

АНАЛИЗ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ПРОГИБА РЕГУЛЯРНЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Д.В. ТИНЬКОВ, инженер,
 ОАО «ГосМКБ „Радуга“ им. А. Я. Березняка»
 141981, г. Дубна, Московская обл., пр-т Боголюбова 45, кв. 88,
 e-mail: dvinkov@yandex.ru

Проводится анализ известных решений задачи о прогибе плоских ферменных конструкций различного вида. Исследуются качественные и количественные особенности решений, выявляются характерные особенности и предельные по числу панелей характеристики. Исследования выполняются при поддержке системы компьютерной математики Maple в символьном виде. Для сравнения решений и их проверки применяется пакет численных вычислений Lira.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плоская ферма, прогиб, индукция, Maple, Lira

Разнообразие ферм весьма велико, что приводит к затруднениям при выборе конструктором оптимальной конструкции. Численные расчеты в программных инженерных системах (MSC.Nastran, SAP2000, Lira) упрощают работу, но не позволяют выявить скрытые возможности конструкции. Поэтому необходимы точные аналитические решения. Такую возможность предоставляют современные системы компьютерной математики (Maple, Mathematica, Maxima). В частности, при расчете регулярной плоской шарнирно-стержневой конструкции на жесткость, возможно определить прогиб как функции не только геометрических размеров стержней, но и количества панелей или числа стержней. При большом числе панелей использование аналитических решений – единственный надежный способ избежать потери точности, обусловленных неизбежным накоплением ошибок округления при численном решении.

Выведем формулы прогиба нескольких характерных плоских ферм (№ 2, 6, 10, 12) и проведем сравнительный анализ прогиба ферм, представленных в работах [1-10]. В данных работах рассмотрены статически определимые плоские фермы с прямыми стержнями одинаковой жесткости EF и идеальными шарнирами в узлах. Прогиб вычисляется по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \frac{\sum S_i^p \cdot S_i^1 \cdot \ell_i}{EF},$$

где S_i^p – силы в стержнях от действия внешних сил, S_i^1 – силы в стержнях от единичной нагрузки, приложенной в узле в направлении, в котором требуется найти перемещение. Силы в стержнях определены методом вырезания узлов. Итоговые функции прогиба как функции числа панелей определены на основе конечного числа частных функций прогиба методом индукции (в работах применялись функции **rgf_findrecur**, **rsolve** пакета **genfunc** системы Maple [12]).

Исследуемые фермы разделены на три категории:

1. арочные (две опоры неподвижные),
2. балочные (одна опора неподвижная, вторая подвижная),
3. решетчатые (две опоры неподвижные; ферма без подъема).

Для удобства сравнения всех типов ферм формулы можно записать в одной форме. Величина прогиба для всех рассматриваемых ферм кроме №7:

$$\Delta = \frac{P}{EF} \cdot \frac{Aa^3 + Bb^3 + Cc^3}{Db^2},$$

где для всех ферм кроме №4: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, для фермы №4: $c = \sqrt{(a/2)^2 + b^2}$.

Величина прогиба фермы №7:

$$\Delta = \frac{P}{EF} \cdot \frac{n(c^3 + d^3) + Aa^3 + nb^3 + (n+1)e^3 + 2b^2e + 3e^2b}{2(b+e)^2},$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d = \sqrt{a^2 + e^2}$.

Общие виды ферм, коэффициенты при членах a^3, b^3, c^3, b^2 в формуле прогиба занесены в сводную табл. 1 (для прогибов ферм №4, 8 и 14 в статьях были обнаружены опечатки, в таблице приводятся исправленные варианты соответствующих формул). Зададимся для всех ферм одинаковой величиной пролета (L), общей высотой ферм (H) и одинаковой суммарной нагрузкой. Для фермы №14 сделаем замену:

$$F = P/(2n + 3).$$

Таблица 1

№	Общий вид	Коэффициенты
1 [1]		$A = n + 1$ $B = n$ $C = n(n+1)(2n+1)/3$ $D = 2n^2$
Балочные фермы		
2		$A = n(2n^2 + 1)/3$ $B = n$ $C = n$ $D = 2$
3 [2]		$A = n(2n^2 + 1)/3$ $B = n$ $C = n$ $D = 2$
4 [3]		$A = n(8n^2 + 1)/24$ $B = 0$ $C = n$ $D = 1$
5 [4]		$A = n(4n^2 - 1)$ $B = 2(n-1)(2n^2 + 2n - 3)$ $C = n(2n^2 + 1)$ $D = 6$
6		$A = n(2n^2 + 1)/3$ $B = 1 - (-1)^n$ $C = n$ $D = 2$

