Динамика конструкций и сооружений

УДАР СТЕРЖНЯ С ОГОЛОВКОМ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

П. Ф. САБОДАШ, *профессор, д.т.н.,*
А.И. ГОЛЫШЕВ, *доцент, к.т.н.,*
М. М. ТАТАРКИН, *стажер*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А.Тимирязева, Москва

Рассмотрена динамическая задача о распространении волн напряжений при ударе упругого стержня, на свободном конце которого жестко закреплена сосредоточенная масса, об абсолютно жесткую преграду. Предполагается, что после удара стержень «прилипает» к преграде. Задача решается с использованием преобразования Лапласа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: стержень, оголовок, удар, жесткая преграда, преобразование Лапласа, граничные условия; начальные условия.

Несмотря на кажущуюся простоту, решение динамических задач даже для прямолинейных стержней представляет определенные трудности и привлекает внимание исследователей, поскольку широко встречается в технике [1-5].

Рассмотрим волновые процессы в стержне постоянного поперечного сечения, несущем сосредоточенную массу (оголовок) на неударяемом торце при ударном взаимодействии стержня с жёсткой преградой. Метод исследования одномерных неустановившихся задач основан на использовании преобразования Лапласа с параметром s по времени. Уравнения движения механических систем дополняются нулевыми начальными и соответствующими граничными условиями. Представлены числовые результаты изменения напряженного состояния стержня - осевой удар упругого стержня, несущего на неударяемом торце связанную с ним жесткую массу.

Рассмотрим ударное взаимодействие системы «упругий стержень (ударник) – инерционная масса на неударяемом торце, жестко связанная с ним», при низких скоростях соударения с абсолютно жёсткой преградой. На рис.1, *а* представлена ситуация до удара (все точки стержня движутся в одном направлении с одинаковой скоростью V_0). На рис.1, *б* показана ситуация после удара (модули и направления скоростей точек стержня зависят от координаты и времени, прошедшего после удара об абсолютно жёсткую преграду).

С учетом гипотезы о «прилипании» стержня к жёсткой преграде после удара ($x = 0$) формулируются начальные и граничные условия (2,3).

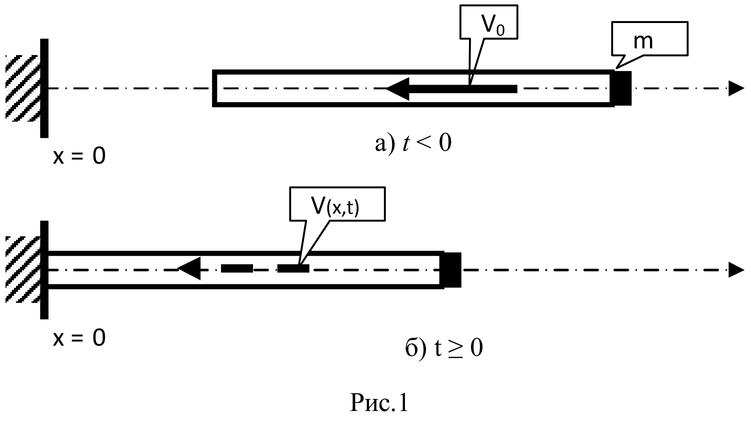

Рис.1

Математическая модель нестационарной задачи для стержня, обладающего вязкоупругими свойствами, в общепринятых обозначениях имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \;\; 0 < x < l, \;\; \forall t > 0 \\ \sigma_x(x,t) = E\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \int_0^t \gamma(t-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right] \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0, \; \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -V_0 \text{ при } t = 0, \tag{2}$$

$$u(x,t)\,|_{\,x=0} = 0, \qquad m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,|_{\,x=\ell} = -A\sigma_x(x,t)\,|_{\,x=\ell}\,. \tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ и $\sigma_x(x,t)$ – осевое перемещение плоского поперечного сечения вязкоупругого стержня и напряжение в нем; ρ – плотность материала; E – модуль Юнга; $\gamma(t)$ – вязкоупругое ядро разностного типа; l – длина стержня; A – площадь поперечного сечения; m – масса твердого тела, жестко скрепленная с неударяемым торцом стержня (оголовок); V_0 – скорость осевого удара, вектор $\overrightarrow{V_0}$ которой направлен вдоль оси стержневого элемента.

