

Теория упругости

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНИКА В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В.К. МУСАЕВ, доктор технических наук, профессор,
Е.В. ДИКОВА, С.В. АКАТЬЕВ, В.В. СТАРОДУБЦЕВ, С.Н. САМОЙЛОВ
Московский государственный машиностроительный университет,
107023, г. Москва, ул. Б. Семеновская, 38, Россия; musayev-vk@yandex.ru

Приводится информация о достоверности и точности результатов численного моделирования волн напряжений в сплошной деформируемой среде. Поставленная задача реализуется с помощью метода конечных элементов в перемещениях. Сопоставление производится с результатами аналитического решения на фронте плоской продольной упругой волны. Исследуемая задача представлена в виде полуплоскости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: краевая задача, дифференциальные уравнения в частных производных, задача с начальными условиями, математическое моделирование, метод конечных элементов, нестационарные волны напряжений, явная двухслойная схема, аналитическое решение, сопоставление, достоверность, полуплоскость, фронт волны, дельта функция, импульсное воздействие в виде треугольника.

В настоящее время активно применяются численные методы для решения различных задач нестационарной механики деформируемого твердого тела. Однако при решении сложных задач возникают проблемы оценки достоверности полученных результатов. На основании изложенного можно утверждать,

что оценка точности и достоверности результатов численного моделирования волн напряжений в областях сложной формы является актуальной фундаментальной и прикладной научной задачей.

Некоторые вопросы в области постановки, разработки методики и алгоритма и результаты решенных нестационарных динамических задач рассмотрены в работах [1–11].

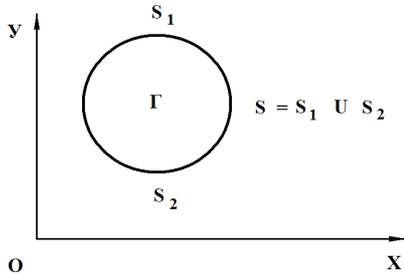


Рис. 1. Некоторое тело Γ в прямоугольной декартовой системе координат XOY

Для решения задачи о моделировании нестационарных волн напряжений в упругих деформируемых средах рассмотрим некоторое тело Γ (рис. 1) в прямоугольной декартовой системе координат XOY , которому в начальный момент времени $t = 0$ сообщается механическое воздействие. Предположим, что тело Γ изготовлено из однородного изотропного материала, подчиняющегося упругому закону Гука при малых упругих деформациях.

Для решения двумерной плоской динамической задачи теории упругости с начальными и граничными условиями – используем метод конечных элементов в перемещениях. Задача решается методом сквозного счета, без выделения разрывов. Чтобы выполнить динамический расчет методом конечных элементов, нужно иметь матрицу жесткости и матрицу инерции конечного элемента.

Принимая во внимание определение матрицы жесткости, вектора инерции и вектора внешних сил для тела Γ , записываем приближенное значение уравнения движения в теории упругости

$$\bar{H}\ddot{\bar{\Phi}} + \bar{K}\dot{\bar{\Phi}} = \bar{R}, \quad \dot{\bar{\Phi}}|_{t=0} = \dot{\bar{\Phi}}_0, \quad \bar{\Phi}|_{t=0} = \bar{\Phi}_0, \quad (1)$$

где: \bar{H} – матрица инерции; \bar{K} – матрица жесткости; $\bar{\Phi}$ – вектор узловых упругих перемещений; $\dot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих скоростей перемещений; $\ddot{\bar{\Phi}}$ – вектор узловых упругих ускорений; \bar{R} – вектор узловых упругих внешних сил. Соотношение (1) – система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в перемещениях с начальными условиями для решения волновых задач в деформируемых областях сложной формы. Таким образом, с помощью метода конечных элементов в перемещениях, линейную задачу с начальными и граничными условиями привели к линейной задаче Коши (1). Для интегрирования уравнения с начальными условиями (1) конечноэлементным вариантом метода Галеркина приведем его к следующему виду:

$$\bar{H} \frac{d}{dt} \dot{\bar{\Phi}} + \bar{K} \bar{\Phi} = \bar{R}, \quad \frac{d}{dt} \bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}}. \quad (2)$$

Интегрируя по временной координате соотношение (2) с помощью конечноэлементного варианта метода Галеркина, получим двумерную явную двухслойную конечноэлементную линейную схему в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек

$$\dot{\bar{\Phi}}_{i+1} = \dot{\bar{\Phi}}_i + \Delta t \bar{H}^{-1} (-\bar{K} \bar{\Phi}_i + \bar{R}_i), \quad \bar{\Phi}_{i+1} = \bar{\Phi}_i + \Delta t \dot{\bar{\Phi}}_{i+1}, \quad (3)$$

где Δt – шаг по временной координате. Основные соотношения метода конечных элементов в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений и конечноэлементного варианта метода Галеркина.

