

**Расчет машиностроительных конструкций**

**РАСЧЕТ КОНТАКТНЫХ ДАВЛЕНИЙ НА РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ  
ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ**

Ю.В. БЕЛОУСОВ, канд. техн. наук, доцент

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

*В статье рассмотрены вопросы расчета зубьев цилиндрических передач на контактную прочность. Проведён сравнительный анализ контактных давлений на разных участках линии зацепления.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** контактные давления, кромочный контакт, полюс зацепления.

Зубчатые передачи между параллельными валами осуществляются цилиндрическими колесами с прямыми, косыми или шевронными зубьями. Прямозубые колеса применяют преимущественно в планетарных передачах, в открытых передачах, а также при необходимости осевого перемещения колес в коробках передач. Наиболее распространенный вид разрушения зубьев цилиндрических передач – это выкрашивание их рабочих поверхностей, которое иногда называют питтингом. Этот вид разрушения обычен для закрытых передач, при работе которых в зоне контакта возникает высокое давление. Наибольшую опасность представляет прогрессирующее выкрашивание, которое является следствием усталости рабочей поверхности зубьев. В зоне контакта в каждой точке рабочей части зуба давление изменяется по прерывистому отнулевому циклу, поэтому в поверхностных слоях возможны усталостные повреждения. Высокие контактные напряжения – одна из наиболее важных причин разрушения рабочих поверхностей зубьев [1, 4].

В расчётах на сопротивление усталости контактные напряжения принято определять на линии контакта зубьев, совпадающей с полюсом зацепления [1]. Контакт двух зубьев рассматривается как контакт двух цилиндров с радиусами равными радиусам кривизны  $R_1, R_2$  профилей зубьев в полюсе зацепления. Решение симметричной задачи с начальным контактом вдоль прямой линии совпадает с решением Герца, которое можно представить в виде [2]:

$$p(x) = p_0 a^{-1} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a = \sqrt{P(\theta_1 + \theta_2)A^{-1}}, \quad p_0 = p(0) = 2P(\pi a)^{-1}, \\ \theta_{1,2} = 2(1 - \nu_{1,2}^2)(\pi E_{1,2})^{-1}, \quad A = A^+ = A^- = 0.5[f_1''(0) + f_2''(0)],$$

где  $p_0$  – наибольшее контактное давление, МПа;  $a$  – полуширина полосы контакта, м;  $P$  – сжимающая сила, отнесённая к единице длины, Н/м;  $\theta_{1,2}, \nu_{1,2}$  – упругая постоянная коэффициент поперечной деформации первого и второго цилиндров;  $E_{1,2}$  – модуль продольной упругости первого и второго цилиндров, МПа;  $A^+, A^-$  – полусумма кривизны первого и второго цилиндров справа и слева от точки начального контакта,  $m^{-1}$ ;  $f_1''(0), f_2''(0)$  – кривизна первого и второго цилиндров,  $m^{-1}$ .

Рабочие поверхности зубьев выкрашиваются, в первую очередь, на ножках вблизи полюсной линии. Там возникает контакт цилиндров в начале и конце зацепления: на ножках зубьев шестерни при входе в зацепление и на ножках зубьев колеса при выходе из зацепления. В этих точках один из цилиндров, имитирующий боковую поверхность зубьев, выполнен со срезом у начала координат (рис. 1).

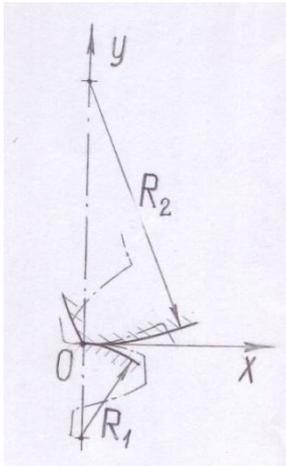


Рис. 1. Схема контакта в начале зацепления зубьев цилиндрических колес

Подобный контакт обычно имеет место при больших погрешностях изготовления (например, для колес 8-й и более низкой степени точности), деформации или износе элементов передачи. Он возникает даже в точной передаче, так как довольно часто шаг зубьев шестерни с учётом их деформации бывает меньше шага зубьев колеса [3].

