Устойчивость стержней и стержневых систем

ДЛИТЕЛЬНАЯ НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.С. ВАРЕНИК, *к.т.н., доцент;*
К.А. ВАРЕНИК, *аспирант*
Новгородский Государственный университет имени Ярослава Мудрого,
173008, Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская д. 138, кв. 503
ozilmen@mail.ru

В работе предлагается решение задачи устойчивости сжатых деревянных элементов с учетом нелинейной ползучести древесины. Используется характеристика ползучести, представляющая собой отношение деформации ползучести к первоначальной мгновенной деформации. Выведено выражение для длительной критической силы.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Деформации ползучести, характеристика ползучести, критическая сила, сжатая колонна, устойчивость

Одно из актуальных направлений в совершенствовании расчетных моделей деревянных конструкций – учет ползучести древесины. В Еврокодах, в теории ползучести широко применяется характеристика ползучести φ(t), представляющая собой отношение деформации ползучести к первоначальной мгновенной деформации:

$$\varphi(t)=\varepsilon_{\Pi}(t)/\varepsilon_{\text{M}}\ .$$

В качестве мгновенной деформации обычно используют модель упругой деформации $\varepsilon_{\text{M}}=\sigma/E_0$, где E_0 – модуль деформации в момент загружения t = 0, σ – приложенное в этот момент времени напряжение.

Использование упругой деформации в качестве мгновенной вносит большие погрешности в результаты расчета. Диаграмма *σ–ε* сжатой древесины является существенно нелинейной. Ее можно представить в виде степенной функции (степень существенного значения не имеет):

$$\sigma=E\varepsilon_{\text{M}}+A_2\varepsilon_{\text{M}}^2+A_3\varepsilon_{\text{M}}^3.$$

Соответствующая обратная зависимость имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{M}}=\frac{1}{E}\sigma+B_2\sigma^2+B_3\sigma^3=\varepsilon_{\text{M}}(\sigma).$$

В этом случае характеристика ползучести записывается в виде:

$$\varphi_{\text{H}}(t)=\frac{\varepsilon_{\Pi}}{\varepsilon_{\text{M}}(\sigma)}=\frac{\varepsilon_{\Pi}}{\sigma/E+B_2\sigma^2+B_3\sigma^3}\ .$$

Деформации ползучести ε_{Π} : $\varepsilon_{\Pi}=\dfrac{\sigma}{E_0}\varphi(t)=\varepsilon_{\text{M}}(\sigma)\varphi_{\text{H}}(t).$

Величина деформации ползучести ε_{Π} обычно определяется экспериментальным путем. Отсюда находим характеристику ползучести:

$$\varphi_H(t)=\frac{\sigma}{E_0}\cdot\frac{1}{\varepsilon_{\text{M}}(\sigma)}\varphi(t)=F_{\text{H}}(\sigma)\varphi(t). \qquad (1)$$

Функция $\varphi(t)$ получается из обработки многочисленных экспериментов и записывается в видах:

$$\varphi(t)=\varphi_{\infty}\left(1-e^{-bt}\right),$$

или более сложном:

$$\varphi(t,\tau)=\varphi_{\infty,\tau}\left(1-e^{-b(t-\tau)}\right),$$

где $\varphi_{\infty,\tau}$ является только функцией τ. Структура функции $\varphi(t,\tau)$ является вырожденной, что позволяет соответствующее интегральные уравнения приводить к дифференциальному виду. Однако функция $\varphi_{\text{н}}(t)$ оказывается нелинейно зависящей от уровня напряжений σ:

$$\varphi_{\text{H}}(t)=F(\sigma)\cdot\varphi_{\infty,\tau}\left(1-e^{-b(t-\tau)}\right),$$

что вызывает математические трудности при решении практических задач.

