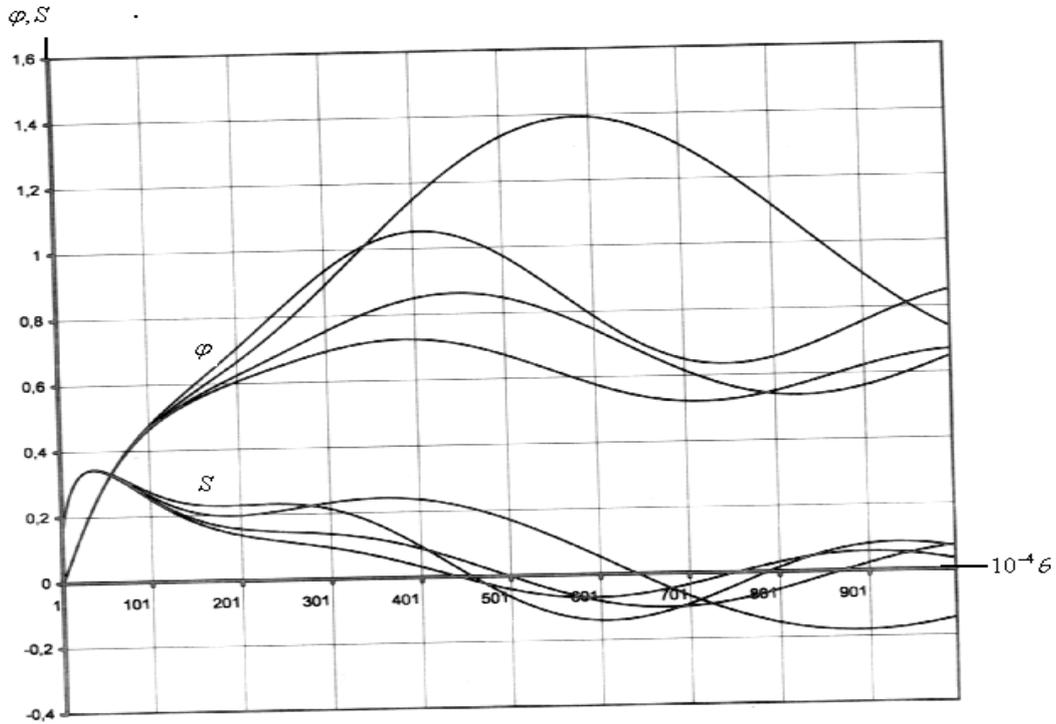


Рис. 2. Графики зависимостей граничной функции  $S$  и потенциала  $\varphi$  от времени при значении плотности  $\rho = 1$