Рассмотрим устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

Система уравнений (3) для внутренних и граничных узловых точек, полученная в результате интегрирования уравнения движения теории упругости, должна давать решение, сходящееся к решению исходной системы (1). Шаг по временной переменной Δt определяем из следующего соотношения

$$\Delta t = k \frac{\min \Delta l_i}{C_p} \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

где Δl – длина стороны конечного элемента.

Результаты численного эксперимента показали, что при $k = 0,5$ обеспечивается устойчивость двумерной явной двухслойной конечноэлементной линейной схемы в перемещениях для внутренних и граничных узловых точек на квазирегулярных сетках.

На основе метода конечных элементов в перемещениях разработаны алгоритм и комплекс программ для решения линейных плоских двумерных задач, которые позволяют решать сложные задачи при нестационарных динамических воздействиях на сооружения. при разработке комплекса программ использовался алгоритмический язык фортран-90.

Исследуемая область разбивается по пространственным переменным на треугольные конечные элементы с тремя узловыми точками и на прямоугольные конечные элементы с четырьмя узловыми точками. по временной переменной исследуемая область разбивается на линейные конечные элементы с двумя узловыми точками.

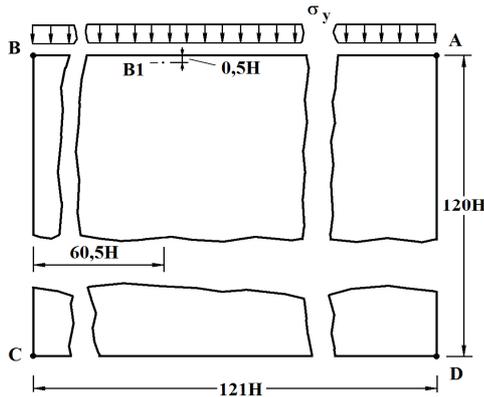


Рис. 2. Постановка задачи о распространении плоских продольных волн в упругой полуплоскости

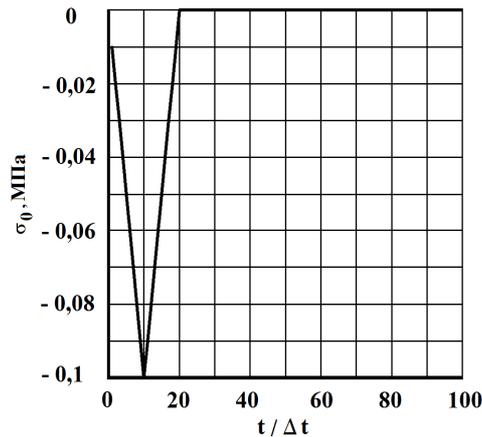


Рис. 3. Импульсное воздействие в виде треугольника

Некоторая информация о физической достоверности результатов разработанного численного метода, алгоритма и комплекса программ рассмотрена в следующих работах [3–6, 8–9, 11].

Рассмотрим задачу о воздействии плоской продольной волны на упругую полуплоскость (рис. 2, 3). На границе полуплоскости AB приложено нормальное напряжение σ_y , которое при $0 \leq n \leq 10$ ($n = t/\Delta t$) изменяется линейно от 0 до P , а при $10 \leq n \leq 20$ от P до 0 ($P = \sigma_0$, $\sigma_0 = -0,1$ МПа (-1 кгс/см²)). Граничные условия для контура $BCDA$ при $t > 0$ $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Отраженные волны от контура $BCDA$ не доходят до исследуемых точек при $0 \leq n \leq 100$. Исследуемая расчетная область имеет 14762 узловых точек и 14520 конечных элементов. Решается система уравнений из 59048 неизвестных.

