

Динамика конструкций и сооружений

**ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ
ПО ЗАГЛУБЛЕННОМУ ТРУБОПРОВОДУ,
ВСЛЕДСТВИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ**

Г.В. ДЕНИСОВ, аспирант,

В.В. ЛАЛИН, д-р техн. наук, профессор

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет,

195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29, СПбГПУ, ИСФ, кафедра строительной механики и теории упругости, smitu@cef.spbstu.ru

В статье рассматривается динамическое поведение заглубленного участка трубопровода с конструктивным включением. Показано, что бегущая волна трансформируется в проходящую и отраженную волны. Для оценки данного эффекта получены аналитические зависимости. Показано, что наличие конструктивного включения приводит к уменьшению уровня динамического воздействия.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: трубопровод, конструктивное включение, балка, упругое основание, бегущая волна, формулы Френеля.

Настоящая статья является продолжением работы [1] и посвящена вопросам динамики подземных и наземных (в насыпи) трубопроводов, имеющих конструктивное включение. Актуальность работы подтверждается высокой аварийностью участков трубопроводов примыкающих к зданиям, другим трубопроводам или конструктивным включениям [2, 3] на фоне отсутствия нормативных требований по расчету прочности подобных участков [4].

В упомянутой работе [1] сооружение моделировалось балкой на упругом основании, при этом исследование было ограничено частотной областью не превышающей частоту отсечки. Настоящая же статья посвящена изучению динамического поведения трубопровода при частотах выше упомянутой характерной частоты [5].

Начнем с рассмотрения продольных колебаний трубопровода, при этом конструкцию будем схематизировать бесконечным стержнем на однородном упругом основании с продольной жесткостью k имеющим одиночное массовое включение M в точке $x = 0$. Пусть по данному стержню распространяется сейсмическая волна (волновые цуги) из отрицательной области с амплитудой u_0 и частотой ω (рис. 1).

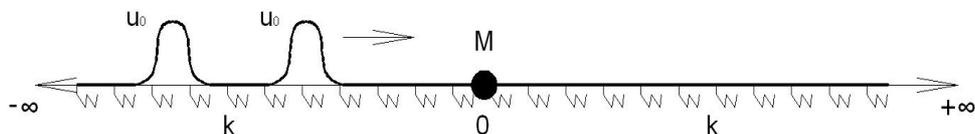


Рис. 1. Принятая схематизация. Постановка задачи

Уравнение малых продольных колебаний рассматриваемого стержня $u = u(x, t)$ примем в следующем виде:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания. А уравнение бегущей волны, удовлетворяющее (1), в виде:

$$u(x, t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)}, \quad \omega > \omega^*, \quad (2)$$

где $b = \sqrt{(m\omega^2 - k)/EA}$, ω^* – частота отсечки ($\omega^* = \sqrt{k/m}$), i – мнимая единица.

Для большей наглядности изложения, разобьем стержень на два участка, относительно массового включения. При этом будем использовать индекс j в обозначении $u_j(x, t)$, соответствующий области: $j = 1$ при $x < 0$, $j = 2$ при $x > 0$.

Решение уравнения (1) для каждого из участков стержня будем искать в виде суперпозиции волн, распространяющихся в противоположные стороны [5]: $u_j(x, t) = C_{1j} e^{i(bx - \omega t)} + C_{2j} e^{-i(bx + \omega t)}$, где $C_{1j, 2j}$ – коэффициенты, определяемые из начальных и граничных условий.

В [6] приводится вывод волнового уравнения для продольных волн в ступенчатом стержне. При этом показано, что при прохождении участка сопряжения исходная падающая волна трансформируется в проходящую и отраженную волны. Распространим полученные в [6] результаты на рассматриваемую задачу. Аналогично [6], представим волновое уравнение для левого участка стержня в виде:

$$u_1(x, t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)} - V u_0 e^{-i(bx + \omega t)}, \quad x < 0, \quad (3)$$

где первое слагаемое характеризует падающую волну ($C_{11} = u_0$), соответствующую (2), второе – отраженную ($C_{21} = -V u_0$), с неким коэффициентом отражения V . Следует отметить, в (3) знак минус перед вторым слагаемым принят из направления волны, что сделано из общефизических представлений вопреки знаку, принятому в [6].

Аналогично запишем волновое уравнение для другого участка стержня:

$$u_2(x, t) = W u_0 e^{i(bx - \omega t)}, \quad x > 0, \quad (4)$$

здесь W – коэффициент прохождения волны ($C_{12} = W u_0$), а второе слагаемое общего решения уравнения (1) не имеет физического смысла ($C_{22} = 0$), так как характеризует волну, движущуюся в отрицательную область от начала отчета.