В интегральном уравнении ползучести оказывается присутствующей нелинейная функция:

$$F_{\text{H}}(\sigma)=\frac{\sigma}{E_0\varepsilon_{\text{M}}(\sigma)},$$

обусловленная учетом мгновенных нелинейных деформаций:

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\cdot\frac{1}{E(\tau)}d\tau-\int_{\tau_1}^{t}F_{\text{H}}(\sigma)\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\ . \qquad (2)$$

Многочисленные попытки ученых преодолеть эту нелинейность математическими преобразованиями, различными допущениями и гипотезами, в конечном итоге (мы это покажем ниже) привели к упрощению, сформулированному

Дистефано, и состоящему в следующей замене последнего подинтегрального выражения:

$$\int_{\tau_1}^{t} F_{\text{Н}}(\sigma)\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=\int_{\tau_1}^{t}\left(k_1\sigma+k_2\sigma^2+k_3\sigma^3+\ldots\right)\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau=$$

$$=\int_{\tau_1}^{t}\sigma\left(k_1+k_2\frac{P}{F}+k_3\left(\frac{P}{F}\right)^2+\ldots\right)\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,.$$

То есть, сначала из функции $F_{\text{Н}}(\sigma)$ выделяется σ в первой степени, а затем все напряжения, стоящие в круглой скобке, приближенно заменяются значениями $\sigma = P/F$ (P – продольная сила, F – поперечное сечение колонны).

Выражение, стоящее в круглых скобках можно вынести за знак интеграла:

$$\left(k_1+k_2\frac{P}{F}+k_3\left(\frac{P}{F}\right)^2+\ldots\right)\int_{\tau_1}^{t}\sigma\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\,.$$

В результате такого упрощения нелинейное интегральное уравнение приводится к линейному интегральному уравнению, что позволяет получить решение задачи в аналитическом виде.

Рассмотрим наиболее важный для практики случай, когда функция характеристики ползучести имеет вид (нестареющий материал):

$$\varphi(t,\tau)=\varphi_\infty\left(1-e^{-b(t-\tau)}\right) \qquad (3)$$

и модуль упругости древесины с течением времени не меняется *E(t) =E₀*.

В этом случае уравнение (2) путем однократного дифференцирования по времени *t* сводится к дифференциальному виду:

$$\dot{\sigma}+\sigma b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\left(\frac{P}{F}\right)+\beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2+\ldots\right)\right]=E_0\,\dot{\varepsilon}+E_0 b\varepsilon\,, \qquad (4)$$

либо к виду уравнения Кельвина:

$$\frac{E_0}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\frac{P}{F}+\ldots\right)\right]}\dot{\varepsilon}+\frac{E_0}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\frac{P}{F}+\ldots\right)\right]}\varepsilon=\sigma+\frac{1}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\frac{P}{F}+\ldots\right)\right]}\dot{\sigma}\,. \qquad (5)$$

Академик Работнов Ю.Н. [1] указывает, что способ линеаризации, предложенный Дистефано, приемлем для случаев исследования сжатых конструкций, работающих в условиях нелинейной ползучести.

Воспользовавшись процедурой интегрирования уравнения (4) по поперечному сечению колонны, подробно исследованной академиком Ишлинским А.Ю. [2] для технической теории изгиба бруса, находящегося в условиях вязкоупругих деформаций, и учитывая, что выражения, стоящие в квадратных скобках выносятся за знак интеграла, имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial t}+b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\left(\frac{P}{F}\right)+\beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2+\ldots\right)\right]M=$$

$$=IE_0\left(\frac{\partial N}{\partial t}+N\Big/\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\left(\frac{P}{F}\right)+\beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2+\ldots\right)\right]\right),$$

где M – изгибающий момент в сечении; N – кривизна изогнутой оси колонны, принимаемая в линейной теории в виде $N = -\partial^2 W / \partial x^2$; W – смещение сечения в поперечном направлении, перпендикулярном к оси x (недеформированная ось колонны).

А.Ю. Ишлинский также показал, что уравнения вида (4) представляют частный случай интегральной зависимости Больцмана – Вольтерры. Однако, выражения стоящие в квадратных скобках, авторами данной работы получены впервые, с помощью идеи, предложенной Дистефано [3]. Разрешающие дифференциальное уравнение задачи в частных производных имеет вид:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial t} + M(x,t)b\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1 \frac{P}{F} + \beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2 + \ldots\right)\right] =$$

$$= IE_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{1}{\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1\left(\frac{P}{F}\right) + \beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2 + \ldots\right)\right]}\right]. \qquad (6)$$

Для сжатых колонн *M(x,t)=PW(x,t).* Решаются такие задачи обычно методом разделения переменных, то есть представлением функции *W(x,t)* в вырожденном виде:

$$W(x,t) = \sum y_i'(x)\cdot y_i(t).$$

Ржаницын А.Р. [4], решавший впервые задачу устойчивости вязкоупругого стержня в линейной постановке для модели Кельвина (стандартное вязкоупругое тело), ограничился одним членом этого ряда:

$$W(x,t) = y_1(x)\cdot y(f), \qquad (7)$$

как, впрочем, решают аналогичные задачи и большинство ученых [5, 6].