Вершина зуба представляет собой не угловую точку, а некоторый участок с малым радиусом закругления  $r$ . Для этого контакта полусумма кривизны сопрягаемых поверхностей справа и слева от точки начального контакта определяется по формулам:

$$A^+ = 0.5[1/R_1 + 1/R_2](x > 0),$$

$$A^- = 0.5[1/r + 1/R_{1,2}](x < 0).$$

Распределение давления в зоне контакта несимметрично относительно точки начального контакта. Решение несимметричной задачи с начальным контактом вдоль прямой линии можно представить в виде [2]:

$$p_{\max} = 0.333k_{\max}(\sin\varphi_0)^{-1}\sqrt{PA^-E[(A^+/A^- - 1)\operatorname{tg}\varphi_0]^{-1}};$$

$$\operatorname{inv}\varphi_0 = \pi(A^+/A^- - 1)^{-1};$$

$$k = \sin\varphi[(A^+/A^-)\varphi_0 + \pi - \varphi_0] + (\cos\varphi - \cos\varphi_0)(A^+/A^- - 1) \times$$

$$\times \ln \left| \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \left( \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right)^{-1} \right|; \cos\varphi = x/a + \cos\varphi_0.$$

Смещение середины полосы контакта  $\delta = -a\cos\varphi_0$ . Вычисление  $k_{\max}$  по приведенной выше формуле достаточно трудоёмко. Расчёты показали, что для  $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi k_{\max}$  можно представить в виде полинома:

$$k_{\max} = -2.743(A^+/A^-)^2 + 5.402(A^+/A^-) + 0.304. \quad (1)$$

Погрешность определения  $k_{\max}$  по формуле (1) не превышает 1%.

Максимальное давление при контакте зубчатых колес в полюсе зацепления можно определить по формуле:  $p_0 = 0.59\sqrt{PAE}$ . Тогда

$$p_{\max}/p_0 = 0.564 k_{\max}(\sin\varphi_0)^{-1}\sqrt{(A^-/A)[(A^+/A^- - 1)\operatorname{tg}\varphi_0]^{-1}}. \quad (2)$$

Чтобы представить выражение (2) в более удобном виде, найдем отношения  $A/A^+$  и  $A^+/A^-$ . В начале зацепления зубьев для передач без смещения производящего контура геометрические параметры зоны контакта можно представить в виде:  $A = (1 + u)(mz_1\sin\alpha)^{-1}$ ;

$$R_1 = R_{1,\min} = 0.5m[z_1\sin\alpha(1 + u) - t]; R_2 = R_{2,\max} = 0.5mt;$$

$$A^+ = z_1\sin\alpha(1 + u)\{mt[z_1\sin\alpha(1 + u) - t]\}^{-1};$$

$$A^- = \{1 + (0.5 m/r)[z_1\sin\alpha(1 + u) - t]\}\{m[z_1\sin\alpha(1 + u) - t]\}^{-1};$$

$$A/A^+ = t[z_1\sin\alpha(1 + u) - t][(z_1\sin\alpha)^2u]^{-1};$$

$$A^+/A^- = z_1\sin\alpha(1 + u)t^{-1}\{1 + (0.5 m/r)[z_1\sin\alpha(1 + u) - t]\}^{-1};$$

$$t = \sqrt{(z_1u\sin\alpha)^2 + 4(1 + uz_1)},$$

где  $m$  – модуль зацепления, мм;  $\alpha$  – угол зацепления ( $\alpha = 20^\circ$ );  $z_1$  – число зубьев шестерни (ведущее звено);  $u$  – передаточное отношение.

Закругление головки зуба обработке не подвергается. Исключение может составлять шевингование, когда при кромочном контакте с инструментом (шевером) вершина зуба притупляется. Максимальный радиус закругления головки зуба  $r$  с учётом приработки и износа может быть найден по формуле:

$$r_{\max} = S_a \cos\alpha_a [2(1 - \sin\alpha_a)]^{-1},$$

где  $\alpha_a$  – угол профиля эвольвенты у вершины зуба шестерни или колеса, град.;  $S_a$  – толщина вершины зуба шестерни или колеса, мм.

