

Расчет машиностроительных конструкций

**ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ЛОПАТКИ  
РОТОРНОГО ГРУНТОМЕТАТЕЛЯ**

ШАТОХИН В.М., д-р техн. наук, профессор,

СЕМКИВ О.М., канд. техн. наук,

ПОПОВА А.Н., аспирант

*Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,*

*Национальный университет гражданской защиты Украины, Украина*

*Метод определения оптимальной формы лопатки роторного грунтометателя базируется на решении задачи о брахистохроне для поля центробежных сил инерции. Построен функционал времени в полярной системе координат и записано соответствующее уравнение Эйлера; получен его первый интеграл, для которого найдено аналитическое решение. Представлены результаты применения теории для нахождения оптимальной формы лопатки грунтометателя.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** оптимальная форма, роторный грунтометатель, уравнение Эйлера, движение частиц грунта, задача о брахистохроне в поле центробежных сил.

**Постановка проблемы.** При создании ряда технических (технологических) устройств возникает задача выбора оптимальной формы направляющих, в которых движутся некоторые частицы под действием центробежных сил. В частности, актуальной является проблема создания грунтометальных механизмов, используемых для гашения пожаров в местностях, где отсутствуют источники воды [1-5]. Рядом достоинств обладают роторные грунтометатели [2-5], которые грунт в зону возгорания выбрасывают с помощью лопаток, расположенных на вращающемся роторе. От формы и расположения лопаток существенно зависят технологические характеристики устройств. Исследования по решению этих задач имеют актуальный характер.

**Анализ основных исследований и публикаций.** В работах [2, 3, 5] проведены комплексные исследования по выбору рациональных параметров грунтометателя с прямыми лопатками. Перспективным представляется использование в грунтометателях криволинейных лопаток [4]. Методы выбора их формы и анализа движения частиц грунта по ним в настоящее время разработаны не достаточно. Задача выбора оптимальной формы лопатки может быть схематизирована, как задача определения формы кривой в поле центробежных сил инерции, которая обеспечивает минимальное время движения (задача о брахистохроне в поле центробежных сил).

Известно, что классическая задача о брахистохроне для однородного поля сил тяжести была отправной точкой при создании вариационного исчисления [6]. Решения аналогичных задач для случая центральной силы притяжения и постоянной по величине центральной силы отталкивания предпринимались в [7]. В статье [8] изложен метод нахождения траектории точки, минимизирующей время движения при действии центробежной силы инерции.

**Постановка задачи.** Сформулировать задачу о брахистохроне для поля центробежных сил инерции. Разработать метод решения соответствующего функционала времени. Провести расчеты траекторий лопаток грунтометателя оптимальной формы.

**Основная часть.** Решение задачи и вывод функционала времени движения удобно проводить в полярной системе координат.

**Построение функционала времени.** Пусть точки  $A$  и  $B$  расположены в центральном поле сил отталкивания – центробежных сил с центром в точке  $O$  (рис. 1). Проведем через точки  $A$ ,  $B$  и центр отталкивания плоскость и рассмотрим кривые, соединяющие эти точки и расположенные в данной плоскости. Выберем из этих кривых такую, что материальная точка, выходящая из  $A$  со скоростью  $v_0 = 0$ , двигаясь только под действием центробежной силы, достигнет точки  $B$  за минимальное время.

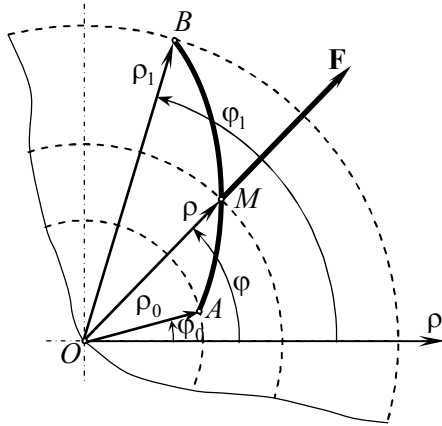


Рис. 1. Схема для построения брахистохроны в поле центробежных сил

Введем полярную систему координат  $\rho, \varphi$  с центром в указанной точке. Текущие координаты точки  $M$  обозначим, как  $\rho$  и  $\varphi$ ; координаты точек  $A$  и  $B$  пусть будут соответственно  $(\rho_0, \varphi_0)$  и  $(\rho_1, \varphi_1)$ . Проекция центробежной силы инерции материальной точки, связанной с вращающимся телом, на направление радиуса  $\rho$  имеет вид