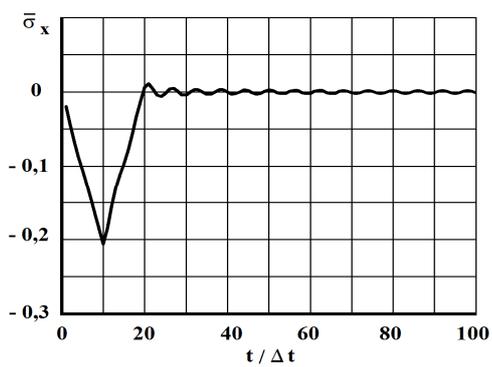


Рис. 4. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени n в точке BI

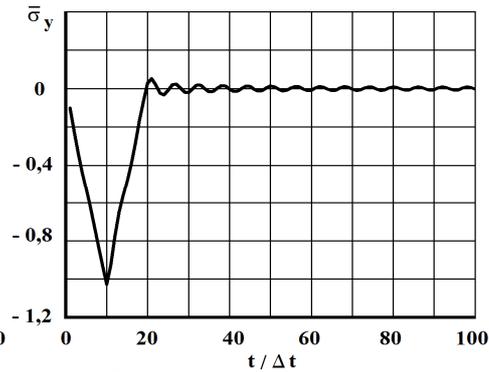


Рис. 5. Изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени n в точке BI

На рис. 4 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_x$ во времени n в точке BI ($\bar{\sigma}_x = \sigma_x / |\sigma_0|$). На рис. 5 представлено изменение нормального напряжения $\bar{\sigma}_y$ во времени n в точке BI ($\bar{\sigma}_y = \sigma_y / |\sigma_0|$).

В данном случае можно использовать условия на фронте плоской волны, которые изложены в работе [1].

Предположим, что от некоторых точек упругой среды производится какое-то возмущение. На фронте плоской продольной волны имеются следующие аналитические зависимости для плоского напряженного состояния $\sigma_y = -|\sigma_0|$ и $\sigma_x = -\nu|\sigma_0|$. Для упругих нормальных напряжений σ_x и σ_y имеется хорошее качественное и количественное согласование с результатами точного решения. Сравнение результатов нормальных напряжений, полученных с помощью метода конечных элементов в перемещениях, при решении задачи о распространении плоских продольных нестационарных упругих волн в полуплоскости с результатами аналитического решения, показало хорошее совпадение.

Л и т е р а т у р а

1. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
2. Мусаев В.К. Математическое моделирование упругих волн напряжений в сложных деформируемых телах // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Проблемы комплексной безопасности». – 2007. – № 1. – С. 62–76.
3. Мусаев В.К. Оценка достоверности и точности результатов вычислительного эксперимента при решении задач нестационарной волновой теории упругости // Научный журнал проблем комплексной безопасности. – 2009. – № 1. – С. 55–80.
4. Мусаев В.К., Ситник С.В., Тарасенко А.А., Ситник В.Г., Зюбина М.В. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 9 (часть 7). – С. 1466–1470.
5. Мусаев В.К., Ситник С.В., Тарасенко А.А., Ситник В.Г., Зюбина М.В. Математическое моделирование отражения нестационарных упругих волн напряжений в виде треугольного импульса от свободной поверхности пластинки // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11(11). – С. 2375–2379.
6. Мусаев В.К. О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 3. – С. 71–76.
7. Мусаев В.К. Моделирование нестационарных упругих волн напряжений в деформируемых областях с помощью метода конечных элементов в перемещениях // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12 (1). – С. 28–32.
8. Мусаев В.К. Оценка достоверности численного моделирования нестационарных упругих волн напряжений в областях сложной формы // Материалы Всероссийской

конференции «Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред. Успехи, проблемы, перспективы». – М.: ИПРИМ РАН, 2015. – С. 94–103.

9. *Musaev V.K.* О достоверности результатов математического моделирования нестационарных волн напряжений в объектах сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2014. – № 3. – С. 71–76.

10. *Musayev V.K.* Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area // *International Journal of Applied and Fundamental Research*. – 2014. – № 2; URL: www.science-sd.com/457-24639.

