

Теория упругости

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ КОНСОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ

С.Е. ЗАЙЦЕВ, аспирант*

В.С. САФРОНОВ, канд. техн. наук, доцент**

* ООО «АНТ-Информ»

**Московский авиационный институт (Государственный технический университет)

141983 Дубна ул. Тверская д.6а тел. 89154690683 SergeyE.Z@yandex.ru

105264 Москва ул. 5-ая Парковая д.40, корп.1, кв.2, тел. 89262104892,

v.s.safronov@mail.ru

В статье представлена аналитическая модель оценки напряженно-деформируемого состояния и устойчивости плоских пластин с вырезом, построенная на основе энергетического метода. Приведены результаты расчетов и их сопоставление с результатами, полученными методом конечного элемента. Полученные в работе расчетные зависимости имеют аналитический характер.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Подкрепленная пластина, отверстие, напряженно-деформируемое состояние, метод конечного элемента, энергетический метод.

Данная работа является продолжением серии работ [1-8], посвященным аналитической оценке несущей способности неоднородных конструкций летательных аппаратов. Рассмотрим пластинки, подкрепленный набор которых расположен по линиям главных кривизн, т.е. конструктивно ортотропные пластинки. Методы расчета таких пластин основаны на хорошо разработанных методах расчета гладких пластин. Для этой цели подкрепленную пластину заменяют некоторой эквивалентной ей гладкой пластиной с разными жесткостными характеристиками по линиям главных кривизн. После этого к заменяющей пластине применяют весь расчетный аппарат теории гладких пластин.

Рассмотрим прямоугольную пластину с толщиной обшивки h , защемленную по одной кромке со сторонами a и b и подкрепленную в продольном направлении k равномерно распределенными ребрами (стрингерами) одинакового сечения, находящуюся под действием равномерного поперечного давления P с центральным отверстием радиусом R (рис.1). Пусть начало координат ($x=0$) находится в заделке в центре пластинки.

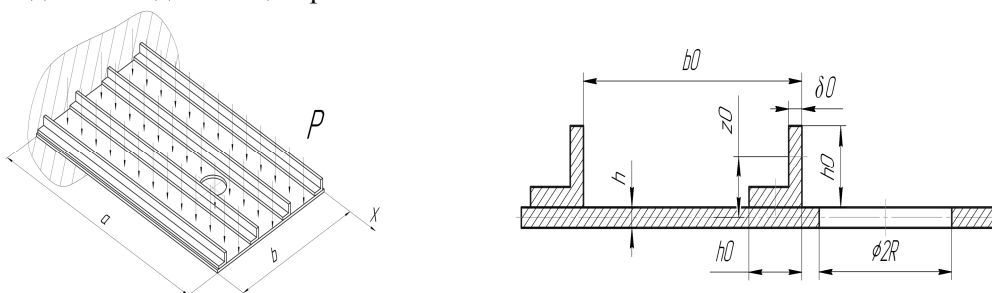


Рис.1 Схема нагружения подкрепленной пластины с центральным отверстием между ребер

Примем, что форма колебаний (прогиб w) для пластины моделируется как для консольной балки и имеет вид

$$w = w_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \right). \quad (1)$$

Выбор подходящей формы колебаний служит основным моментом в рассматриваемой задаче. Для упругой консоли допустимая форма деформируемой оси должна удовлетворять условиям нулевого прогиба и угла поворота в заделке, а также максимального прогиба и нулевой второй производной (отсутствию момента сил) на свободном конце. Выражение (1) удовлетворяет всем перечисленным граничным условиям.

Аналитическое исследование напряженно-деформируемого состояния плоских консольных пластин с отверстием

Строится приближенное решение задачи, для которого будем считать достаточным выполнение кинематических граничных условий на внешнем контуре пластины, т.е. будем учитывать влияние выреза только на внутреннюю потенциальную энергию.

Рассмотрим три частных случая:

1. Ребра неповрежденные, а отверстие находится между двумя соседними ребрами (рис.1). Предполагая, что деформации малы (упругий изгиб Бернулли – Эйлера), для потенциальной энергии деформации используем выражение

$$U = U_{цел.пл.} - U_{вырез.} \quad (2)$$

где $U_{цел.пл.}$ – потенциальная энергия деформации целой пластины, $U_{вырез.}$ – потенциальная энергия деформации выреза. Тогда

$$U = \int_0^a \frac{M^2 dx}{2EI(1-\nu^2)} = \frac{EI_{цел.пл.}}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{l_1-\sqrt{R^2-x^2}}^{l_1+\sqrt{R^2-x^2}} I_{вырез.} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx, \quad (3)$$

где E – модуль упругости, $I_{цел.пл.}$ – момент инерции сечения целой пластины, $I_{вырез.}$ – момент инерции сечения выреза, l_1 – координата центра выреза по оси x , ν – коэффициент Пуассона.

В работе [1] показано, что потенциальную энергию деформации кругового выреза радиусом R для упрощения выкладок можно моделировать потенциальной энергией деформации квадратного выреза со стороной $2R$ умножением последней на $\pi/4$. При этом погрешность расчетов составляет не более 1%.