$$F_\rho = ma_\omega = m\omega^2 \rho, \quad (1)$$

где  $m$  – масса точки;  $a_\omega = \omega^2 \rho$  – осреднительное (нормальное) ускорение;  $\omega$  – угловая скорость. Тогда выражение для потенциальной энергии центробежной силы инерции можно представить так [9]:

$$\Pi = \int_\rho^0 F_\rho d\rho = m\omega^2 \int_\rho^0 \rho d\rho = -\frac{m\omega^2}{2} \rho^2. \quad (2)$$

При записи формулы (2) принималось, что начальным положением для определения потенциальной энергии является отталкивающий центр (точка  $O$ ), в котором потенциальная энергия равна нулю.

В равномерно вращающейся вокруг неподвижной оси системе координат, если пренебречь силами трения и сопротивления, имеет место закон сохранения энергии в относительном движении [9]

$$T + \Pi = h = const, \quad (3)$$

где  $T = mv^2 / 2$  – кинетическая энергия точки в относительном движении по отношению к вращающейся системе координат;  $h = -m\omega^2 \rho_0^2 / 2$  – постоянная энергии.

В дальнейшем полагаем, что в формуле (3) учитывается только потенциальная энергия центробежной силы инерции. С точки зрения приложений это наиболее важный случай. В технологических устройствах угловая скорость такова, что влияние сил тяжести на движение точки незначительно. При анализе движения в горизонтальной плоскости эта оговорка вообще оказывается излишней. С учетом выражения (2) формула (3) приобретает вид

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2}{2} \rho^2 = -\frac{m\omega^2}{2} \rho_0^2. \quad (4)$$

Откуда имеем для скорости точки

$$v = \omega \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \quad (\rho \geq \rho_0). \quad (5)$$

Из определения алгебраической величины скорости (проекции скорости на касательную к траектории)  $v = v_\tau = ds/dt$ , выражения для квадрата дифферен-

циала дуги в полярных координатах  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$  и формулы (5) следует, что

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\omega\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi, \quad \text{где } \rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}. \quad (6)$$

Заметим, что при отсчете дуги в направлении движения точки дифференциал пути будет совпадать с дифференциалом дуговой координаты  $ds$ , а модуль скорости точки с ее алгебраической величиной  $v = v_\tau$ .

Интегрируя, получим функционал

$$\tau[\rho(\varphi)] = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}} d\varphi. \quad (7)$$

**Поиск экстремума функционала.** Для подынтегральной функции введем следующее обозначение

$$P = P(\rho, \rho') = \frac{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}. \quad (8)$$

На кривой, реализующей экстремум рассматриваемого функционала, должно выполняться условие

$$P_\rho - \frac{d}{d\varphi} P_{\rho'} \equiv 0, \quad (9)$$

где  $P_\rho, P_{\rho'}$  – производные от  $P$  соответственно по  $\rho$  и  $\rho'$ .

Это условие вытекает из необходимых условий экстремума функционала (7) [6]. Таким образом, искомая функция  $\rho = \rho(\varphi)$  является решением дифференциального уравнения второго порядка (9), или в развернутом виде

$$P_\rho - P_{\varphi\rho'} - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad \text{где } \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}. \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением Эйлера. В рассматриваемом случае  $P$  зависит лишь от  $\rho$  и  $\rho'$ , поэтому фактически оно является более компактным

$$P_\rho - P_{\rho\rho'}\rho' - P_{\rho'\rho'}\rho'' = 0, \quad (11)$$

так как  $P_{\varphi\rho'} = 0$ . Если умножить почленно это уравнение на  $\rho'$ , то левая часть превращается в точную производную

$$\frac{d}{d\varphi} (P - \rho'P_{\rho'}).$$

Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$P - \rho'P_{\rho'} = \frac{1}{C}. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае  $P_{\rho'} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}}$ , поэтому формула (12) приобретает вид

$$\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} = \frac{1}{C}. \quad (13)$$