11. *Musayev V.K.* Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2015. – Vol. 11, Iss. 1. – P. 135–146.

References

1. *Timoshenko, S.P., Gud'er, D.* (1975). *Teoriya Uprugosti*, Moscow: "Nauka", 576 p.
2. *Musaev, V.K.* (2007). Matematicheskoe modelirovanie uprugih voln napryazhenij v slozhnyh deformiruemyh telah, *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Seriya "Problemy kompleksnoj bezopasnosti"*, № 1, p. 62–76.
3. *Musaev, V.K.* (2009). Otzenka dostovernosti i tochnosti rezul'tatov vychislitel'nogo eksperimenta pri reshenii zadach nestacionarnoj volnvoj teorii uprugosti, *Nauchnyj zhurnal problem kompleksnoj bezopasnosti*, № 1, p. 55–80.
4. *Musaev, V.K., Sitnik, S.V., Tarasenko, A.A., Sitnik, V.G., Zyubina, M.V.* (2014). Matematicheskoe modelirovanie otrazheniya nestatzionarnyh uprugih voln napryazhenij v vide treugol'nogo impul'sa ot svobodnoj poverxnosti plastinki, *Fundamental'nye Issledovaniya*, № 9 (chast' 7), p. 1466–1470.
5. *Musaev, V.K., Sitnik, S.V., Tarasenko, A.A., Sitnik, V.G., Zyubina, M.V.* (2014). Matematicheskoe modelirovanie otrazheniya nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij v vide treugol'nogo impul'sa ot svobodnoj poverxnosti plastinki, *Fundamental'nye Issledovaniya*, № 11 (11), p. 2375–2379.
6. *Musaev, V.K.* (2014). O dostovernosti rezul'tatov matematicheskogo modelirovaniya nestacionarnyh voln napryazhenij v ob'ektax slozhnoj formy, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 3, p. 71–76.
7. *Musaev, V.K.* (2014). Modelirovanie nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij v deformiruemyh oblastiakh s pomoschyu metoda konechnyh elementov v peremescheniyah, *Sovremennye Naukoemkie Tehnologii*, № 12 (1), p. 28–32.
8. *Musaev, V.K.* (2015). Otzenka dostovernosti chislennogo modelirovaniya nestacionarnyh uprugih voln napryazhenij v oblastiakh slozhnoj formy, *Materialy Vserossijskoj Konferencii «Mehanika i Nanomehanika Strukturno-Slozhnyh i Geterogennyh Sred. Uspehi, Problemy, Perspektivy»*, Moscow: IPRIM RAN, p. 94–103.
9. *Musaev, V.K.* (2014). O dostovernosti rezul'tatov matematicheskogo modelirovaniya nestacionarnyh voln napryazhenij v ob'ektax slozhnoj formy, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 3, p. 71–76.
10. *Musayev, V.K.* (2014). Modeling of non-stationary of stress waves in solid deformable bodies complex area, *International Journal of Applied and Fundamental Research*, № 2; URL: www.science-sd.com/457-24639.
11. *Musayev, V.K.* (2015). Estimation of accuracy of the results of numerical simulation of unsteady wave of the stress in deformable objects of complex shape, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 11, Iss. 1, p. 135–146.

EVALUATION OF THE ACCURACY OF NUMERICAL SIMULATION RESULTS WHEN SOLVING THE PROBLEM OF PROPAGATION OF PULSE EXPOSURE IN THE FORM OF A TRIANGLE IN AN ELASTIC HALF-PLANE

Musayev V.K., Dikova E.V., Akat'ev S.V., Starodubtsev V.V., Samoylov S.N.
Moskovskiy Gosudarstvennyy Mashinostroitel'nyy Universitet, Moscow

Information about the reliability and accuracy of the results of numerical simulation of stress waves in solid deformable environment is presented. The task is implemented using the finite element method in displacements. The comparison with results of the analytical solution on the front plane longitudinal elastic wave is made. The studied problem is presented in the form of a half-plane.

KEY WORDS: boundary value problem, differential equations in partial derivatives, the problem with the initial conditions, mathematical modeling, finite element method, transient wave of voltage, an explicit two-layer scheme and the analytical solution, comparison, accuracy, half-plane, the wave front, the Delta function pulse effect in the form of a triangle.