С учетом этого выражение (3) запишем в виде

$$U = \int_0^a \frac{M^2 dx}{2EI(1-\nu^2)} = \frac{EI_{цел.пл.}}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \frac{\pi EI_{вырез.}}{8(1-\nu^2)} \int_{l_1-R}^{l_1+R} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx = \\ = \frac{\pi^4 EI_{цел.пл.} w_0^2}{64a^3(1-\nu^2)} - U_{вырез.} \quad (4)$$

где
$$U_{вырез.} = \frac{EI_{вырез.} \pi^4 w_0^2}{128a^4(1-\nu^2)} \left[a \cos\left(\frac{\pi(R-l_1)}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi(R-l_1)}{2a}\right) + \pi R + \right. \\ \left. + a \cos\left(\frac{\pi(R+l_1)}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi(R+l_1)}{2a}\right) \right]. \quad (5)$$

Момент инерции сечения ребра (рис.1) с присоединенной обшивкой относительно центральной оси для целой пластины определяется выражением

$$I_{z_0} = \frac{\delta_0 h_0^3}{12} + \delta_0 h_0 \left(\frac{h_0}{2} - z_0\right)^2 + \frac{(h_0 - \delta_0) \delta_0^3}{12} + \\ + \delta_0 (h_0 - \delta_0) \left(z_0 - \frac{\delta_0 + h}{2}\right)^2 + \frac{b_0 h^3}{12} + b_0 h z_0^2, \quad (6)$$

здесь z_o – положение центра тяжести сечения, образованного ребром с присоединенной к нему обшивкой (рис.1):

$$z_o = \frac{\delta_0 (h_0 - \delta_0)(h + \delta_0) + h_0 \delta_0 (h_0 + h)}{2 [b_o h + h_0 \delta_0 + (h_0 - \delta_0) \delta_0]} . \quad (7)$$

Тогда момент инерции сечения целой пластины

$$I_{цел.пл} = kI_z, \quad \text{где } k \text{ – количество ребер.} \quad (8)$$

Момент инерции выреза запишется в виде

$$I_{вырез} = \frac{Rh^3}{6} + 2Rhz_o^2 . \quad (9)$$

Строится приближенное решение задачи, для которого будем считать достаточным выполнение кинематических граничных условий на внешнем контуре пластины. То есть, решая задачу на основе энергетического метода, будем учитывать влияние выреза только на потенциальную энергию деформации пластины [1]. Максимально возможная работа нагрузки с давлением P , совершаемая над пластиной, равна

$$A = \int_0^a Pbw = Pb w_0 \int_0^a (1 - \cos \frac{\pi x}{2a}) dx = (1 - \frac{2}{\pi}) Pba w_0 . \quad (10)$$

Приравнивая выражения (4) и (10) для потенциальной энергии деформации и работы внешних сил и преобразуя полученные результаты, получим зависимость для максимального прогиба поврежденной подкрепленной пластины

$$w_0 = \frac{64Pba^5 (\pi - 2)(1 - \nu^2)}{E\pi^4 \left[\pi I_{цел.пл} a - \frac{\pi}{2} I_{вырез} (\pi R + a \left(\cos \left(\frac{\pi(R-l_1)}{2a} \right) \sin \left(\frac{\pi(R-l_1)}{2a} \right) + \cos \left(\frac{\pi(R+l_1)}{2a} \right) \sin \left(\frac{\pi(R+l_1)}{2a} \right) \right) \right]} . \quad (11)$$

Запишем выражение для изгибающего момента в виде:

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} . \quad (12)$$

С учетом (1) получим для максимального изгибающего момента (при $x=0$):

$$M_{\max} = \frac{EI_{цел.пл} \pi^2 w_0}{4a^2} . \quad (13)$$

Запишем так же для изгибающего момента:

$$M_{\max} = \frac{2I_{цел.пл} \sigma_{x=0}}{z_0} , \quad (14)$$

где $\sigma_{x=0}$ – нормальное напряжение в заделке.

Приравнивая выражения (13) и (14), получим зависимость для максимального прогиба, как функцию напряжений

$$w_0 = \frac{8\sigma_{x=0} a^2}{z_0 E \pi^2} . \quad (15)$$

Приравнивая выражения (11) и (15) для прогиба, получим зависимость для действующих нормальных напряжений поврежденной подкрепленной пластины в заделке ($x=0$):

$$\sigma_{отв. x=0} = \frac{w_0 z_0 E \pi^2}{8a^2} \quad (16)$$

и напряжения в сечении хорды пластины по оси отверстия ($x = l_1$) (без учета концентрации напряжений около отверстия)

$$\sigma_{отв. x=l_1} = \frac{w_0 \pi^2 z_0 E I_{цел.пл.} \cos\left(\frac{\pi l_1}{2a}\right)}{2a^2 [I_{цел.пл.} - I_{вырез}]}, \quad (17)$$

где w_0 определяется выражением (15). Если ширина панели велика по сравнению с радиусом отверстия R , то напряжение $\sigma_{отв.}$ в сечении хорды панели по оси отверстия определяется по формуле:

$$\sigma_{отв.} = \frac{\sigma}{2} \left[2 + \frac{R^2}{y^2} + 3 \frac{R^4}{y^4} \right], \quad (18)$$

где σ – среднее напряжение в сечении, достаточно удаленном от места отверстия, y – расстояние от центра отверстия до точки, в которой определяется напряжение.

При $y=R$, $\sigma_{max} = 3\sigma$. Таким образом, при $R/b \rightarrow 0$, $\sigma_{ном} = \sigma$ и $K_\sigma = 3$.

С увеличением y напряжения быстро убывают, асимптотически приближаясь к напряжению σ .

В окрестности отверстия имеет место двухосное напряженное состояние. Так, в точках, лежащих на оси x , на вертикальных площадках возникают сжимающие напряжения, которые определяют по формуле:

$$\sigma_y = -\frac{\sigma}{2} \left[3 \frac{R^4}{x^4} - \frac{R^2}{x^2} \right]. \quad (19)$$

При $x = R$, $\sigma_y = -\sigma$; при $x=2R$, $\sigma_y = \sigma/32$ и далее, эти напряжения быстро затухают. Приведенное (18, 19) точное решение может быть использовано лишь для панели, ширина которой велика по сравнению с диаметром отверстия ($b > 10R$). С уменьшением ширины панели теоретический коэффициент концентрации напряжений K_σ возрастает, а напряжения у наружных краев панели становятся меньше σ . В табл. 1 приведены значения коэффициента K_σ для различных значений отношения диаметра отверстия к ширине панели.