После применения к уравнениям (1) – (3) одностороннего преобразования Лапласа получаем следующую краевую задачу:

$$\frac{d\bar{\sigma}_x(x,s)}{dx} - \rho s^2 \bar{u}\,(x,s) = \rho V_0,$$

$$\bar{\sigma}_x(x,t) = E[1-\overline{\gamma}\,(s)]\frac{d\bar{u}\,(x,s)}{dx} = \rho a^2 \frac{d\bar{u}\,(x,s)}{dx}; \; a = \sqrt{\frac{E(1-\overline{\gamma}\,)}{\rho}};$$

$$\bar{u}\,(x,s) = 0 \text{ при } x = 0; \;\; m(\bar{u}s^2 + V_0) = -F\bar{\sigma}_x(x,s) \text{ при } x = \ell. \tag{4}$$

где s - параметр преобразования Лапласа по времени; a – изображение скорости звука. Общее решение для изображения осевого перемещения имеет следующий вид:

$$\bar{u}\,(x,s) = C_1 e^{\frac{sx}{a}} + C_2 e^{-\frac{sx}{a}} - V_0/s^2\,.$$

После определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий на концах стержня $x = 0$; ℓ точное решение в пространстве изображений дается следующей формулой:

$$\bar{u}\,(x,s) = \frac{V_0}{s^2}\left\{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\left[(1+K)e^{\frac{s\,(x-\ell)}{a}} + (K-1)e^{-\frac{s\,(x-\ell)}{a}}\right] - 1\right\};$$

$$K = \frac{\rho F a}{ms}; \; \alpha_1 = (1-K)e^{\frac{s\ell}{a}}; \; \alpha_2 = (1+K)e^{-\frac{s\ell}{a}}.$$

В качестве ядра наследственности можно выбрать, например, экспоненциальную функцию простейшего вида $\gamma(t) = b_1 e^{-b_2 t}$, $b_2 > b_1 > 0$. Параметр K, представленный в виде $K = (\rho F\ell a)(m\ell s)^{-1}$, содержит отношение массы стержня $\rho F\ell$ к массе оголовка m, жёстко прикрепленного к торцу стержня.

Однако в таком виде при обратном преобразовании Лапласа возникают определенные сложности, поэтому, следуя [2] и используя разложение знаменателя в геометрическую прогрессию, получим точное решение в пространстве изображений (далее считаем стержень упругим телом):

$$\overline{u_*} = \frac{\bar{u}}{l} = \frac{T\bar{V}_0}{p^2}\left\{-1 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{1-\eta p}{1+\eta p}\right)^{n+1}\left(-p(2(n+1)-\bar{x})\right) + \left(\frac{1-\eta p}{1+\eta p}\right)^{n}\exp\left(-p(2n+\bar{x})\right)\right]\right\}$$

$$\bar{\sigma}_* = E\frac{\partial \overline{u_*}}{\partial x} = \frac{T\bar{V}_0}{p}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{1-\eta p}{1+\eta p}\right)^{n+1}\exp\left(-p(2(n+1)-\bar{x})\right) - \left(\frac{1-\eta p}{1+\eta p}\right)^{n}\exp\left(-p(2n+\bar{x})\right)\right]\right\},$$

где: $\eta = m/(\rho a l)$; $T = l/a$; $p = sT$; $\bar{x} = x/l$; $\bar{V}_0 = V_0/a$. (5)

Здесь: T – время пробега волной длины стержня, $\bar{x}$ – относительная координата). При величине относительной присоединенной массе $\eta = 0$ получаем решение, построенное в работе [2].

Обратное преобразование Лапласа даже такого выражения приводит к громоздким вычислениям, поэтому для получения решения для вязкоупругого тела было решено сначала построить решение для упругого тела. На рис. 2 представлены кривые изменения оригиналов условных напряжений для ударяемого конца (σ0), середины (σ05) и свободного конца (σ1) упругого стрежня в зависимости от относительного времени (в масштабе ***T***- времени пробега волны от одного конца стержня до другого) для случая, когда масса груза равна половине массы стержня (η = 0,5).