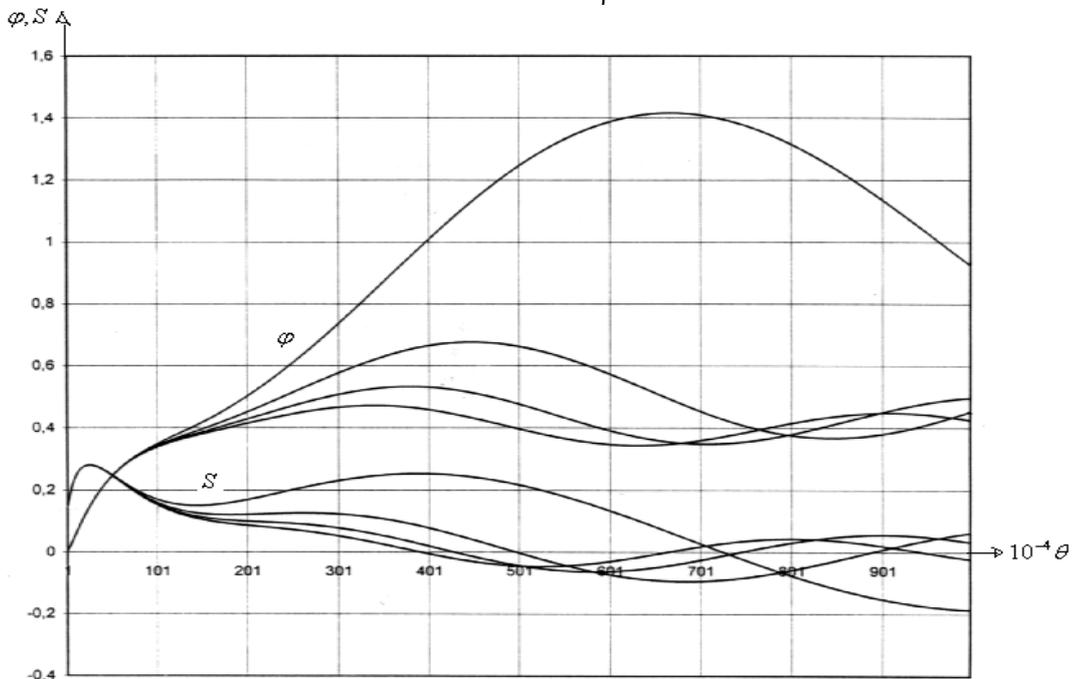


Рис. 3. Графики зависимостей граничной функции  $S$  и потенциала  $\varphi$  от времени при значении плотности  $\rho = 2$

Как видно из графиков функция  $S$  после начального отклонения колеблется с затуханием приближалась к нулю, потенциал же  $\varphi$  с колебаниями приближа-

ется к постоянному значению для каждой плотности  $\rho$  при различных относительных внутренних массах  $1/M$ . При уменьшении относительной массы  $1/M$  вышеупомянутые функции колеблются с меньшей амплитудой.

Наряду с исследованиями нестационарного движения упругой среды представляет интерес исследование собственных колебаний вышеописанной системы. В этой работе также исследуются свободные колебания вышеописанной системы в акустической среде. Рассматриваемая задача – плоская; движение жидкости потенциальное. Уравнение движения жидкости представляет собой волновое уравнение (1). В области контакта жидкости к движущимся цилиндрам нормальные составляющие скоростей жидкости и включения равны. Рассматривая гармонические колебания системы, получается трансцендентное уравнение для частот. Задача решается обратным методом [7,8,9,10], т.е. частота системы без жидкости (осциллятор) выражается, аналитически через частоту основной системы, не решая трансцендентных уравнений.

В работе [11] показано, что для расчета собственных частот и амплитуд колебаний упругого элемента в жидкости, например цилиндрического тепловыделяющего элемента в атомном реакторе или трубки теплообменного устройства, необходимо знать величину присоединенной массы и демпфирующую силу. Кроме того, эти характеристики зависят от расположения неподвижных границ, окружающих цилиндр [12,13]. Поэтому, полагая что, среда с внешней стороны ограничена неподвижной поверхностью  $r = r_1$  или в случае неограниченной среды на поверхности  $r = r_1$  располагается узел стоячей волны, будем иметь условие:

$$\mathcal{G}|_{r=r_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=r_1} = 0. \quad (20)$$

С целью нахождения собственных частот системы применяется метод разделения переменных. Таким образом, решение уравнения (6) можно представить в виде:

$$\varphi(r, \theta, t) = R(r)e^{i\omega t} \cos \theta, \quad x_1 = Be^{i\omega t}; \quad x_2 = Ce^{i\omega t}, \quad (21)$$

где  $B, C$  - неизвестные, подлежащие определению.

Учитывая (21) в (6), уравнение (6) примет следующий вид:

$$R'' + \frac{1}{r_1} R' + \left(1 - \frac{1}{r_1^2}\right) R = 0, \quad (22)$$

где  $r = ar_1 / \omega$ . Решение уравнения (22) имеет вид [14]:

$$R = EJ_1\left(\frac{\omega r}{a}\right) + DN_1\left(\frac{\omega r}{a}\right), \quad (23)$$

где  $E, D$  - неизвестные, подлежащие определению.

Здесь  $J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right), N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)$  - цилиндрические функции Бесселя и Неймана.