Из выражения (13) после упрощений получаем,

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)} - 1}. \quad (14)$$

Дифференциальное уравнение (14) допускает аналитическое решение (гроздкие выкладки здесь не приводятся)

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} z + \frac{1}{z} + C_1, & C^2 = 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z - \sqrt{C^2-1}}{z + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1, \end{cases} \quad (15)$$

где 
$$z = \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Для нахождения постоянных  $C$  и  $C_1$  с учетом (16) выпишем краевые условия:

при  $\varphi = \varphi_0$      $\rho = \rho_0$ ,     $z = z(\rho_0) = z_0 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_0^2}{\rho_0^2 - \rho_0^2} - 1} = \infty$ ;    (17)

при  $\varphi = \varphi_1$      $\rho = \rho_1$ ,     $z = z(\rho_1) = z_1 = \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1}. \quad (18)$

На левой границе соотношения (15) приобретают вид

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 = 1, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 < 1, \\ \frac{\pi}{2} + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (19)$$

Из выражений (19) следует, что

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 = 1, \\ \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2}, & C^2 < 1, \\ \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (20)$$

На правой границе соотношения (15) дают

$$\varphi_1 = \begin{cases} \operatorname{arctg} z_1 + \frac{1}{z_1} + C_1, & C^2 = 1, \\ \operatorname{arctg} z_1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}} + C_1, & C^2 < 1, \\ \operatorname{arctg} z_1 - \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right| + C_1, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично (20) для  $C_1$  из выражения (21) имеем

$$C_1 = \begin{cases} \varphi_1 - \operatorname{arctg} z_1 - \frac{1}{z_1}, & C^2 = 1, \\ \varphi_1 - \operatorname{arctg} z_1 + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{z_1}{\sqrt{1-C^2}}, & C^2 < 1, \\ \varphi_1 - \operatorname{arctg} z_1 + \frac{1}{2\sqrt{C^2-1}} \ln \left| \frac{z_1 - \sqrt{C^2-1}}{z_1 + \sqrt{C^2-1}} \right|, & C^2 > 1. \end{cases} \quad (22)$$

Для практики наибольший интерес представляют случаи, когда  $C^2 \square 1$  и  $C^2 \square 1$ .

**Расчетные исследования по выбору оптимальной формы лопаток грунтометателя.** На рис. 2 показана схема грунтометателя: 1– ступица; 2– кольцо; 3– спица; 4– криволинейная лопатка. Предполагается, что метатель вращается с угловой скоростью  $\omega$  против хода часовых стрелок. Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  представляют собой радиусы окружностей, проходящих через заднюю и переднюю кромки лопатки. В изложенной выше теории им соответствуют полярные радиусы  $\rho_0$  и  $\rho_1$ . Ограничимся в данной статье анализом решения при  $C^2 \square 1$ . Для нахождения константы  $C$  воспользуемся трансцендентным уравнением, следующим из сравнения правых частей соответствующих строк выражений (22) и (20) при учете краевого условия (18)

$$f(x) = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x\rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} - \varphi_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \frac{\pi}{2} = 0, \quad (23)$$

где  $x = C^2$ .

В среде MathCAD [10] при наличии графика  $f(x)$  (рис. 3) корень функции удобно находить с использованием встроенной функции **root(f(x),x,a,b)**.