Табл. 1 Значения коэффициента K_σ для различных значений отношения диаметра отверстия к ширине панели

| $2R/b$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|------------|------|------|------|------|------|------|
| K_σ | 3,00 | 3,03 | 3,14 | 3,36 | 3,74 | 4,32 |

Как видно, коэффициент K_σ заметно увеличивается по мере увеличения отношения $2R/b$.

Нормальные напряжения вдоль оси y определяются зависимостью:

$$\sigma_y = \mu \sigma_x. \quad (20)$$

Касательные напряжения вдоль оси z в сечении с координатой x :

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{(h_0+h)^2}{4} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right) = \frac{E \pi^3 w_0}{64(1-\mu^2)} \frac{(h_0+h)^2}{a^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right), \quad (21)$$

где w_0 определяется по (11).

Нормальные напряжения σ_z , действующие по площадкам, параллельным срединной плоскости в сечении с координатой x :

$$\sigma_z = \frac{E(h_0+h)^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) = -\frac{E\pi^4 w_0}{384(1-\mu^2)} \frac{(h_0+h)^3}{a^4} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \quad (22)$$

Эквивалентные напряжения:

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}. \quad (23)$$

В качестве примера рассмотрена пластина со следующими характеристиками: $b = 275$ мм; $a = 466$ мм; $E = 0,72 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$; $h = 1$ мм; $h_0 = 10$ мм; $k = 4$; $\delta_0 = 1$ мм, $\sigma_{0,2} = 300 \cdot 10^6$ Па, $P = 9900$ Па.

На рис. 2 показана зависимость отношения эквивалентных действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к действующим напряжениям целой панели в рассматриваемых сечениях ($x = 0, l_i$) $\sigma_{отв.макс}/\sigma_\delta$ от изменения центра расположения отверстия $c = l_i/a$ по длине панели при различных радиусах отверстия R . Из рис. 2 следует, что для подкрепленной панели наличие отверстия с соотношением $2R/b = 0,15$ при непробитии ни одного из четырех ребер подкрепленной панели увеличивает действующие напряжения в панели на 4,5%. На рис. 3 показана зависимость отношения эквивалентных действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.макс}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели.

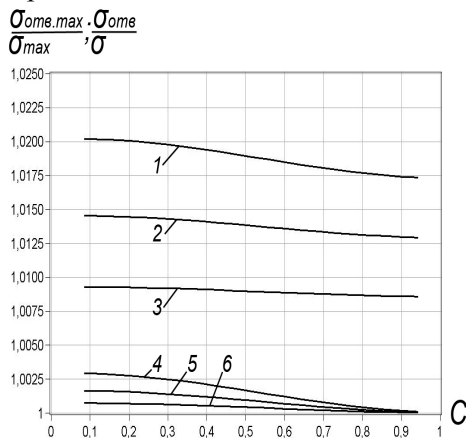


Рис. 2. Зависимость отношения действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к действующим напряжениям целой панели $\sigma_{отв.макс}/\sigma_\delta$ в районе заделки от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R = 20$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 10$ мм) и действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к действующим напряжениям целой панели в сечении по оси отверстия $\sigma_{отв}/\sigma$ (кривая 4 – $R = 20$ мм, 5 – $R = 15$ мм, 6 – $R = 10$ мм)

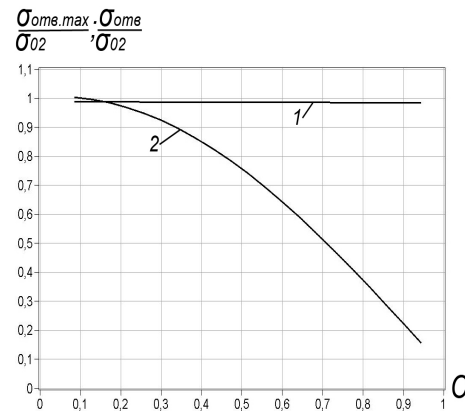


Рис. 3. Зависимость отношения действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к действующим напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.макс}/\sigma_{0,2}$ в районе заделки от изменения центра расположения отверстия c при $R=20$ мм (кривая 1) и действующих напряжений в панели с отверстием (ребро не пробито) к действующим напряжениям условного предела текучести в сечении по оси отверстия $\sigma_{отв.}/\sigma_{0,2}$ (кривая 2)

На рис.3 части кривых, находящиеся в области $\sigma_{отв.макс}/\sigma_{0,2} < 1$ характеризуют, что в соответствующих пределах l_i и R данная панель не теряет несущую способность.

2. Центральное ребро пробито отверстием.

В этом случае момент инерции выреза запишется в виде

$$I_{\text{вырез}} = \frac{\delta_0 h_0^3}{12} + \delta_0 h_0 \left(\frac{h_0}{2} - z_0 \right)^2 + \frac{(h_0 - \delta_0) \delta_0^3}{12} + \delta_0 (h_0 - \delta_0) \left(z_0 - \frac{\delta_0 + h}{2} \right)^2 + \frac{R h^3}{6} + 2 R h z_0^2, \quad (18)$$

Продельывая в дальнейшем те же преобразования, получим выражение для действующих напряжений поврежденной подкрепленной пластины аналогичное (16, 17). В качестве примера рассмотрена пластина со следующими характеристиками: $b = 275$ мм; $a = 466$ мм; $E = 0,72 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$; $h = 1$ мм; $h_0 = 10$ мм; $k = 5$; $\delta_0 = 1$ мм, $\sigma_{0,2} = 300 \cdot 10^6$ Па, $P = 12400$ Па.