Подставляя (21) в (2) и в (4) с учётом (3) получим систему алгебраических однородных уравнений относительно постоянных  $E, B, C, D$ :

$$\begin{cases} (M_1\omega^2 - L)B + \rho r_0 \pi R i \omega + LC = 0 \\ LB + C(M_2\omega^2 - L) = 0 \\ R' - i\omega B = 0 \\ R' = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Для существования нетривиального решения системы (24) приравняем к нулю главный определитель названной системы:

$$\begin{vmatrix} \rho r_0 \pi i \omega J_1\left(\frac{r_0 \omega}{a}\right) & M_1 \omega^2 - L & L & \rho r_0 \pi i \omega N_1\left(\frac{r_0 \omega}{a}\right) \\ 0 & L & M_2 \omega^2 - L & 0 \\ J_1'\left(\frac{r_0 \omega}{a}\right) & -i \omega & 0 & N_1'\left(\frac{r_0 \omega}{a}\right) \\ J_1'\left(\frac{r_1 \omega}{a}\right) & 0 & 0 & N_1'\left(\frac{r_1 \omega}{a}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

В результате получим частотное уравнение:

$$\begin{aligned} & J_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) (M_1 M_2 \omega^4 - L_2 \omega^2 (M_1 + M_2)) - \\ & - J_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) (M_1 M_2 \omega^4 - L_2 \omega^2 (M_1 + M_2)) - \\ & - J_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) \rho \pi r_0 (M_2 \omega^2 - L) \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Вводим следующие обозначения:

$$\frac{L}{M_1} = k_1^2, \quad \frac{L}{M_2} = k_2^2, \quad \frac{L}{\rho r_0^2 \pi} = k_0^2, \quad m = \frac{\rho \pi r_0}{M_1}.$$

Тогда уравнение (26) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left( -J_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) \right) \left( \omega^4 - \omega^2 (-2k_3^2) + k_1^2 k_2^2 \right) - m \frac{1}{r_0} (\omega^4 - \omega^2 k_2^2) = 0, \\ & J_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) (\omega^2 - k_1^2 - k_2^2) - J_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) (\omega^2 - k_1^2 - k_2^2) - \\ & - J_1'\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) N_1'\left(\frac{\omega r_0}{a}\right) m \frac{1}{r_0} (\omega^2 - k_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Переходим к безразмерным величинам. Для этого вводим следующие обозначения:

$$\frac{\omega r_0}{a} = \bar{\omega}, \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 r_0}{a}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 r_0}{a}, \quad \bar{k}_0 = \frac{k_0 r_0}{a}, \quad \frac{\omega r_1}{a} = \bar{\omega}_1$$

В результате уравнение (27) примет следующий вид:

$$\bar{k} = \sqrt{F_1 / F_2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & F_1 = c \bar{\omega}^4 (J_0(\bar{\omega}) N_0(c \bar{\omega}) - J_0(c \bar{\omega}) N_0(\bar{\omega})) + \bar{\omega}^3 (J_1(c \bar{\omega}) N_0(\bar{\omega}) - J_0(\bar{\omega}) N_1(c \bar{\omega})) + \\ \text{где} & + c \bar{\omega}^3 (J_0(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega}) - J_1(\bar{\omega}) N_0(c \bar{\omega})) + (J_1(\bar{\omega}) N_1(c \bar{\omega}) - J_1(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega})) + \\ & + c \bar{\omega}^3 m J_0(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega}) - \bar{\omega}^2 J_1(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega}), \\ & F_2 = -c \bar{\omega} (J_0(c \bar{\omega}) N_0(\bar{\omega}) - J_1(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega})) m - \\ & - (1 + b^2) (\bar{\omega}^3 c (J_0(\bar{\omega}) N_0(c \bar{\omega}) - J_0(c \bar{\omega}) N_0(\bar{\omega}))) + \\ & + \bar{\omega} (J_1(c \bar{\omega}) N_0(\bar{\omega}) - J_0(\bar{\omega}) N_1(c \bar{\omega})) + \\ & + c \bar{\omega} (J_0(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega}) - J_1(\bar{\omega}) N_0(\bar{\omega})) + (J_1(\bar{\omega}) N_1(c \bar{\omega}) - J_1(c \bar{\omega}) N_1(\bar{\omega})), \\ & \bar{k}_1 = b \bar{k}_2, \quad \bar{k}_2 = \bar{k}, \quad \bar{k}_1 = b \bar{k}, \quad \bar{\omega}_1 = c \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Уравнение (28) связывает свободную частоту системы со свободной частотой включения в отсутствие жидкости. Нахождение частот свободных колебаний системы в целом связано с решением трансцендентного уравнения (27).