Для корня  $f(x)$  (устройство с параметрами:  $\rho_0 = 0,496$  м,  $\rho_1 = 0,632$  м,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 20^\circ$ ) получено значение  $x^* = 0,393 < 1$ , которому соответствует  $C = \sqrt{x^*} = 0,627$ . В соответствие со вторым выражением (20) или (22) при учете (18) для  $C_1$  имеем

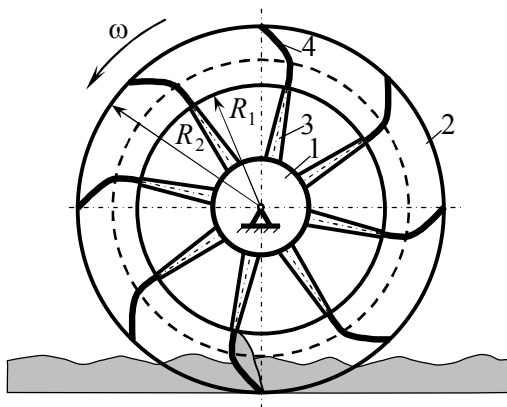


Рис. 2. Схема грунтометательного механизма

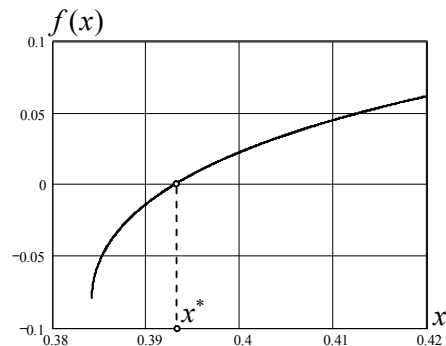


Рис. 3. График функции  $f(x)$

$$C_1 = \varphi_0 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\right) \frac{\pi}{2} = \varphi_1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho_1^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} - 1} = 0,445.$$

Найденные значения постоянных  $C$  и  $C_1$  с помощью формул (15) и (16) позволяют записать следующее выражение для искомой функции

$$\varphi(\rho) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_0^2} - 1} + C_1. \quad (24)$$

График этой функции представлен на рис. 4, а; более удобный для анализа график обратной функции  $\rho(\varphi)$  – на рис. 4, б.

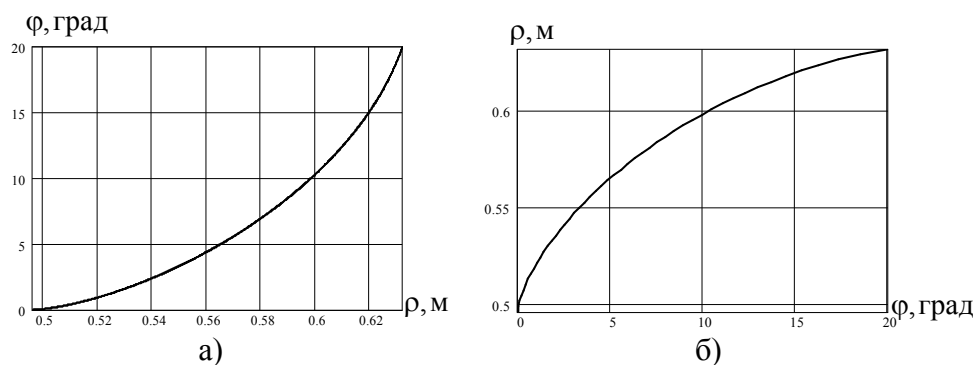


Рис. 4. Графики функций: а) –  $\varphi(\rho)$ ; б) –  $\rho(\varphi)$

Приведем графики зависимостей  $\rho(\varphi)$  в полярной системе координат (рис. 5) для предельных значений  $\rho_0^*$ , которые еще обеспечивают для построения решений возможность использования формулы (24) ( $C^2 \leq 1$ ). Значение  $\rho_1$  принималось равным 0,632 м, а угол  $\varphi_1$  кратным  $20^\circ$ .

**Выводы.** 1. Разработан метод решения задачи о брахистохроне для точки, движущейся под действием центробежной силой инерции. 2. Построен функционал времени в полярной системе координат. 3. Получен первый интеграл уравнения Эйлера в форме дифференциального уравнения первого порядка и найдено его аналитическое решение. 4. Приведены результаты расчетов траекторий для выбора оптимальной формы лопатки грунтometателя.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на детальное изучение зависимости свойств оптимальных траекторий от параметров; построение оптимальных траекторий при учете сил трения.

#### Л и т е р а т у р а

1. Семків О.М., Шатохін В.М. Розрахунок робочого органа ланцюгового грунтometального механізму // Міжвідомчий науково-технічний збірник “Прикладна геометрія та інженерна графіка”. Випуск 87.– К.: КНУБА, 2011.– С. 303-312.