Указанные выше коэффициенты отражения и прохождения определим из граничного условия, которое получим на основе вариационного принципа Гамильтона [7]:

$$\delta S(u(x, t)) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (K - U + A) dt \right) = 0, \quad (5)$$

здесь $K = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 m(\dot{u}_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} m(\dot{u}_2)^2 dx + \frac{1}{2} M(\dot{u}(0))^2$ – кинетическая энергия системы,

$U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (EA(u_1')^2 + k u_1^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (EA(u_2')^2 + k u_2^2) dx$ – потенциальная энергия системы,

$A = \int_{-\infty}^0 q(x) u_1 dx + \int_0^{+\infty} q(x) u_2 dx$ – работа внешних сил, здесь $q(x)$ –

некая сила, t_1, t_2 – произвольные моменты времени. Принимая в качестве главных граничных условий ограниченность решения на бесконечности и неразрывность контакта двух участков стержня в точке $x = 0$ ($u_1 = u_2$) получим:

$$\begin{aligned} \delta S(u(x, t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 + EAu_1'' - ku_1 + q(x))\delta u_1 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 + EAu_2'' - ku_2 + q(x))\delta u_2 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (-M\ddot{u}(0) - (u_1'(0) - u_2'(0))EA)\delta u(0)dt, \end{aligned} \quad (6)$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка стержня под действием силы $q(x)$, второе – правого. Таким образом, естественное граничное условие будет иметь вид:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EA \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \quad (7)$$

Решая систему уравнений из граничных условий, получим следующие формулы Френеля:

$$V = B - Di; \quad W = (1 - B) + Di, \quad (8)$$

где
$$B = \frac{(M\omega^2)^2}{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}, \quad D = \frac{2EA b M\omega^2}{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}.$$

Проанализируем вещественную часть (8). Увеличение массы включения M устремит коэффициент отражения V к единице, а коэффициент прохождения W к нулю, что соответствует отражению волн от заземленного конца стержня. В противном случае – коэффициент прохождения стремится к единице, а коэффициент отражения к нулю. Так же, обратим внимание на то, что указанные коэффициенты всегда положительны, то есть отраженная волна всегда меняет полярность на противоположную и уменьшает падающую, а проходящая – сохраняет полярность падающей волны (рис. 2).

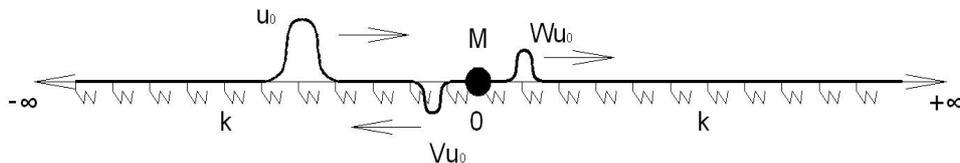


Рис. 2. Трансформация волн

После подстановки (8) в (3) и (4) и математических преобразований, представим действительную часть (3) и (4) в виде:

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(bx - \omega t) - Bu_0 \cos(bx + \omega t) + Du_0 \sin(bx + \omega t), \quad x < 0, \quad (9)$$

$$u_2(x, t) = (1 - B)u_0 \cos(bx - \omega t) - Du_0 \sin(bx - \omega t), \quad x > 0. \quad (10)$$

Обратим внимание на наличие дополнительного слагаемого в (9) и (10), которое приводит к сдвигу фаз суммарного воздействия ввиду колебания конструктивного включения. Для наглядности, (2), (9) и (10) представим на рис. 3.

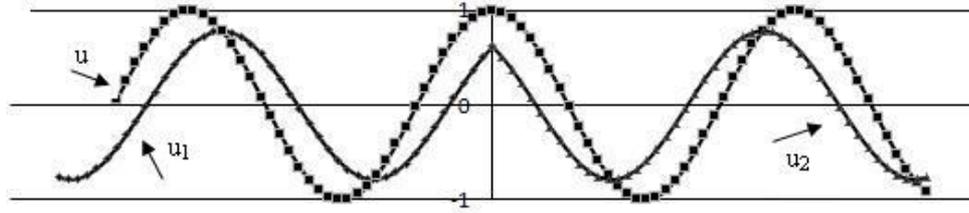


Рис. 3. Падающая и трансформированная продольная волна

Перенесем полученные результаты на условия рассматриваемой задачи (рис.4).