При решении трансцендентного уравнения часто авторы прибегают к приближенным методам, в частности к асимптотическим. Однако, решение обратной задачи позволяет, строить спектр графиков, что упрощает исследование, в том числе определение частоты.

При некоторых значениях параметров задачи на интервале  $0 - 250$  для  $\bar{k}$  и  $0 - 0,6$  для  $\bar{\omega}$  построены графики  $\bar{k} - \bar{\omega}$  (рис. 4,) где  $\bar{\omega} = A$ ,

$$\bar{k} = X(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 10, \quad \bar{k} = Y(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 20,$$

$$\bar{k} = Z(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 30, \quad \bar{k} = N(A), \quad b = 2, \quad m = 1, \quad c = 40.$$

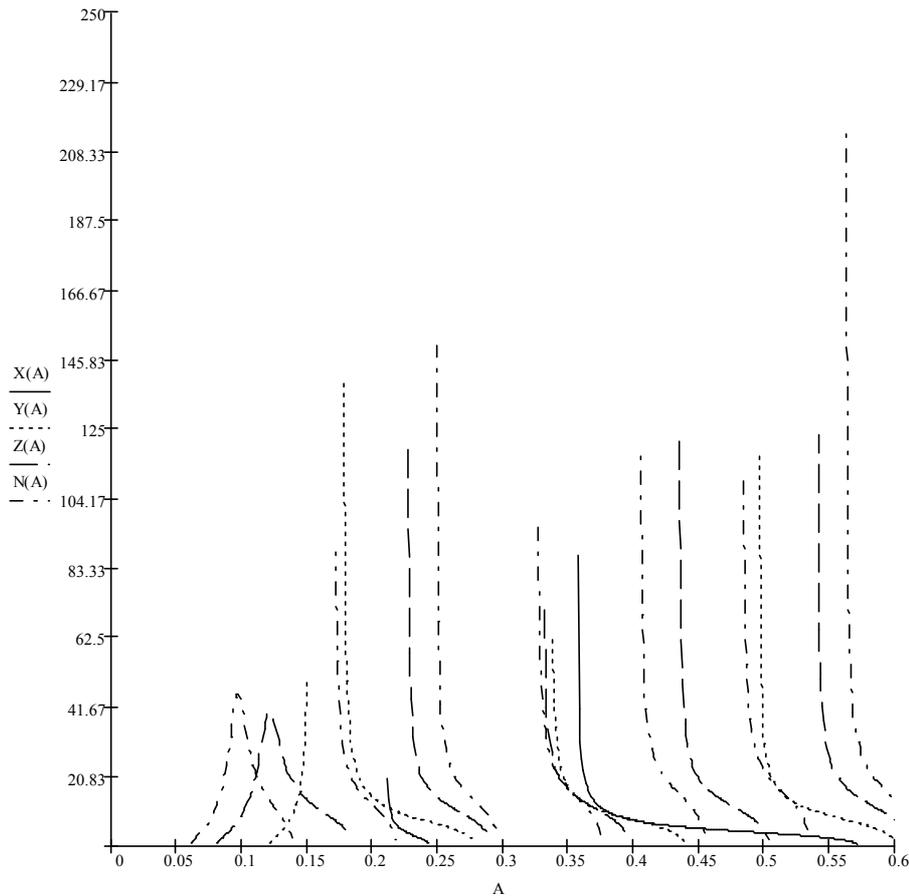


Рис.4. График зависимости частоты осциллятора  $\bar{k}$  от частоты системы  $\bar{\omega}$ .

Из рисунка видно, что на первой моде с увеличением  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{k}$  увеличивается. На последующих модах с увеличением  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{k}$  уменьшается. Это может объясняться встречным движением цилиндра и среды. Число кривых предваряющих рассматриваемую кривую соответствует числу узлов волны в среде.

Как видно, из рис. 4 графики различных мод колебаний имеют вертикальные асимптоты, абсциссы которых, отвечают узловым поверхностям стоячей волны. Чтобы определить частоты колебаний системы  $\bar{\omega}$  при заданной частоте колебаний осциллятора  $\bar{k}$  на графике  $\bar{k} - \bar{\omega}$  (рис. 4) проводится горизонтальная прямая с ординатой  $\bar{k}$  и, измерив абсциссою точек пересечения этой горизонтальной линии с ветвями графика  $\bar{k} - \bar{\omega}$ , получим величины  $\bar{\omega}_k$ , по-

средством которых можно вычислить значения  $\omega_k = \bar{\omega}_k a / r_0$  спектра частот собственных колебаний системы.