2. Семків О.М., Попова А.М. Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного грунтometальника // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– Вип. 4.– Т. 54.– С. 126-134.

3. Попова А.М., Шатохін В.М. Дослідження руху частки ґрунту по лопатці: результати комп’ютерних експериментів // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету.– Мелітополь: ТДАТУ, 2012.– Вип. 4.– Т. 54.– С. 135-144

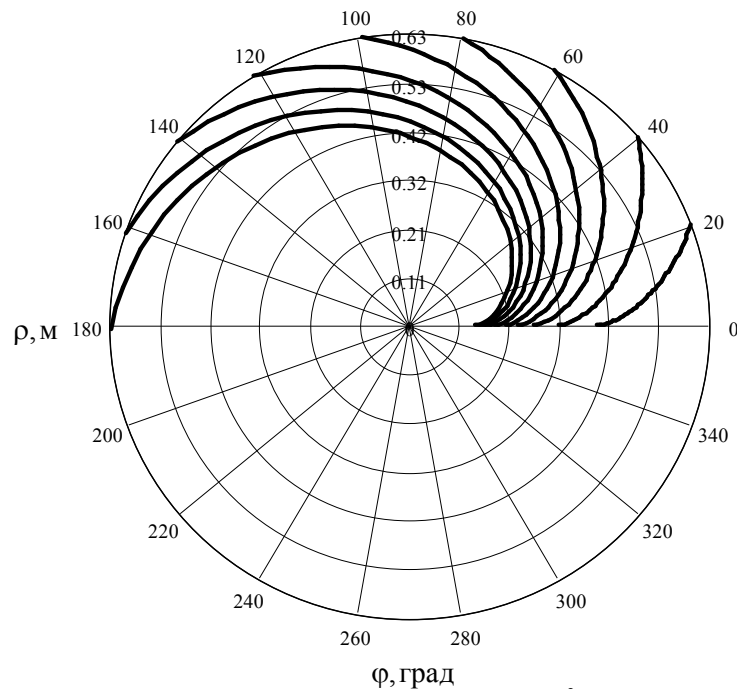


Рис. 5. Графики функций  $\rho(\varphi)$  для предельных значений  $\rho_0^*$  ( $C^2 \square 1$ ) при разных значениях  $\varphi_1$

4. Семкив О.М., Шатохин В.М., Попова А.Н. Исследование движения частицы грунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центробежных сил инерции // Міжвідомчий науково технічний збірник "Технічна естетика і дизайн". – К.: КНУБА. – 2012. – Вип. 11. – С. 165-174.

5. Шатохин В.М., Шатохина Н.В., Попова А.Н. Исследование движения частиц грунта со случайными параметрами, выбрасываемых роторным грунтометателем // Міжвідомчий науково технічний збірник "Прикладна геометрія та інженерна графіка". – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 383-390.

6. Эльсгольц Л.В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 279 с.

7. Геронимус Я.Л., Голинский Б.Л. Вариационные методы решения задач оптимизации: Учеб. пособие. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1987. – 114 с.

8. Шатохин В.М., Шатохина Н.В. Оптимальные траектории движения точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2012. – Вып. 4/7 (58). – С. 9-14.

9. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В 2-х томах. т. II. Динамика. – М.: Наука, 1983. – 640 с.

10. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. – СПб.: ВХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

#### ON OPTIMUM FORM OF GROUND-THROWER'S BLADE

V.M. Shatokhin, O.M. Semkiv, A.N. Popova

Kharkov National University of Building and Architecture, Kharkov, Ukraine;

National University of Public Defense of Ukraine, Ukraine

Method of determination of ground-thrower's blade optimum form is based on solution of brachistochrone problem for the field of centrifugal inertial forces. Blade of optimal shape, called brachistochrone, in the centrifugal force field, which equation had been obtained in polar coordinate system, is considered. The results of kinematic behaviour researches of moving particle are given.

KEY WORDS: Optimal form, ground-thrower's blade, the Euler' equation, brachistochrone problem.