Подставляя значение изгибающего момента в (6), имеем:

$$P\dot{W}(x,t) + PW(x,t)b\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1 \frac{P}{F} + \beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2 + \ldots\right)\right] + IE_0\dot{W}''(x,t) +$$

$$+ IE_0 W''(x,t) \Big/ \left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1\left(\frac{P}{F}\right) + \beta_2\left(\frac{P}{F}\right)^2 + \ldots\right)\right] = 0 .$$

Подстановка сюда вырожденной функции (7) дает уравнение с разделенными переменными:

$$-\frac{y_1''(x)}{y_1(x)} = \frac{Py(t) + \dfrac{1}{b\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1 \dfrac{P}{F} + \beta_2 \dfrac{P^2}{F^2} + \ldots\right)\right]} P\dot{y}(t)}{Iy(t)\dfrac{E_0}{\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1 \dfrac{P}{F} + \beta_2 \dfrac{P^2}{F^2} + \ldots\right)\right]} + I\dot{y}(t)\dfrac{E_0}{b\left[1 + \varphi_\infty\left(1 + \beta_1 \dfrac{P}{F} + \beta_2 \dfrac{P^2}{F^2} + \ldots\right)\right]}}$$

В этом уравнении левая часть зависит только от координаты x, а правая часть зависит только от времени t. То есть они равны постоянной величине c_0, что дает два дифференциальных уравнения:

$$y_1''(x)+c_0\cdot y_1(x)=0\,;$$

$$Py(t)+\frac{1}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}P\dot{y}(t)=$$

$$c_0I\frac{E_0y(t)}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}+c_0I\frac{E_0\dot{y}(t)}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}.$$

Первое дифференциальное уравнение дает значение $c_0=\pi^2/l^2$, где l – длина колонны. Второе дифференциальное уравнение имеет первый порядок:

$$\dot{y}(t)+\frac{\dfrac{\pi^2}{l^2}E_0\dfrac{I}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}-P}{\dfrac{1}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}\left(\dfrac{\pi^2E_0I}{l^2}-P\right)}y(t)=0\cdot \qquad (8)$$

Дифференциальное уравнение (8), описывающее поведение прогиба сжатой колонны, является линейным уравнением первого порядка без правой части. В этом случае переменные разделяются, и общее решение имеет вид:

$$y(t)=ce^{-\int Q(t)dt}. \qquad (9)$$

Выражение $Q(t)$ в нашем случае является дробью, стоящей перед переменной $y(t)$:

$$Q=\frac{\dfrac{\pi^2}{l^2}E_0\dfrac{I}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}-P}{\dfrac{1}{b\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\dfrac{P}{F}+\beta_2\dfrac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]}\left(\dfrac{\pi^2E_0I}{l^2}-P\right)}. \qquad (10)$$

Эта дробь представляет собой постоянную величину, не зависящую от времени. c – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий деформирования колонны в момент времени $t=0$. Ввиду постоянства $Q=const$:

$$y(t)=ce^{-Qt} \qquad (11)$$

Величина c является прогибом в середине длины колонны. Характер поведения показательной функции (11) будет зависеть от знака выражения Q, рис. 1.

При значениях продольной силы колонны:

$$P>\frac{\pi^2}{l^2}E_0I\bigg/\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1\frac{P}{F}+\beta_2\frac{P^2}{F^2}+\ldots\right)\right]$$

прогиб $y(t)$ возрастает неограниченно (в рамках приближенного выражения для кривизны).