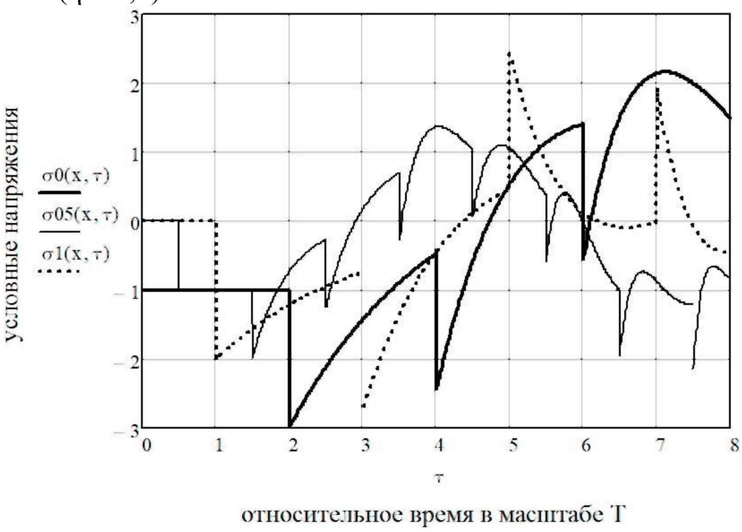

Рис. 2

Фронт ударного сжатия вступает в сечение $x = \ell/2$ ($\bar{x} = 1/2$) с резким скачком амплитуды напряжения; малые пики соответствуют приходу волны сжатия, отраженной от торцевой массы m на торце $x = \ell$. После чего в сечении $x = \ell/2$ наступает разгрузка *(σ<0)*. Для стержня, выполненного из вязкоупругого материала, при определенных характеристиках вязкоупругих свойств наблюдается незначительное уменьшение амплитуд динамических ударных напряжений.

Литература

1. *Манжосов В. К., Слепухин В.В.* Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 208 с.

2. *Гонсовский В.Л., Мешков С.И., Россихин Ю.А.* Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8. – Вып. 10. – С. 71 – 76.

3. *Сабодаш П.Ф.* Удар составного стержня переменного сечения с жесткую преграду // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 84 – 90.

4. *Hangkong Xuebao*. Impact response of multi-step rods with lumped masses and spring supports//Acta Aeronautica et Astronautica Sinica. – 2008. - Vol. 29, no. 5, pp. 1174–1179.

5. *Vikrant R. Hiwarkar, Vladimir I. Babitsky, and Vadim V. Silberschmidt.* Vibro-Impact Response of a Cracked Bar// Shock and Vibration. - 2011. - Vol. 18, no. 1-2, pp. 147-156.

References

1. *Manzhosov, V.K., Slepuhin, V.V.* (2011). *Modelirovanie Prodol'nogo Udara v Sterzhnevyh Sistemah Neodnorodnoj Struktury*. Ul'janovsk: UlGTU, 208 p.

2. *Gonsovskij,V.L., Meshkov, S.I., Rossihin, Ju.A*. (1972). Udar vjazkouprugogo sterzhnja o zhestkuju pregradu. *Prikladnaja Mehanika.* Vol. 8, Iss. 10, p.71-76

3. *Sabodash, P.F.* (1976). Udar sostavnogo sterzhnja peremennogo sechenija s zhestkuju pregradu. *Prikladnaja Mehanika*. Vol. 12, Iss. 3, p. 84 – 90.

4. *Hangkong Xuebao* (2008). Impact response of multi-step rods with lumped masses and spring supports. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,* Vol. 29, no. 5, pp. 1174–1179.

5. *Vikrant R. Hiwarkar, Babitsky, V. I., and Silberschmidt, V.V.* (2011). Vibro-Impact Response of a Cracked Bar. *Shock and Vibration*, Vol. 18, no. 1-2, pp. 147-156.

IMPACT OF A BAR WITH LUMPED MASS AT RIGID BARRIER

P.Ph. Sabodash, A.I. Golyshev, M.M. Tatarkin

MSHA im. Timiryazeva, Moscow

A stress wave propagation dynamic problem due to impact of elastic bar at a rigid barrier is considered. It is presumed, that the bar is equipped with a dot mass at free end and «sticks» to rigid barrier after impact. The problem is solved with Laplace transformation.

KEY WORDS**:** bar, lumped mass, impact, rigid barrier, Laplace transformation, boundary conditions, initial conditions