7 [5]		$A = n(n-1)(2n-1)/3$
8 [6]		$A = 3n$ $B = 3n(2n-3) + 6$ $C = n(2n^2 + 1)$ $D = 6$
Решетчатые фермы		
9 [7]		$A = n(n+1)(n+2)$ $B = n(n+2)(4n+1)$ $C = (n+1)(2n^2 + 4n + 3)$ $D = 6$
10		$A = n(n+1)(2n+1)/3$ $B = n$ $C = n+1$ $D = 2$
11 [8]		$A = n(n+1)(2n+7)/3$ $B = n$ $C = n+1$ $D = 2$
12		$A = 8n(n+1)(2n+1)/3$ $B = 0$ $C = 2n+1$ $D = 2$
13 [9]		$A = \frac{2n(4+3n+2n^2) + 3(1-(-1)^n)}{12}$ $B = 0$ $C = (2n+1)/4$ $D = 1$
14 [10]		$A = n(2n+5)(n+2)(n+1)/3$ $B = n(n+4)$ $C = (n+1)^2$ $D = 2$

Так как в разных фермах под числом n подразумеваются разные понятия: в одних n – число панелей в половине пролёта, в других n – число однотипных панелей в половине пролёта за исключением крайних или центральных панелей, то, для того чтобы сравнивать фермы одинакового пролёта и высоты, необходимо сделать замену переменных согласно табл. 2.

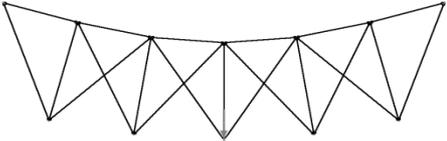
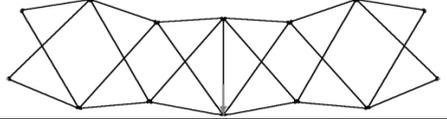
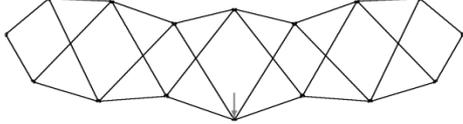
Таблица 2

Арочные фермы		
1	$a = \frac{L}{2(n+1)}$	$b = \frac{H}{n}$
Балочные фермы		
2-6	$a = L/(2n)$	$b = H$
7	$a = L/(2n)$	$b = H - e$
8	$a = L/(2n)$	$h = \frac{H}{n+1}$
Решетчатые фермы		
9-11	$a = \frac{L}{2(n+1)}$	$b = H$
12	$a = \frac{L}{2(2n+1)}$	$b = H$
13	$a = \frac{L}{2n+1}$	$h = \frac{H}{2}$
14	$a = \frac{L}{2(n+1)}$	$b = H$

Для дополнительной проверки формул в многофункциональном программном комплексе Lira [17], который предназначен для проектирования и расчета строительных и машиностроительных конструкций, были смоделированы соответствующие фермы с параметрами: $EF = 1000 \text{ кг}$, $P = 1 \text{ кг}$,
 $a = 2 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, $n = 3$.

Для всех типов приведенных ферм выявлено полное совпадение численного решения программного комплекса Lira и численного решения на основе аналитических формул. Приведем наиболее интересные формы деформированного состояния ферм и величины прогиба в точках приложения сил, полученные численно по программе Lira (табл. 3).

Таблица 3

№	Общий вид в деформируемом состоянии	Пролет, L , м	Прогиб, мм
5		12	107.032
6		12	19.2565
13		14	23.3363

Построим на основе аналитических формул графики относительного вертикального прогиба фермы ($\tilde{\Delta} = \Delta EF/P$) для конструкций одинакового пролета $L = 20 \text{ м}$ и одинаковой высоты $H = 3 \text{ м}$ – см. рис. 1-4.

На рисунках даны сравнительные кривые для прогиба в зависимости от числа панелей. В найденных зависимостях обнаруживается минимум, что позволяет выбрать не только рациональное число панелей, но и тип фермы. Часть кривых пересекается, следовательно, на разных интервалах значений n меньшим прогибом (большой жесткостью) обладают различные типы ферм.