На рис. 4 показана зависимость отношения действующих напряжений в пластине с отверстием (ребро пробито) к действующим напряжениям целой пластины в рассматриваемых сечениях ($x = 0, l_1$) $\sigma_{\text{отв. max}}/\sigma_0$ от изменения центра расположения отверстия c по длине пластины при различных радиусах отверстия R . На рис. 5 показана зависимость отношения действующих напряжений в пластине с отверстием (ребро пробито) к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{\text{отв. max}}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине пластины при различных радиусах отверстия R .

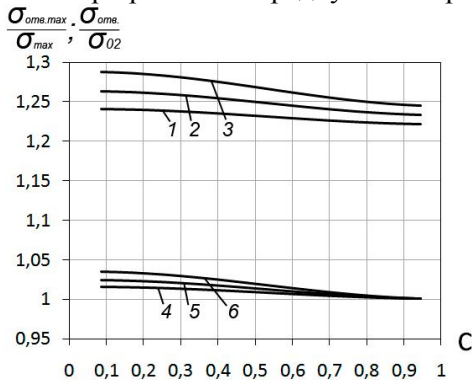


Рис. 4. Зависимость отношения действующих напряжений в панели с отверстием (ребро пробито) к действующим напряжениям целой панели в районе заделки $\sigma_{\text{отв. max}}/\sigma_{\text{max}}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R = 20$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 10$ мм) и действующих напряжений в панели с отверстием (ребро пробито) к действующим напряжениям целой панели в сечении по оси отверстия $\sigma_{\text{отв}}/\sigma$ (кривая 4 – $R = 20$ мм, 5 – $R = 15$ мм, 6 – $R = 10$ мм)

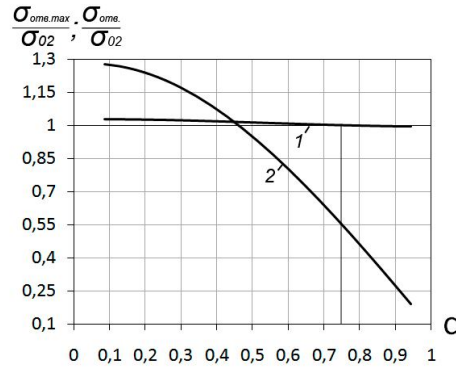


Рис. 5. Зависимость отношения действующих напряжений в панели с отверстием (ребро пробито) к действующим напряжениям условного предела текучести $\sigma_{\text{отв. max}}/\sigma_{0,2}$ в районе заделки от изменения центра расположения отверстия c при $R = 20$ мм (кривая 1) и действующих напряжений в панели с отверстием (ребро пробито) к действующим напряжениям предела текучести $\sigma_{\text{отв}}/\sigma_{0,2}$ в сечении по оси отверстия (кривая 2)

Из рис. 5 следует, что для подкрепленной панели наличие отверстия с соотношением $2R/b = 0,15$ при пробитии одного из 5 ребер увеличивает действующие напряжения в панели на 27 %.

На рис. 6 показана зависимость отношения максимальных действующих нормальных напряжений в оребренной панели с отверстием $\sigma_{\text{зотв}}$ к напряжениям σ_z целой оребренной панели $\sigma_{\text{зотв}}/\sigma_z$ в заделке ($x = 0$) от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при $R = 24$ мм.

На рис. 7 показана зависимость отношения максимальных действующих касательных напряжений в оребренной панели с отверстием $\tau_{xz\text{отв}}$ к напряжениям τ_{xz} целой оребренной панели $\tau_{xz\text{отв}}/\tau_{xz}$ при $x=a$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при $R = 24$ мм.

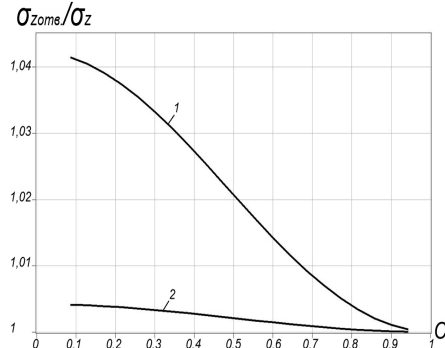


Рис. 6. Зависимость отношения максимальных действующих нормальных напряжений в оребренной панели с отверстием $\sigma_{z\text{отв}}$ к напряжениям σ_z целой панели $\sigma_{z\text{отв}}/\sigma_z$ заделке ($x=0$) от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм (кривая 1 – пробито ребро панели, кривая 2 – пробита только обшивка)

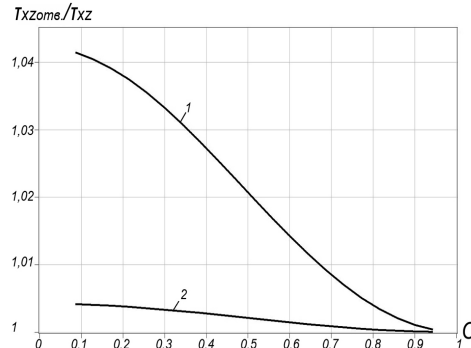


Рис. 7. Зависимость отношения максимальных действующих касательных напряжений в оребренной панели с отверстием $\tau_{xz\text{отв}}$ к напряжениям τ_{xz} целой панели $\tau_{xz\text{отв}}/\tau_{xz}$ при $x = a$ от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм (кривая 1 – пробито ребро панели, кривая 2 – пробита только обшивка)

3. Гладкая пластина

В случае гладкой панели момент инерции панели для целой панели определяется выражением

$$I_{zo} = \frac{bh^3}{12} . \quad (19)$$

Момент инерции выреза запишется в виде

$$I_{\text{вырез}} = \frac{Rh^3}{6} . \quad (20)$$

Продельвая в дальнейшем те же преобразования, получим выражение для действующих напряжений поврежденной гладкой панели аналогичное (16, 17).