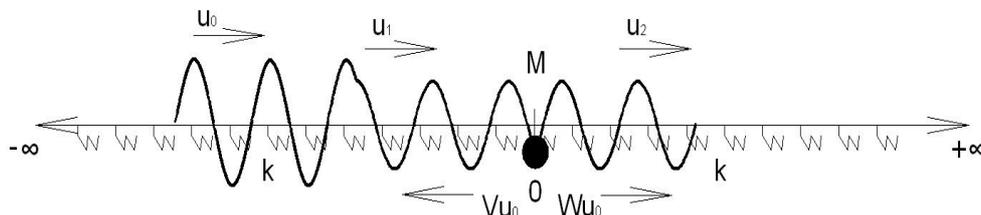


Рис. 4. Волновое поле в стержне

Отметим, что отраженная волна Vu_0 распространяется навстречу падающей u_0 , уменьшая ее амплитуду. Это приводит к снижению уровня динамического воздействия в целом.

Амплитуду волн u_1 и u_2 определим из (10) используя необходимые и достаточные условия экстремума функции. В результате, значение x , соответствующее максимальному значению (10), составит: $x = -\arctg(D/(1-B))$.

Выполним количественную оценку. Будем рассматривать участок трубопровода с погонной массой $m = 1,3$ т/м и продольной жесткостью $EA = 8 \cdot 10^9$ Н (труба 1220x12), имеющий конструктивное включение с $M = 5$ т. Жесткость упругого основания примем $k = 5 \cdot 10^7$ Па (песчаные грунты), а частоту колебаний $\omega = 200,0$ 1/с. Тогда $b = 0,02$ 1/м, $B = 0,39$ и $D = 0,48$. Таким образом, амплитуда исходной падающей волны уменьшается на 22 %.

На основании сказанного можно заключить, что наличие конструктивного включения приводит к уменьшению уровню динамического воздействия от бегущей волны продольных смещений.

Далее рассмотрим поперечные колебания. Схематизацию конструкции примем подобной представленной на рис. 1. Падающую волну будем задавать уравнением (2). Уравнение малых поперечные колебаний балки Бернулли-Эйлера $u = u(x,t)$ на упругом основании имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (11)$$

где E – модуль упругости материала балки, I – момент инерции балки, m – погонная масса балки, k – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Проводя аналогию с продольными колебаниями, запишем известные решения (11) для положительной и отрицательной областей стержня в виде:

$$u_1(x, t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)} - V u_0 e^{-i(bx + \omega t)} - V^* u_0 e^{(bx - i\omega t)}, \quad (12)$$

$$u_2(x, t) = W u_0 e^{i(bx - \omega t)} + W^* u_0 e^{-(bx + i\omega t)}, \quad (13)$$

здесь $b = \sqrt[4]{(m\omega^2 - k)/EI}$, V^* , W^* – коэффициенты отражения и прохождения для экспоненциально затухающих волн, V и W – соответствуют ранее принятым обозначениям. Данные коэффициенты, как и ранее, определим из граничных условий, которые получим на основе вариационного принципа Гамильтона [7]. Принимая в качестве главных граничных условий ограниченность решений на бесконечности, неразрывность контакта и равенство прогиба двух участков стержня в точке $x = 0$ ($u_1 = u_2$ и $u_1' = u_2'$), получим:

$$\begin{aligned} \delta S(u(x, t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 - EIu_1^{IV} - k_1 u_1 + q(x)) \delta u_1 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 - EIu_2^{IV} - k_2 u_2 + q(x)) \delta u_2 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (-M\ddot{u}(0) - (u_2'''(0) - (u_1'''(0))EI) \delta u(0) dt - \int_{t_1}^{t_2} ((u_1''(0) - (u_2''(0))) \delta u'(0) EI dt, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка стержня под действием силы $q(x)$, второе – правого. Таким образом, естественные граничные условия будут иметь вид:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EI \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0}. \quad (15)$$

Решая систему уравнений из главных и естественных граничных условий (15) получим:

$$V = H - Ri; \quad V^* = R + Hi; \quad (16)$$

$$W = (1 - H) + Ri, \quad W^* = -R - Hi,$$

$$\text{где } H = \frac{(M\omega^2)^2}{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3 M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}, \quad R = \frac{M\omega^2(4EIb^3 + M\omega^2)}{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3 M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}.$$

Подставим (16) в (12) и (13). После математических преобразований выражение действительной части (12) и (13) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & u_0 \cos(bx - \omega t) - H u_0 \cos(bx + \omega t) + R u_0 \sin(bx + \omega t) - \\ & - R u_0 e^{bx} \cos \omega t - H u_0 e^{bx} \sin \omega t, \quad x < 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = & (1 - H) u_0 \cos(bx - \omega t) - R u_0 \sin(bx - \omega t) - \\ & - R u_0 e^{-bx} \cos \omega t - H u_0 e^{-bx} \sin \omega t, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь, так же как и в (9) и (10), содержится дополнительное слагаемое, обусловленное колебанием конструктивного включения. Вместе с тем, ввиду более высокого порядка уравнения (11) по сравнению с (1), выражения (17) и (18) со-

держат экспоненциально затухающие слагаемые в окрестности точки включения (рис. 5).