Так как угол профиля  $\alpha_{a_{1,2}} = \arccos[z_{1,2} \cos \alpha / (z_{1,2} + 2)] \approx \alpha$ , а толщина вершины зуба  $S_a \geq 0.25m$  [1], то  $r_{\max} \geq 0.179 m$  ( $r_{\max} \approx 0.2m$ ).

Отношения  $A/A^+$  и  $A^+/A^-$  зависят от числа зубьев шестерни  $z_1$ , передаточного отношения  $u$  и угла зацепления  $\alpha$ . При  $z_1 = 20 \dots 30$ ,  $u = 2 \dots 4$  и  $\alpha = 20^\circ$   $A/A^+ = 0.254 \dots 0.611$ , а  $A^+/A^- = 0.086 \dots 0.226$ , что соответствует углу  $\varphi_0 = 116^\circ \dots 131^\circ$ . Тогда, используя формулы (1) и (2), получим, что  $p_{\max}/p_0 = 2.71 \dots 3.07$  (в среднем 2.89).

Наиболее сильно на  $p_{\max}/p_0$  влияет передаточное отношение  $u$ , с увеличением которого данная величина возрастает. Число зубьев шестерни  $z_1$  на отношение  $p_{\max}/p_0$  практически не влияет. На рис. 2 показана эпюра давления в начале зацепления зубьев при  $\varphi_0 = 120^\circ$  ( $z_1 = 21, u = 2, m = 3$  мм), построенная в безразмерных координатах. Контактное давление определялось по формуле:  $p = 0.32k\sqrt{PE}$ . По вертикальной оси отложено значение  $p/\sqrt{PE}$ . Такое распределение давления опасно с точки зрения износостойкости и контактной прочности зубьев вследствие больших давлений на левой границе участка контакта ( $x < 0$ ). При периодических нагрузках высокие напряжения на ножке зуба часто являются причиной возникновения трещин.

В конце зацепления для передач без смещения производящего контура геометрические параметры зоны контакта можно представить в виде:

$$R_1 = R_{1,\max} = 0.5ml; R_2 = R_{2,\min} = 0.5m[z_1 \sin \alpha (1 + u) - l];$$

$$A^+ = z_1 \sin \alpha (1 + u) \{ml[z_1 \sin \alpha (1 + u) - l]\}^{-1};$$

$$A^- = \{1 + 2.5[z_1 \sin \alpha (1 + u) - l]\} \{m[z_1 \sin \alpha (1 + u) - l]\}^{-1};$$

$$A/A^+ = l [z_1 \sin \alpha (1 + u) - l] [(z_1 \sin \alpha)^2 u]^{-1};$$

$$A^+/A^- = z_1 \sin \alpha (1 + u) l^{-1} \{1 + 2.5[z_1 \sin \alpha (1 + u) - l]\}^{-1};$$

$$l = \sqrt{(z_1 \sin \alpha)^2 + 4(1 + z_1)}.$$

При  $z_1 = 20 \dots 30, u = 2 \dots 4$  и  $\alpha = 20^\circ$ ,  $A/A^+ = 1.110 \dots 1.391$ , а  $A^+/A^- = 0.037 \dots 0.076$ , что соответствует углу  $\varphi_0 = 133^\circ \dots 142^\circ$ . Тогда, используя формулы (1) и (2), чим  $p_{\max}/p_0 = 2.24 \dots 2.51$  (в среднем 2.38).

Наибольшее влияние на  $p_{\max}/p_0$  оказывает передаточное отношение  $u$ , с уменьшением которого данная величина возрастает. Число зубьев шестерни  $z_1$  на отношение  $p_{\max}/p_0$  влияет слабее.

В начале зацепления зубьев при кромочном контакте на ножке зуба шестерни контактное давление повышается. Оно превышает максимальное давление в конце зацепления на ножке зуба колеса в среднем в 1.21 раза, поэтому поверхностный слой рабочей поверхности зубьев шестерни должен обладать повышенной прочностью. Контактные

давления в начале и конце зацепления могут превышать давление в полюсе при однопарном зацеплении соответственно в 2.89 и 2.38 раза, при двухпарном зацеплении и распределении нагрузки между парами зубьев близком к равномерному – в 2.04 и 1.68 раза. Причем в полюсе всегда имеет место однопарное зацепление. При однопарном зацеплении вся внешняя нагрузка передается лишь