Касательные напряжения вдоль оси z для гладкой панели в сечении с координатой x :

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{h^2}{4} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right) = -\frac{E\pi^3 w_0}{64(1-\mu^2)} \frac{h^2}{a^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) , \quad (21)$$

Нормальные напряжения σ_z , действующие по площадкам, параллельным срединной плоскости для гладкой панели в сечении с координатой x :

$$\sigma_z = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right) = -\frac{E\pi^4 w_0}{384(1-\mu^2)} \frac{h^3}{a^4} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) . \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрена панель со следующими характеристиками: $b = 275$ мм, $a = 466$ мм, $E = 0,72 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$; $h = 4$ мм, $\sigma_{0,2} = 300 \cdot 10^6$ Па, $P = 500$ Па.

На рис. 8 показана зависимость отношения эквивалентных действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к действующим напряжениям целой гладкой панели в рассматриваемых сечениях ($x=0, l_1$) $\sigma_{\text{отв. max}}/\sigma_\delta$ от изменения

центра расположения отверстия c по длине панели при различных радиусах отверстия R . Здесь l_1 – координата центра отверстия по размаху пластины.

На рис. 9 показана зависимость отношения эквивалентных действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв..max}/\sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели.

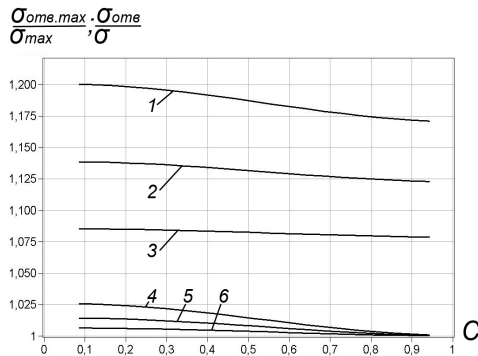


Рис. 8. Зависимость отношения действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к действующим напряжениям целой панели $\sigma_{отв..max}/\sigma_{max}$ в районе заделки от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R = 20$ мм, 2 – $R = 15$ мм, 3 – $R = 10$ мм) и действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к действующим напряжениям целой панели $\sigma_{отв}/\sigma$ в сечении по оси отверстия (кривая 4 – $R = 20$ мм, 5 – $R = 15$ мм, 6 – $R = 10$ мм)

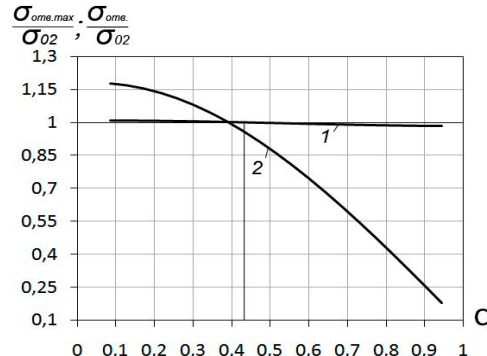


Рис. 9. Зависимость отношения действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести в заделке $\sigma_{отв..max}/\sigma_{02}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R = 20$ мм)

и отношения действующих напряжений в гладкой панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв}/\sigma_{02}$ в сечении по оси отверстия (кривая 2 – $R = 20$ мм)

Из рис. 9 следует, что для гладкой панели наличие отверстия с соотношением $2R/b = 0,15$ при пробитии ребра увеличивает действующие напряжения в панели на 20%. В графике (рис. 9) части кривых, находящиеся в области $\sigma_{отв..max}/\sigma_{02} < 1$ характеризуют, что в соответствующих пределах l_1 и R данная панель не теряет несущую способность.

На рис. 10 показана зависимость отношения максимальных действующих нормальных напряжений в гладкой панели с отверстием $\sigma_{зотв}$ к напряжениям σ_z целой гладкой панели $\sigma_{зотв} / \sigma_z$ в заделке ($x=0$) от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при $R = 24$ мм.

На рис. 11 показана зависимость отношения максимальных действующих касательных напряжений в гладкой панели с отверстием $\tau_{xzотв}$ к напряжениям τ_{xz} целой гладкой панели $\tau_{xzотв} / \tau_{xz}$ при $x=a$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при $R = 24$ мм.

Определение критической нагрузки панели подкреплённой рёбрами с отверстием

Критическое погонное сжимающее усилие на сжатую обшивку и сжатые части рёбер панели найдем из условия равенства потенциальной энергии деформации и работы:

$$\left(\frac{U_{цел.пл.} - U_{вырез.}}{2} \right) = A_x. \quad (23)$$

Максимально возможная работа погонной сжимающей нагрузки N_x , совершаемая над сжимаемой частью панели равна:

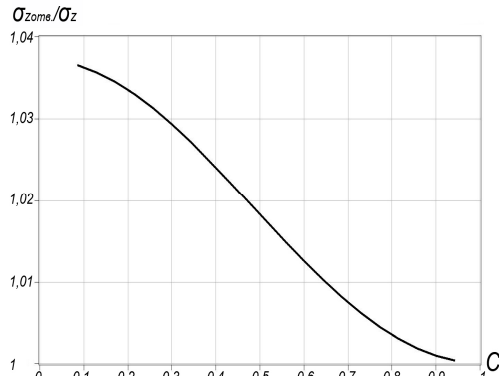


Рис. 10. Зависимость отношения максимальных действующих нормальных напряжений в гладкой панели с отверстием $\sigma_{zотв}$ к напряжениям σ_z целой панели $\sigma_{zотв} / \sigma_z$ в заделке ($x=0$) от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм.