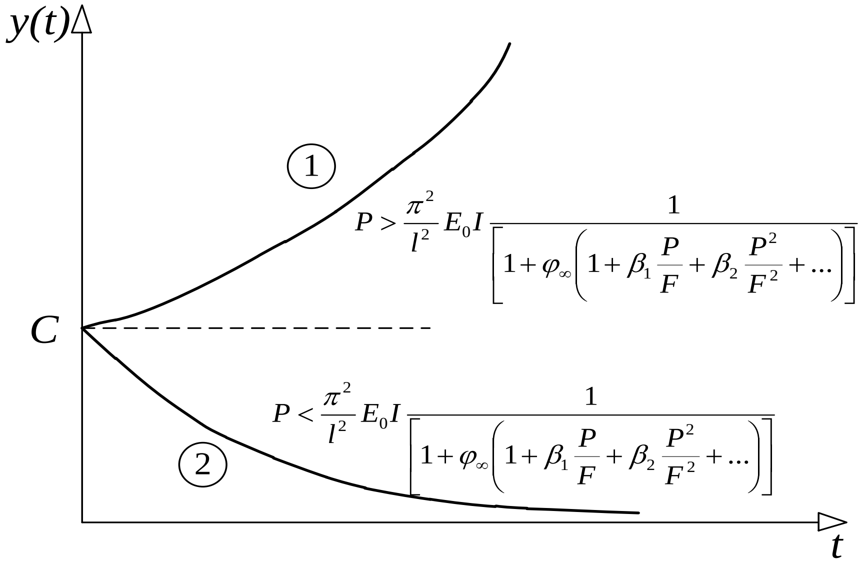

Рис. 1

Прогиб колонны убывает до нуля при значениях продольной силы:

$$P < \frac{\pi^2}{l^2} E_0 I \frac{1}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1 \frac{P}{F}+\beta_2 \frac{P^2}{F^2}+\dots\right)\right]}.$$

При величине продольной силы:

$$P = \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2} \cdot \frac{1}{\left[1+\varphi_\infty\left(1+\beta_1 \frac{P}{F}+\beta_2 \frac{P^2}{F^2}+\beta_3 \frac{P^3}{F^3}+\dots\right)\right]} \qquad (12)$$

начальный прогиб колонны $y(t_0)=c$ с течением времени не изменяется, и значение силы из формулы (12) можно назвать длительной критической силой сжатой колонны.

Следует обратить внимание, что погрешности, вызванные приближенным значением $\sigma = P/F$ в формуле (12), не изменяют основной характер поведения кривых ① и ②, на что и обратил внимание академик Работнов Ю.Н. еще в 1966 году. В некоторых работах, посвященных устойчивости при нелинейной ползучести, обстоятельство замены напряжения выражением P/F (для устранения нелинейности интегрального уравнения), сопровождается более сложными дополнительными действиями и упрощениями, заимствованными из упругой теории сопротивления материалов. Однако, суть результата от таких действий не изменяется. Рассмотрим их.

Из линейной теории сжатия с изгибом заимствуется формула (которая непригодна для нелинейной теории):

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W_1},$$

в которой момент M заменяется внешним моментом $M = PW(x,t)$. Находим значения напряжений:

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{F}\left(1 \pm \frac{F}{W_1} W(x,t)\right). \tag{13}$$

В интегральном уравнении нелинейной задачи имеется член:

$$\int_{\tau_1}^{t} \left(F[\sigma_1(x,\tau)] - F[\sigma_2(x,\tau)]\right) \frac{1}{E_0} \cdot \frac{\partial \varphi(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{14}$$

где $F(\sigma)$ – нелинейная функция, например $F(\sigma)=\sigma+\beta\sigma^2$. Из нее выносится σ:

$$F(\sigma)=\sigma(1+\beta\sigma).$$

Первый сомножитель σ в этой функции (линейная часть) заменяется соотношением (13). Выражение в скобках, создающее нелинейность, заменяется:

$$\sigma_1(1+\beta\sigma_1)+\sigma_2(1+\beta\sigma_2)=\sigma_1\left(1+\beta\left(\frac{P}{F}\right)\right)+\sigma_2\left(1+\beta\left(\frac{P}{F}\right)\right)=\left(1+\beta\left(\frac{P}{F}\right)\right)(\sigma_1+\sigma_2).$$

Выражение в первой скобке выноситься из под знака интеграла, и таким способом образуется линейное интегральное уравнение для прогиба:

$$y(t)-(1-\xi)\lambda E\int_{\tau_1}^{t} y(t)\frac{1}{E_0}\cdot\frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau = y(0), \tag{15}$$

где $\lambda = \left(1+\beta\dfrac{P}{F}\right) = (1+\beta\sigma_1) = (1+\beta\sigma_2)$. То есть, краевое напряжение σ_1 оказывается равным краевому напряжению σ_2 при наличии сжатия с изгибом.