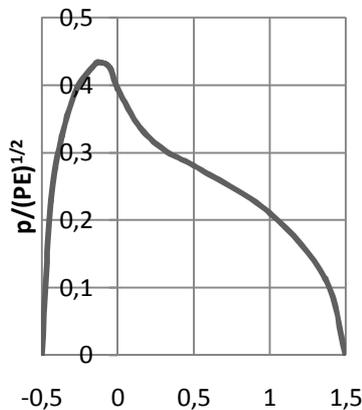


Рис. 2. Эпюра контактных давлений в начале зацепления при  $\varphi_0 = 120^\circ$  ( $z_1 = 21, u = 2, m = 3$  мм)

одной парой зубьев. Такое зацепление характерно для колёс 8-й и более низкой степени точности. Ошибки их изготовления не гарантируют двухпарного зацепления. При двухпарном зацеплении внешняя нагрузка передается двумя парами зубьев, одновременно находящимися в зацеплении.

Даже при двухпарном зацеплении контактные давления в начале и конце зацепления значительно превышают давление в полюсе зацепления. Давления в конце зацепления также очень высокие и при определенных условиях могут доминировать. Принятый в расчётах радиус закругления головки зуба  $r \approx 0.2m$  возможно больше действительного его значения. Однако при меньших радиусах  $r$ , т. е. при большем соотношении  $m/r$ , разница между максимальными давлениями при кромочном контакте и при контакте зубьев в полюсе зацепления возрастает еще больше. Так при уменьшении радиуса  $r$  всего в два раза ( $r \approx 0.1m$ )  $p_{\max}/p_0 = 3.72 \dots 4.08$  в начале зацепления и  $p_{\max}/p_0 = 2.98 \dots 3.34$  в конце зацепления.

В расчётах на контактную прочность зубьев цилиндрических колёс не учитываются высокие кромочные давления в начале и конце зацепления, так как если их положить в основу расчёта, то условия прочности не будут соблюдены даже для нормально работающей передачи. Расчёт зубьев цилиндрических колёс на контактную прочность проводят по наибольшему давлению в полюсе зацепления, так как из этого расчёта определяются также и размеры передачи. Однако именно высокие кромочные давления играют главную роль в поверхностном разрушении зубьев указанных передач. Так как устранить кромочный контакт не всегда возможно, то заданный расчёт не обеспечивает абсолютной прочностной надёжности зубчатых передач. Его можно даже назвать условным.

Один из наиболее распространенных методов снижения кромочного давления в зубчатых передачах – это фланкирование, т. е. модификация профиля головки зуба. Оно применяется в основном лишь для быстроходных передач для исключения кромочного удара при входе зубьев в зацепление. Фланкирование – это выполнение фасок под углом  $0.64^\circ \dots 2.54^\circ$  к профилю эвольвенты на головке зуба. Ширина фасок составляет примерно  $0.45m$ . В результате ножка зуба шестерни в начале и колеса в конце зацепления будут вступать в контакт с плоской поверхностью фланка на головке сопряжённого зуба. Распределение давления в зоне контакта становится симметричным. Для этого контакта полу-сумма кривизны сопрягаемых поверхностей справа и слева от точки начального контакта одинакова:

$$A^+ = A^- = A_\phi = 0.5(1/\infty + 1/R_{1,2}) = 0.5/R_{1,2}.$$

В начале зацепления, когда  $R_1 = R_{1,\min}$  и  $A_\phi = \{m[z_1 \sin\alpha(1 + u) - t]\}^{-1}$ ,

$$p_{\max}/p_0 = \sqrt{A_\phi/A} = \sqrt{z_1 u \sin\alpha \{(1 + u)[z_1 \sin\alpha(1 + u) - t]\}^{-1}}.$$

Для  $z_1 = 20 \dots 30$ ,  $u = 2 \dots 6$  и  $\alpha = 20^\circ$  отношение  $p_{\max}/p_0$  от 1.17 ... 2.11 при однопарном зацеплении и  $p_{\max}/p_0 = 0.83 \dots 1.50$  при двухпарном зацеплении. Максимальное контактное давление увеличивается с уменьшением числа зубьев шестерни  $z_1$  и увеличением передаточного отношения  $u$ , так как уменьшается радиус кривизны эвольвенты шестерни  $R_1$  в зоне контакта. Минимальное значение  $R_1$  достигается при  $z_1 = 20$ ,  $u = 6$  и составляет  $0.658m$ .