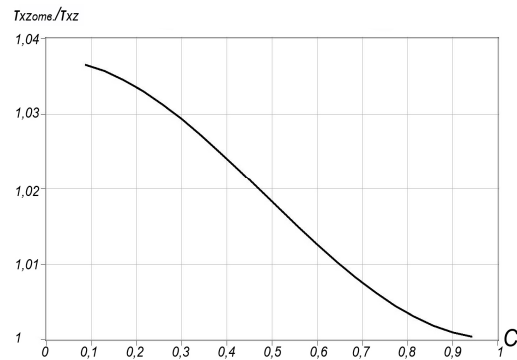


Рис. 11. Зависимость отношения максимальных действующих касательных напряжений в целой панели с отверстием $\tau_{xzотв}$ к напряжениям τ_{xz} целой панели $\tau_{xzотв} / \tau_{xz}$ при $x = a$ от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм.

$$A_x = \frac{N_{x.кр} b}{4} \int_0^a \frac{\partial w}{\partial x} dx = \frac{\pi^2 N_{x.кр} w_0^2 b}{32a} \quad (24)$$

Из (24) найдем критическую погонную силу для обшивки и рёбер панели:

$$N_{x.кр.}^{\Sigma} = \frac{\pi^2 E}{2a^2 b(1-\mu^2)} \left(I_{цел.пл.} - \frac{I_{вырез}}{4} \left[\frac{\pi R}{2a} + \sin\left(\frac{\pi(R-l_1)}{a}\right) + \sin\left(\frac{\pi(R+l_1)}{a}\right) \right] \right) \quad (25)$$

Действующее погонное усилие на сжатую часть панели определим исходя из выражения:

$$N_{x.об.} = \frac{M_u(x)}{z_0 b}, \quad (26)$$

где $M_u(x)$ определяется согласно (12).

Результаты расчета по определению критической нагрузки подкреплённой панели с отверстием

На рис. 12, 13 показаны зависимости отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и рёбер панели без отверстия $N_{x.кр.}^{\Sigma}$ при различных радиусах отверстия R и пробитом, либо не пробитым отверстием ребром от изменения центра расположения отверстия c по размаху панели.

На рис. 14,15 показаны зависимости отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.кр.отв.}^{\Sigma}$ к действующим погонным усилиям на обшивку и рёбра панели $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ при различных радиусах отверстия R и пробитом, либо не пробитым ребром от изменения центра расположения отверстия c по размаху панели.

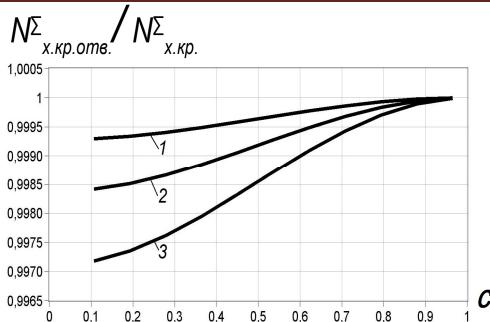


Рис. 12. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.kr.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и рёбер панели без отверстия $N_{x.kr.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R=10\text{мм}$, 2 – $R=15\text{мм}$, 3 – $R=24\text{мм}$.), ребро не пробито

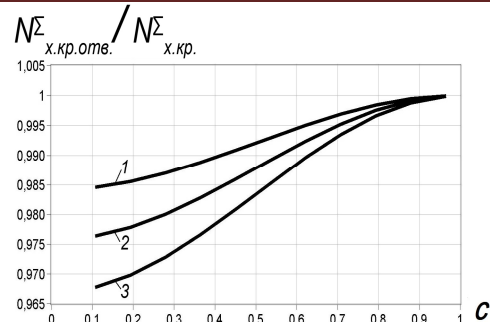


Рис. 13. Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.kr.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и рёбер панели без отверстия $N_{x.kr.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R=10\text{мм}$, 2 – $R=15\text{мм}$, 3 – $R=24\text{мм}$.), ребро пробито

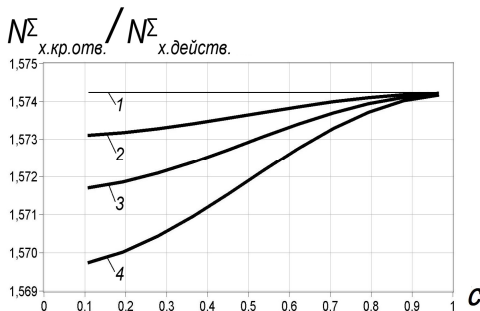


Рис. 14 Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.kr.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и рёбер панели без отверстия $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R=0\text{мм}$, 2 – $R=10\text{мм}$, 3 – $R=15\text{мм}$, 4 – $R=24\text{мм}$.), ребро не пробито

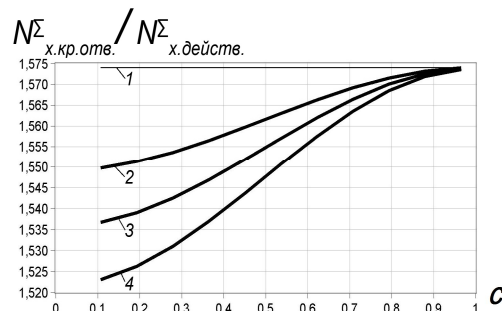


Рис. 15 Зависимость отношения критических погонных сжимающих усилий обшивки и рёбер панели с отверстием $N_{x.kr.отв.}^{\Sigma}$ к критическим погонным усилиям обшивки и рёбер панели без отверстия $N_{x.действ.}^{\Sigma}$ от изменения центра расположения отверстия c (кривая 1 – $R=0\text{мм}$, 2 – $R=10\text{мм}$, 3 – $R=15\text{мм}$, 4 – $R=24\text{мм}$.), ребро пробито

Результаты исследования напряженно-деформируемого состояния подкрепленных пластин с отверстием методом конечного элемента (МКЭ)

На рис. 16 показана зависимость отношения действующих напряжений в подкрепленной панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.макс} / \sigma_{0,2}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при радиусе отверстия $R = 24$ мм. Ребро пробито. Приведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ.