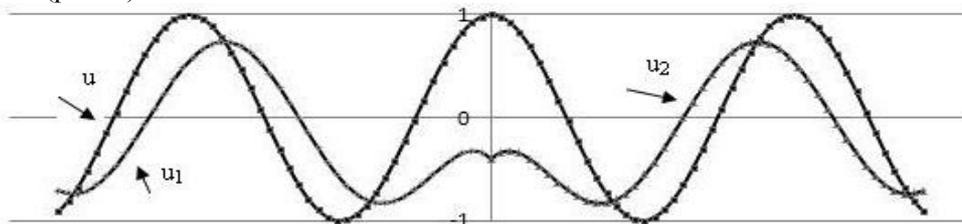


Рис. 5. Падающая и трансформированная поперечная волна

Исключая экспоненциальные слагаемые, амплитуда волн u_1 и u_2 будет определяться по аналогии с продольными колебаниями.

Выполним количественную оценку. Будем рассматривать участок трубопровода с погонной массой $m = 1,3$ т/м и изгибной жесткостью $EI = 1,5 \cdot 10^9$ Н*м² (труба 1220 x 12), имеющий конструктивное включение с $M = 5$ т. Жесткость упругого основания примем $k = 1 \cdot 10^8$ Па (песчаные грунты), а частоту колебаний $\omega = 280,0$ 1/с. Тогда $b = 0,20$ 1/м, $H = 0,45$, $R = 0,50$. Таким образом, амплитуда исходной падающей волны уменьшается на 26 %.

На основании сказанного можно так же заключить, что наличие конструктивного включения приводит к уменьшению уровню динамического воздействия от бегущей волны поперечных смещений.

Заключение

В ходе исследования были определены волновые поля, возникающие вследствие трансформации бегущих волн, для заглубленных трубопроводов содержащих конструктивное включение. При этом были получены аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения волн. Показано, что наличие конструктивного включения приводит к некоторому уменьшению уровня динамического воздействия.

Л и т е р а т у р а

1. Денисов Г.В., Лалин В.В. Особенности поведения подземных трубопроводов с конструктивными включениями при динамических воздействиях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 54-58.
2. Chian S.C., Madabhushi S.P.G. Effect of buried depth and diameter on uplift of underground structures in liquefied soils // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2012. Vol. 41. Pp. 181–190.
3. Manshoori M. R. Evaluation of Seismic Vulnerability and Failure Modes for Pipelines // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. Pp. 3042–3049.
4. СНиП 2.05.06-85* Магистральные трубопроводы.
5. Zhanga Guo-Dong, Guo Bao-Zhu. On the spectrum of Euler–Bernoulli beam equation with Kelvin–Voigt damping // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2011. Vol. 374. Pp. 210–229
6. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335 с.
7. Карпов В.В., Сальников А.Ю. Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций: учеб. пособие / СПбГАСУ. – СПб., 2009. 75 с.

References

1. Denisov, G.V., Lalin, V.V. (2012). The peculiarities of behavior of underground pipelines with constructive inclusions under dynamic action, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, № 4, pp. 54-58.

2. Chian, S.C., Madabhushi, S.P.G. (2012). Effect of buried depth and diameter on uplift of underground structures in liquefied soils, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.41, pp.181–190.
3. Manshoori, M. R. (2011). Evaluation of Seismic Vulnerability and Failure Modes for Pipelines, *Proc. Engineering*, Vol. 14, pp. 3042–3049.
4. SNIP 2.05.06-85* Magistralnie truboprovodi.
5. Zhanga, Guo-Dong, Guo, Bao-Zhu. (2011). On the spectrum of Euler–Bernoulli beam equation with Kelvin–Voigt damping, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 374, pp. 210–229.
6. Brehovskih, L.M., Goncharov, V.V. (1982). Introduction into Mechanics of Solid Bodies, Moscow: Nauka, 335 p.
7. Karpov, V.V., Salnikov, A.Yu. (2009). Variation methods and variation principles of mechanics in analysis of building structures, SPb: SPbFASU, 75 p.

TRANSFORMATION OF WAVES SPREADING ALONG BURIED PIPELINE BECAUSE OF CONSTRUCTIVE INCLUSIONS

Denisov, G.V., Lalin, V.V.

Sankt-Peterburgskiy Gosudarstvenniy Politehnicheskiy Universitet

The paper considers the dynamic behavior of buried pipeline with constructive inclusion. It is shown that a traveling wave is transformed into transmitted and reflected waves. The effect of the analytical dependence is assessed. It is shown that the constructive inclusion reduces the level of dynamic impact.

KEY WORDS: piping, structural inclusion, beam, elastic foundation, traveling wave, the Fresnel formulas.