Записываем функцию для $\varphi(t,\tau)$ в вырожденном виде:

$$\varphi(t,\tau)=\varphi_1(\tau)\left(1-e^{-b(t-\tau)}\right).$$

Сводим интегральное уравнение (15) к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{y}(t)+b\left[1+\left(1-\frac{P_э}{P_э-P}\right)\lambda E_0\varphi_1(t)\right]\dot{y}(t)=0. \tag{16}$$

Это дифференциальное уравнение допускает понижение порядка:

$$\frac{d\,\dot{y}(t)}{dt}+b\left[1+\left(1-\frac{P_э}{P_э-P}\right)\lambda\varphi_1(t)\right]\dot{y}(t).$$

Его решение имеет вид:

$$\dot{y}=ce^{-\int b\left[1+\left(1-\frac{P_э}{P_э-P}\right)\right]\lambda\varphi_1(t)dt}. \tag{17}$$

Откуда находится выражение для длительной критической силы:

$$P_{дл}=\frac{P_э}{1+\left(1+\beta\dfrac{P}{F}\right)\varphi_1(t)}. \tag{18}$$

К примеру, принимая значения $\beta = 0{,}1$, $P = P_{дл}$ и $\varphi_1(t) = \varphi_\infty = 0{,}8$ (по экспериментальным данным Ржаницына А.Р.) и подставляя их в выражение (18) получим:

$$P_{дл} = \frac{P_э}{1 + \left(1 + 0{,}1\frac{P_{дл}}{F}\right)\cdot 0{,}8}.$$

Преобразование данного выражения, приводит к квадратному уравнению для нахождения длительной критической силы $P_{дл}$:

$$1{,}8P_{дл} + 0{,}08\frac{P_{дл}{}^2}{F} = P_э,$$

где

$$P_э = \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2}$$

- значение критической силы Эйлера, F – площадь поперечного сечения.

Таким образом, уравнение (18) позволяет найти длительную несущую способность для сжатого деревянного элемента через критическую силу Эйлера с учетом ползучести древесины.

Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 383 с.

2. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. – М.: Наука, 1986. – 358 с.

3. *Distefano I.N.* Nonlinear processes in engineering. – Academic Press. N.Y. – London, 1974.

4. *Ржаницын А.Р.* Процессы деформирования конструкций из упруговязких элементов// ДАН СССР. – Т.52. – № 1, 1946. – С. 25-28.

5. *Бунатян Л.Б.* Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала// Изв. Академии Наук СССР, сер. физ.-мат, ест. и техн. наук, т.6, № 2, 1953.

6. *Прокопович И.Е., Линник А.С.* Влияние нелинейной ползучести на устойчивость гибких сжатых стержней// Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев, 1973. –Вып. 21. – С.70-76.

References

1. *Rabotnov, Yu.N.* (1977). *Elementy nasledstvennoy mehaniki tverdyh tel*. M.: Science, 383 p. p.52.

2. *Ishlinskiy, A.Yu.* (1986). *Prikladnye zadachi mehaniki*. Part. 1. Mehanika vyazko-plasticheskih i ne vpolne uprugih tel. M.:Science, 358 p.

3. *Distefano I.N.* (1974). *Nonlinear Processes in Engineering*. Academic Press. N.Y.–London.

4. *Rzhanicyn A.R.* (1946). Processy deformirovaniya konstrukciy iz uprugovyazkih elementov. *Reports of USSR Academy of Sciences*. Part.52. № 1, p. 25-28.

5. *Bunatyan L.B.* (1953). Ustoychivost' tonkostennyh sterzhney s uchetom polzuchesti materiala. *Izv. USSR Academy of Sciences, ser. fiz.-mat, est. i tehn. nauk*, Vol .6, № 2.

6. *Prokopovich I.E., Linnik A.S.* (1973). Vliyanie nelineynoy polzuchesti na ustoychivost' gibkih szhatyh sterzhney. *Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy*. Kiev, Issue 21, p.70-76.

LONG BEARING CAPACITY OF WOODEN STRUCTURES

Varenik A.S., Varenik K.A.

Novgorodskiy gosudarstvenniy universitet im. Ya. Mudrogo, Novgorod

In the work, the solution of a problem of stability of the compressed wooden elements with taking into account nonlinear creep of wood is presented. The characteristic of creep representing the relation of deformation of creep to initial instant deformation is used. Expression for long critical force is derived.

KEY WORDS: Creep deformation, creep characteristic, critical force, compressed column, stability.