На рис. 17 показана зависимость отношения максимального прогиба в подкрепленной панели с отверстием к максимальному прогибу подкрепленной панели без отверстия $w_{отв.макс} / w_{макс}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при радиусе отверстия $R = 24$ мм. Ребро пробито. При-

ведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ.

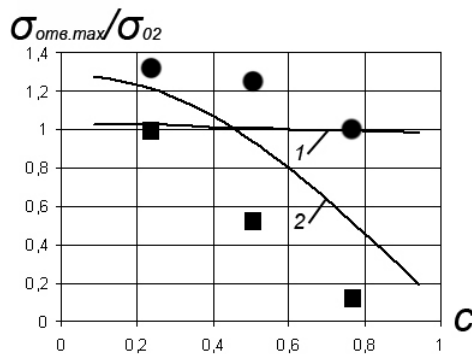


Рис. 16. Зависимость отношения действующих напряжений в подкрепленной панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{02}$ от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм. Ребро пробито. (кривая 1 – в заделке, кривая 2 – в хорде по сечению отверстия, ● – МКЭ в заделке, ■ – МКЭ в хорде по сечению отверстия)

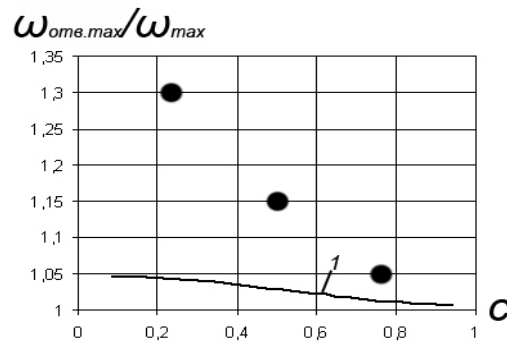


Рис. 17. Зависимость отношения максимального прогиба в подкрепленной панели с отверстием к максимальному прогибу панели без отверстия $w_{отв.маx}/w_{маx}$ от изменения центра расположения отверстия c при $R=24$ мм. Ребро пробито. (кривая 1 – теория, ● – МКЭ)

В табл. 2 приведены значения действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв.маx}$ подкрепленной консольной панели, полученные в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R = 24$ мм по длине панели при $P=7750$ Па. Ребро пробито.

Табл. 2 Сравнение действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв.маx}$ подкрепленной панели, ребро пробито.

| Положение отверстия $R=24$ мм по размаху c | $\sigma_{отв.маx}$ [МПа] | $\sigma_{отв.маx}$ [МПа] | Разница в % |
|--|--------------------------|--------------------------|-------------|
| | Теория | МКЭ | |
| 0,25 | 306 | 400 | 23,5 |
| 0,5 | 302 | 380 | 20,5 |
| 0,75 | 297 | 300 | 1 |

В табл. 3 приведены значения максимальных прогибов $w_{отв.маx}$, полученных в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R=24$ мм по длине панели при $P = 7750$ Па. Ребро пробито.

Таблица 3

Сравнение максимальных прогибов $w_{отв.маx}$ подкрепленной панели, ребро пробито

| Положение отверстия $R=24$ мм по размаху c | $w_{отв.маx}$ [мм] | $w_{отв.маx}$ [мм] | Разница в % |
|--|--------------------|--------------------|-------------|
| | Теория | МКЭ | |
| 0,25 | 26,07 | 26 | 0,27 |
| 0,5 | 25,7 | 23 | 10,4 |
| 0,75 | 25,31 | 21 | 17,2 |

На рис. 18 показана зависимость отношения действующих напряжений в подкрепленной панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв.маx}/\sigma_{02}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при радиусе отверстия $R = 24$ мм. Ребро не пробито. Приведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ.

На рис. 19 показана зависимость отношения максимального прогиба в подкрепленной панели с отверстием к максимальному прогибу подкрепленной панели без отверстия $w_{отв. max} / w_{max}$ от изменения центра расположения отверстия c по длине панели при радиусе отверстия $R = 24$ мм. Ребро не пробито. Приведено сравнение теоретических результатов с численными, полученными МКЭ.

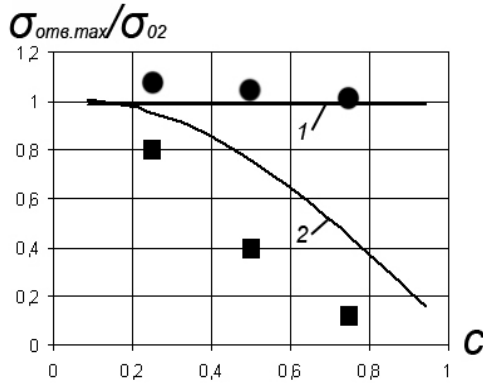


Рис. 18 Зависимость отношения действующих напряжений в подкрепленной панели с отверстием к напряжениям условного предела текучести $\sigma_{отв. max} / \sigma_{02}$ от изменения центра расположения отверстия c при $R = 24$ мм. Ребро не пробито. (кривая 1 – в заделке, кривая 2 – в хорде по сечению отверстия, ● – МКЭ в заделке, ■ – МКЭ в хорде по сечению отверстия)