Заметим, что с увеличением числа панелей величина прогиба устремляется к некоторой предельной величине (табл. 4).

Для больших значений n , очевидно, меньшими деформациями обладает арочная ферма, прогиб которой стремится к константе, а прогибы остальных конструкций с разной степенью возрастают. Наибольший прогиб характерен для фермы №8.

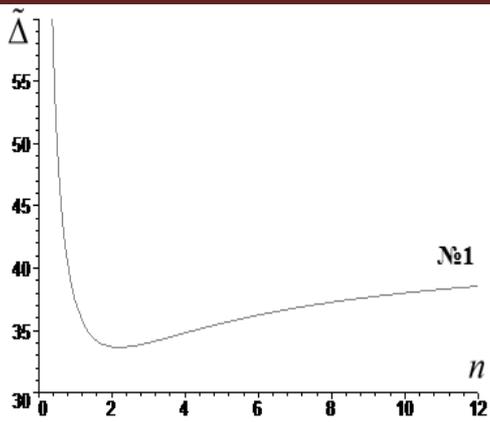


Рис. 1

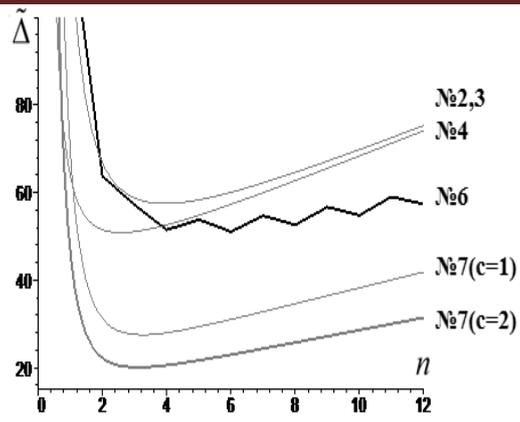


Рис. 2

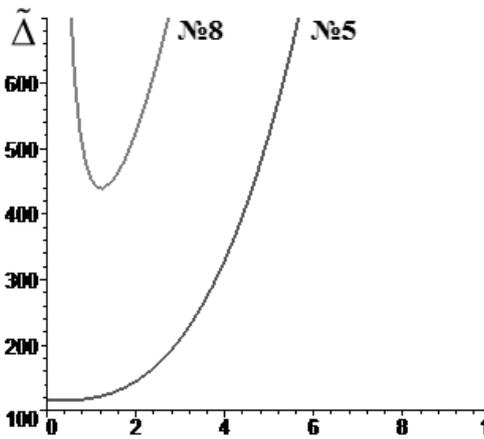


Рис. 3

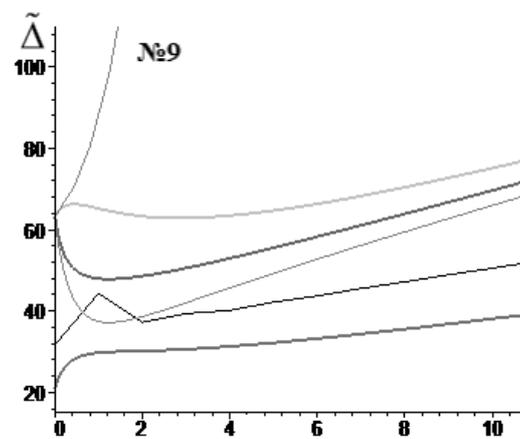


Рис. 4

Таблица 4

Арочные фермы	
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta = \frac{1}{24} \frac{P}{EF} \frac{(L^2 + 4H^2)^{3/2}}{H^2}$
Балочные фермы	
2-4	$\lim \frac{\Delta}{n} = \frac{HP}{EF}$
5	$\lim \frac{\Delta}{n^3} = \frac{HP}{EF}$
6	$\lim \frac{\Delta}{n} = \frac{1}{2} \frac{HP}{EF}$
7	$\lim \frac{\Delta}{n} = \frac{P}{EF} \frac{(b^2 - be + e^2)}{(b + e)}$
8	$\lim \frac{\Delta}{n^2} = \frac{1}{24} \frac{P}{EF} \frac{(L^2 + 4H^2)^{3/2}}{H^2}$
Решетчатые фермы	
9	$\lim \frac{\Delta}{n^3} = \frac{HP}{EF}$

10-12	$\lim \frac{\Delta}{n} = \frac{HP}{EF}$
13, 14	$\lim \frac{\Delta}{n} = \frac{1}{2} \frac{HP}{EF}$

При одинаковой топологии ферм №11 и №14 под точечной нагрузкой прогиб больше, чем под распределенной нагрузкой – ферма №14. Для данной топологии прогиб в пределе различается в два раза.