Исследование можно проводить не только графически, но и аналитическим путем, например, дифференцируя выражение (28) по  $\bar{\omega}$ , определяя характер изменения частот системы. Графики  $\bar{k} - \bar{\omega}$  позволяют анализировать характер зависимости частоты от жесткости пружины осциллятора.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума Национальной Академии Наук Азербайджана, 2015.*

#### Л и т е р а т у р а

1. Huang H., Lu Y.P., Wang Y.F.F. Transient interaction of spherical acoustic waves a cylindrical elastic shell and it's internal multi-degree-of – freedom mechanical systems. *J.Acoust. Soc. America*. 19746 vol 56, №1, p. 4-10.
2. Андронов И.В. Рассеяние высокочастотной волны на сильно вытянутом теле. *Акустический журнал*, 2013, том 59, №4, с. 419-423
3. Андронов И.В. Дифракция на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением. *Акустический журнал*, 2014, том 60, №3, с. 219-226
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: «Наука», 1990. 264 с. ISBN-5-20-14006-6.
5. Лимарченко О.С., Ткаченко Р.В. Влияние пружинного закрепления на динамику цилиндрического резервуара с жидкостью, находящегося на подвижной платформе. *Международный научный журнал. Прикладная механика*, том 50, №3, 2014, с. 69-79.
6. Сейфуллаев А.И., Агаева Н.А. Решение задачи о движении сферического включения с подпружиненной массой в акустической среде. *Изв. АН Азерб. Сер. физ. техн. и мат. наук*, 1998. Т.18 № 2, с. 133-135.
7. Мамедова Г.А., Рустамова М. А., Агасиев С.Р. Исследование свободных колебаний сферической оболочки с жидкостью обратным методом. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, 6/7 (66), 2013, с.16-20.
8. Сейфуллаев А. И., Мамедова Г.А., Рустамова М. А., Юзбашиева А.О. Анализ свободных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек содержащих сжимаемую жидкость. *Инженерно-физический журнал*, Минск, Том.85, №6, 2012.
9. Seyfullayev A.I., Rustamova M.A., Agasiev S.R. Free oscillations of two concentrically located cylindrical shells with a fluid between them. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*, vol. 3, Iss. 10, April 2014, p. 33-37.
10. Агаларова Т.Д. Взаимодействие акустической волны с осциллятором. *Сборник научных трудов по механике*, Баку, №7, 1997, с. 181-184
11. Синяевский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.Б. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости. *Прикладная механика*, 1980, Том XVI, №1, с.62-67.
12. Ибрагимов М.Х., Синяевский В.Ф., Беляков А.Г. и др. Исследование присоединенных масс и коэффициентов затухания при колебаниях цилиндров в вязких жидкостях. *Препринт ФЭИ-585. Обнинск*, 1975, 23 с.
13. Chen S.S., Wambsganss M. W., Jendrzejczyk J.A. Added mass and damping of a vibration rod in confined viscous fluid. *Trans.ASME. J.Appl. Mech.* 1976, 43, №2, p.325-329.
14. Смирнов В.Н. Курс высшей математики. Т.3, ч.2, М.: Наука, 1974, 672с.

#### INVESTIGATION OF THE MOTION OF A CYLINDRICAL INCLUSION WITH ELASTIC ELEMENTS IN THE ACOUSTIC MEDIUM

Seyfullayev A.I., Mamedova G. A.

*National Academy of Sciences of Azerbaijan, Institute of Mathematics and Mechanics, Baku*

In this paper, the unsteady motion of a cylindrical inclusion with an oscillator in the acoustic medium after the passage of the wave is investigated. The boundary functions and potentials, depending on the time, and also free oscillations of a cylindrical inclusion containing suspended mass situated in acoustic medium are investigated. Eigen-frequencies of oscillations are defined at some values of parameters of the system.

KEY WORDS: vibration, wave, shell, density.