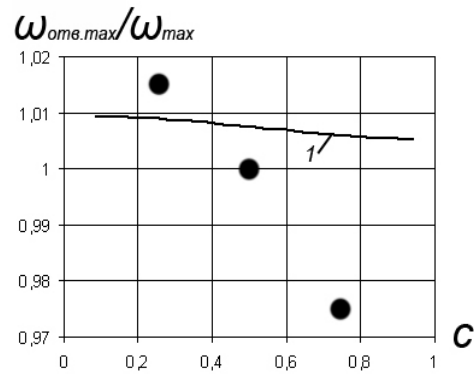


Рис. 19 Зависимость отношения максимального прогиба в в подкрепленной панели с отверстием к максимальному прогибу панели без отверстия $w_{отв. max} / w_{max}$ от изменения центра расположения отверстия c при $R = 24$ мм. Ребро не пробито. (кривая 1 – теория, ● – МКЭ)

В табл. 4 приведены значения действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв. max}$ подкрепленной консольной панели, полученные в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R = 24$ мм по длине панели при $P = 7750$ Па. Ребро не пробито. Радиус отверстия $R = 24$ мм.

Табл. 4. Сравнение действующих напряжений в заделке $\sigma_{отв. max}$ подкрепленной панели, ребро не пробито.

| Положение отверстия $R=24$ мм по размаху c | $\sigma_{отв. max}$ [МПа] Теория | $\sigma_{отв. max}$ [МПа] МКЭ | Разница в % |
|--|-------------------------------------|----------------------------------|-------------|
| 0,25 | 296 | 320 | 9,2 |
| 0,5 | 296 | 315 | 5,9 |
| 0,75 | 295 | 310 | 4,8 |

В табл. 5 приведены значения максимальных прогибов $w_{отв. max}$, полученных в теории и МКЭ при различных положениях центра отверстия $R = 4$ мм по длине панели при $P = 7750$ Па. Ребро не пробито.

Табл. 5. Сравнение максимальных прогибов $w_{отв. max}$ подкрепленной консольной панели, ребро не пробито.

| Положение отверстия $R=24$ мм по размаху c | $w_{отв. max}$ [мм] Теория | $w_{отв. max}$ [мм] МКЭ | Разница в % |
|--|-------------------------------|----------------------------|-------------|
| 0,25 | 25,22 | 20,3 | 19,7 |
| 0,5 | 25,19 | 19,9 | 21,2 |
| 0,75 | 25,14 | 19,5 | 22,6 |

Л и т е р а т у р а

1. Зайцев С.Е., Сафронов В.С. Аналитическая оценка несущей способности плоских пластин с отверстием при изгибе// Авиакосмическое приборостроение. – Изд-во «Научтехлитиздат». – 2010. – №7.
2. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости трехслойных пластин с отверстием при действии осевого сжатия// Известия РАН: «Механика твердого тела». – 1998. – № 2,
3. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости восстановленных трехслойных пластин при действии осевого сжатия// Известия РАН: «Механика твердого тела». – 1999. – № 3.
4. Сафронов В.С. Аналитическая оценка устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки с отверстием при комплексном нагружении// «Вестник МАИ», Изд-во МАИ-ПРИНТ, т.16, № 5, 2009.
5. Евдокимов Е.В., Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование несущей способности цилиндрической оболочки с вырезом// Известия РАН: «Механика твердого тела». –2007. – №1.
6. Сафронов В.С. Аналитическая оценка несущей способности восстанавливаемых силовых конструкций летательных аппаратов: Монография. – М.: МАИ – ПРИНТ, 2009. – 216 с.
7. Safronov, V.S., Turkin, I.K. Optimum design aircraft thin walled structures // Resent research and design progress an aeronautical engineering and its influence an education. Part III, Research bulletin, №12, 2001.
8. Сафронов В.С., Туркин И.К., Чан Ба Тан. Влияние компенсации отверстия на устойчивость пластины// «Полет». – М.: Изд-во Машиностроение, № 6, 2004.

R e f e r e n c e s

1. Zaytsev, S.E., Safronov, V.S. (2010). Analytical estimation of bearing ability of flat panels with the aperture at the bend, *Aerospace instrument making*, № 7.
2. Safronov, V.S., Turkin, I.K. (1998). Investigation of the stability of three-layer plates with a hole under the action of axial compression, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 2.
3. Safronov, V.S., Turkin, I.K. (1999). Investigation of the stability of restored sandwich plates under the action of axial compression, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 3.
4. Safronov, V.S. (2009). Analytical assessment of sustainability backed by a cylindrical shell with a hole at the complex loading, *Vestnik MAI*, Publishing House of the MAI-PRINT, vol.16, № 5.
5. Evdokimov, E.V., Safronov, V.S., Turkin, I.K. (2007). Investigation of the bearing capacity of cylindrical shells with a cut, Moscow: *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. "Solid Mechanics"*, № 1.
6. Safronov, V.S. (2009). Analytical evaluation of the carrying capacity of renewable power structures of aircraft: Monograph, Moscow: MAI - PRINT, 216 p.
7. Safronov, V.S., Turkin, I.K. Optimum design aircraft thin walled structures // Resent research and design progress an aeronautical engineering and its influence an education. Part III, Research bulletin, №12, 2001.
8. Safronov, V.S., Turkin, I.K., Than Ba Tan (2004). Impact on the stability of the compensation hole plate, *Flight*, Moscow: Publisher Engineering, № 6.

INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF CONSOLE PLATE WITH HOLES

Zaytsev S.E.*, Safronov V.S.**

* *OOO "ANT-Infurm"*, ** *Moskovskiy aviatsionniy institute (GTU)*

The paper presents an analytical model estimates the stress-strain state and stability of flat plates with a cutout, built on the basis of the energy method. The results of the calculations and their comparison with the results obtained by the finite element. Obtained in this study are calculated according to analytical.

KEY WORDS: Backed plate hole, the stress-strain state, finite element method, energy method.