В конце зацепления, когда

$$R_2 = R_{2,\min} \text{ и } A_\phi = \{m[z_1 \sin\alpha(1 + u) - l]\}^{-1},$$

$$p_{\max}/p_0 = \sqrt{A_\phi/A} = \sqrt{z_1 u \sin\alpha \{(1 + u)[z_1 \sin\alpha(1 + u) - l]\}^{-1}}.$$

Для  $z_1 = 20 \dots 30$ ,  $u = 2 \dots 6$  и  $\alpha = 20^\circ$  отношение  $p_{\max}/p_0 = 0.40 \dots 0.71$  при однопарном зацеплении. Максимальное контактное давление увеличивается с уменьшением числа зубьев шестерни  $z_1$  и передаточного отношения  $u$ , так как уменьшается радиус кривизны эвольвенты колеса  $R_2$  в зоне контакта. Минимальное значение  $R_2$  достигается при  $z_1 = 20$ ,  $u = 2$  и составляет  $4.542m$ .

Контактные напряжения в конце зацепления уже не представляют опасности и расчёт на прочность зубьев колеса можно выполнять по максимальному давлению в полюсе зацепления. Контактные напряжения в начале зацепления на ножках зубьев шестерни по-прежнему остаются наибольшими. Их максимальное значение превышает давление в полюсе зацепления в среднем в 1.64 раза при однопарном зацеплении и в 1.16 раза при двухпарном. Поэтому расчёт на контактную прочность зубьев шестерни по наибольшему давлению в полюсе зацепления и в этом случае из-за очень высоких давлений в начале зацепления не обеспечивает абсолютной прочностной надёжности зубчатых передач и также может быть назван условным.

Для уточнения существующего метода расчета зубчатых передач необходимо учитывать высокие контактные давления в начале и конце зацепления. При расчете прочности зубьев следует увеличивать допускаемые контактные напряжения за счет повышения предела контактной выносливости и базового числа циклов, т. е. за счет повышения твердости рабочей поверхности зубьев. При этом размеры и масса передачи, согласно существующим расчетным зависимостям, могут быть уменьшены. Допускаемые контактные напряжения можно также увеличить за счет снижения эквивалентной циклической долговечности, т. е. за счет сокращения срока службы передачи.

#### Литература

1. Иванов М.Н., Финогенов В.А. Детали машин: Учебник для машиностроительных спец. вузов. – 11-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 2007. – 408 с.
2. Александров В. М., Ромалис Б. Л. Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 472 с.
3. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: справочник. – 4-е изд., перер. и доп. – М.: Машиностроение, 1993. – 640 с.
4. Hoffman N. P., Stolz U. On transient growth of wear pattern properties// Wear. 2010. V. 268. № 7-8. p. 886-892.

#### References

1. Ivanov, M.N. (2007). *Detalimashin: Uchebnic dlya mashinostroitelnyh spetsialnostej vusow*. 11-e izd., peperab. M.: Vyssh. shk., 408 p.
2. Aleksandrov, V.M., Romalis, B.L. (1986). *Kontaktnye zadachi v mashinostroenii*. M.: Mashinostroenie, 472 p.
3. Birger, I.A., Shorr, B.F., Iosilevich, G.B. (1993). *Raschet na prochnost detalej mashin: spravochnic*. 4-e izd., pererab. i dop. M.: Mashinostroenie, 640 p.
4. Hoffman, N. P., Stolz, U. (2010). On transient growth of wear pattern properties. *Wear*, Vol. 268. № 7-8, p. 886-89.

### CALCULATION CONTACT PRESSURE ON THE WORKING SURFACE OF THE TEETH OF SPURGEARING

Y.V. Belousov

Moscow State Technical University after N. Bauman

In the article, the questions for determination contact compression stress in spur gearing are considered. The quantitative analysis of contact compression pressure on districts of the line of action was made.

KEY WORDS: contact compression pressure, edging contact, pitch point.