Заметим, что найденные оптимальные величины однотипных панелей при заданных геометрических параметрах не гарантируют физическую возможность существования и безопасную работоспособность конструкции. Для полноценного расчета необходимо также проверить элементы на прочность, а сжатые дополнительно – на устойчивость [13].

Метод индукции, примененный в рассмотренных работах, применим также для минимизации массы конструкции или даже минимизации отношения прогиба к массе. Аналитические решения для прогиба плоских статических определимых ферм даны также в работах [14-16].

Заключение

Символьные вычисления значительно медленнее с ростом сложности системы, чем при численном анализе. Но для регулярных конструкций символьные вычисления и индуктивный метод позволяют получить формулу, которая годится без ограничения для ферм с произвольным числом стержней.

Заметим, что существует генетический метод решения некоторых задач о ферме [11, 18, 19], матричный [20], а также метод на основе поисковой системы [21], где метод индукции может быть также полезен.

Литература

1. Сайтулаев Г.Р. Расчет регулярных стержневых систем на примере арочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014.С. 128-130.
2. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 21-22.
3. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой//Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 34-36.
4. Дегтярев Н.Р., Троцило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С.52-54.
5. Ерзунов И.А., Гудожников Р.А. Прогиб плоской статически определимой шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 4. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 55-56.
6. Дзэбиев А.А., Черепанов С.П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы. //Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 63-64.

7. Шикин К.С., Китаев С.С. Деформация составной балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 154-155.
8. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С.15-16.
9. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №4. С. 9-12.
10. Лебедев А.В. Аналитическое исследование деформации составной фермы с прямоугольной решеткой под действием равномерной нагрузки. // Наука и образование в жизни современного общества: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 30 апреля 2015 г.: Часть 13. Тамбов, 2015. С. 93-94.
11. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60-63.
12. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014, N 6. с. 2-6.
14. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
15. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4 (255). С. 9-13.
16. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5(31). С. 38-42.
17. Городецкий Д.А., Барабаш М.С., Водопьянов Р.Ю., Туток В.П., Артамонова А.Е. ЛИРА-САПР 2013. Учебное пособие. Изд-во Москва, 2013. 376 с.
18. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA // Procadia Technology. 2014. No 12. pp. 339-346.
19. Finotto V.C., Silva W.R.L., Valasek M., Stemberk P. Hybrid fuzzy-genetic system for optimising cabled-truss structures// Advances in Engineering Software, Vol.62–63. 2013. pp. 85-96
20. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617.
21. Kaveh A., Mirzai B., Jafarvand A. An improved magnetic charged system search for optimization of truss structures with continuous and discrete variables // Applied Soft Computing. Vol. 28. 2015. pp. 400-410.

References

1. Saypulayev, G.R. (2014). Raschet regulyarnykh sterzhnevyykh sistem na primere arochnoy fermy, *Aktualnyye Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30 sentyabrya 2014 g.*: Chast 4. Tambov: ООО «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 128-130.
2. Baderidinov, R.R. (2014). Formula dlya progiba ploskoy balochnoy fermy, *Aktualnyye Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30 sentyabrya 2014 g.*: Chast 7. Tambov: ООО «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 21-22.
3. Zhaketov, D.D., Yatskov, V.B. (2014). Progib ploskoy balochnoy fermy s treugolnoy reshetkoy, *Nauka i Obrazovaniye v XXI Veke: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g.*: Chast 7. Tambov: ООО «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 34-36.
4. Degtyarev, N.R., Troshchilo, A.P. (2014). Progib balochnoy fermy shprengelnogo tipa, *Aktualnyye Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30 sentyabrya 2014 g.*: Chast 10. Tambov: ООО «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p.52-54.

5. Yezunov, I.A., Gudozhnikov, R.A. (2014). Progib ploskoy staticheski opredelimoj shprengelnoj fermy s proizvolnym chislom paneley, *Nauka i Obrazovaniye v XXI Veke: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g.*: Chast 4. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 55-56.
6. Dzabiyev A.A., Cherepanov S.P. (2014). Formuly dlya rascheta progiba arochnoy fermy, *Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Teoreticheskij i metodicheskij aspektj: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 maya 2014 g.*: Chast 4. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 63-64.
7. Shikin, K.S., Kitayev, S.S. (2014). Deformatsiya sostavnoj balochnoy fermy shprengelnogo tipa, *Aktualnyye Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30 sentyabrya 2014 g.*: Chast 7. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p. 154-155.
8. Afanasyev, V.A., Boyko, O.O. (2014). Progib sostavnoj ploskoy balochnoy fermy s parallelnymi poyasami, *Aktualnyye Voprosy Obrazovaniya i Nauki: Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30 sentyabrya 2014 g.*: Chast 10. Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom», p.15-16.
9. Kirsanov, M.N. (2014). Skrytaya osobennost i asimptoticheskiye svoystva odnoj ploskoy balochnoy fermy, *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, №4, p. 9-12.
10. Lebedev, A.V. (2015). Analiticheskoye issledovaniye deformatsii sostavnoj fermy s pryamougolnoy reshetkoy pod deystviyem ravnomernoy nagruzki, *Nauka i Obrazovaniye v Zhizni Sovremennogo Obshchestva: Sb. nauch. tr. po materialam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 aprelya 2015 g.*: Chast 13. Tambov, p. 93-94.
11. Kirsanov, M.N. (2010). Geneticheskij algoritm optimizatsii sterzhnevnykh system, *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, №2, p. 60-63.
12. Kirsanov, M.N. (2011). *Praktika Programirovaniya v Sisteme Maple*, Moscow: Izdatelskiy dom MEI, 208 p.
13. Kirsanov, M.N. (2014). Analiticheskij raschet mnogoreshchatoy fermy, *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, No 6, p. 2-6.
14. Kirsanov, M.N. (2015). Analiticheskoye issledovaniye deformatsiy ploskoy fermy arochnogo tipa, *Vestnik Gosudarstvennogo Universiteta Morskogo i Rechnogo Flota im. Admirala S. O. Makarova*, № 3 (31), p. 42-48.
15. Kirsanov, M.N. (2014). Skrytaya osobennost i asimptoticheskiye svoystva odnoj ploskoy balochnoy fermy, *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*, № 4 (255), p. 9-13.
16. Kirsanov, M.N. (2012). Induktivnyy analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost i prochnost ploskoy fermy, *Inzhenerno-Stroitelnyy Zhurnal*, № 5(31), p. 38-42.
17. Gorodetskiy, D.A., Barabash, M.S., Vodopyanov, R.Yu., Titok, V.P., Artamonova, A.Ye. (2013). *LIRA-SAPR 2013. Uchebnoye Posobiye*, Izd-vo Moskva, 376 p.
18. Cazacu, R., Grama, L. (2014). Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA, *Procadia Technology*, No 12, pp. 339-346.
19. Finotto, V.C., Silva, W.R.L., Valasek, M., Stemberk, P. (2013). Hybrid fuzzy-genetic system for optimising cabled-truss structures, *Advances in Engineering Software*, Vol.62–63, pp. 85-96.
20. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. (2005). Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 85, No. 9, p. 607 – 617.
21. Kaveh, A., Mirzai, B., Jafarvand, A. (2015). An improved magnetic charged system search for optimization of truss structures with continuous and discrete variables, *Applied Soft Computing*, Vol. 28, pp. 400-410.

THE ANALYSIS OF NICE CALCULATIONS FOR DISPLACEMENTS OF REGULAR JOINT-AND-ROD STRUCTURES

D.V. Tinkov

OAO «GosMKB „Raduga“ im. A.Ya. Berezhnyaka», Dubna

The exact analytical expressions for deflection of plane truss structures of various kinds are presented. Deflection of trusses calculated by the formula of the Maxwell-Mohr on the assumption of elastic elements of its work and with the help of the method of induction on the number of panels is given. A comparative analysis with known solutions is given too. We study the quantitative and qualitative features of solutions. Identifies characteristics and limits on the number of panels characteristics are shown. Research carried out with the support of the computer mathematic program Marle in symbolic form. For comparison, solutions and test were made with using a multifunctional software package Lira, which is intended for the design and calculation of building and engineering structures.

KEY WORDS: plane truss, deflection, analytical solution, induction, Maple, Lira.