

Теория упругости

ВЛАГОУПРУГОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОГО НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВЛАЖНОСТНОМ РЕЖИМЕ

В.И. АНДРЕЕВ, доктор технических наук, профессор,

А.С. АВЕРШЬЕВ, магистрант

Московский государственный строительный университет,
129337 Москва, Ярославское шоссе, д.26

Приведено решение осесимметричной нестационарной задачи влагопереноса в толстостенной трубе, моделирующей часть грунтового массива, при распространении влаги от внутренней поверхности к периферии. На втором этапе с учетом медленного влагопереноса решается квазистационарная задача влагоупругости для неоднородного тела, что обусловлено неравномерным изменением деформационных характеристик грунта при насыщении его влагой. Термин влагоупругость используется по аналогии с термином термоупругость, поскольку наличие в материале влаги вызывает вынужденные деформации аналогичные температурными в задачах тепло- и массопереноса используется одинаковый математический аппарат.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тепломассоперенос, влагоупругость, неоднородность, нестационарная задача, грунт, глина, толстостенная оболочка.

При разрывах трубопроводов, подтоплениях и других аварийных воздействиях происходит распространение влаги в массив грунта, что приводит к возникновению вынужденных деформаций, что приводит к вспучиванию грунтов, а напряженное состояние к провалам грунта и обрушению зданий. Такие явления характерны для глинистых грунтов, лессовых пород и пр. Таким образом, решение задач определения напряженно-деформированного состояния под воздействием влаги является актуальным. Известны некоторые решения классических задач влагоупругости для однородных тел [1]. Однако, как показывают экспериментальные исследования, например [2, 3], под воздействием влаги изменяются деформационные характеристики грунтов (в первую очередь модуль деформации). При неравномерном распределении влаги это делает массив неоднородным, и приводит к необходимости решать задачи механики неоднородных тел. В работах [4, 5] получены решения модельных задач влагоупругости в стационарной постановке с учетом зависимости модуля деформации от влажности. Показано, что напряженное состояние неоднородного массива существенно отличается от того, что имеет место в расчете для постоянного модуля деформации. Задачи тепломассопереноса изучаются во многих отраслях техники, в том числе при производстве и расчетах на прочность строительных конструкций [10-12]

Нестационарная задача влагопереноса в толстостенной трубе

Нестационарный процесс влагопереноса описывается вторым законом Фика:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_w \nabla^2 w, \quad (1)$$

где c_w – коэффициент влагопроводности, вычисляемый по формуле [3]:

$$c_w = \frac{k_w \alpha (1 + e)}{\gamma_s}.$$

Здесь $k_w = k_f (w / w_s)^i$ – коэффициент фильтрации несплошного потока, k_f – коэффициент фильтрации сплошного потока, w_s – влажность насыщенного

грунта, i – относительная льдистость, α – коэффициент пропорциональности, $e = n/(1-n)$ – коэффициент пористости грунта, n – пористость грунта, γ_s – плотность частиц грунта.

Рассматривается цилиндрический массив с внутренним радиусом $a = 0,25$ м и внешним $b = 2,5$ м. Задача решена при следующих начальных и граничных условиях:

$$w(r,0) = w_b = 0,2; \quad w(a,t) = w_a = 0,363; \quad w(b,t) = w_b = 0,2. \quad (2)$$

Уравнение (1) с учетом осевой симметрии принимает вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_w \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right). \quad (3)$$

Для решения данного уравнения сделаем следующую замену[6]:

$$w(r,t) = \theta(r) + \vartheta(r,t) \quad (4)$$

где $\theta(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} = 0 \quad (5)$$

и следующим граничным условиям:

$$\theta(a) = w_a, \quad \theta(b) = w_b. \quad (6)$$

Функция $\vartheta(r,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = c_w \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad (7)$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$\vartheta(r,0) = w_b = 0,2; \quad (8)$$

$$\vartheta(a,t) = w(a,t) - \theta(a) = 0; \quad \vartheta(b,t) = w(b,t) - \theta(b) = 0.$$

В этом случае замена (4) будет тождественна искомой функции.

Используя (5) и (6), найдем функцию $\theta(r)$:

$$\theta(r) = \frac{w_b \ln(r/a) - w_a \ln(r/b)}{\ln(b/a)}. \quad (9)$$

Представив функцию $\vartheta(r,t)$ в виде

$$\vartheta(r,t) = R(r) \cdot T(t), \quad (10)$$

из уравнения (7) получим:

$$R \cdot T_t' = c_w (R_{rr}'' \cdot T + R_r' \cdot T/r),$$

или после преобразований

$$\frac{1}{c_w} \frac{T'}{T} = \frac{R'' + R'/r}{R}.$$

Левая часть полученного равенства зависит только от t , а правая только от r . Равенство будет справедливо только тогда, когда обе части равенства не зависят ни от t , ни от r , т.е.

$$\frac{1}{c_w} \frac{T'}{T} = \frac{R'' + R'/r}{R} = A = const.$$

Константу A заменим выражением $-k^2$ для того, чтобы показать, что она является отрицательной. Если бы она была положительной, то функция влажности неограниченно возрастала бы во времени, что противоречит рассматриваемому процессу. Решая два полученных обыкновенных дифференциальных уравнения, найдем:

$$T(t) = B \cdot \exp(-k^2 c_w t); \quad R(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr).$$

Таким образом, функция $\vartheta(r, t)$ примет вид

$$\vartheta(r, t) = [C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr)] \exp(-k^2 c_w t).$$

Из граничных условий (8) следуют следующие равенства:

$$\begin{cases} C_1 J_0(ka) + C_2 Y_0(ka) = 0; \\ C_1 J_0(kb) + C_2 Y_0(kb) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) будет иметь нетривиальное решение, если ее определитель будет равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_0(ka) & Y_0(ka) \\ J_0(kb) & Y_0(kb) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad J_0(ka)Y_0(kb) - J_0(kb)Y_0(ka) = 0. \quad (12)$$

Бесселевы функции являются аperiodическими и имеют бесконечное количество корней. Поэтому функция $\vartheta(r, t)$ будет представлять собой фундаментальную систему решений, а собственные числа этой системы можно найти из (12). Окончательное выражение для $\vartheta(r, t)$ представляется в виде ряда:

$$\vartheta(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 J_0(k_n r) + C_2 Y_0(k_n r)] \exp(-k_n^2 c_w t).$$

Теперь с учетом (4) и (9) можно написать выражение для $w(r, t)$:

$$w(r, t) = \frac{w_b \ln(r/a) - w_a \ln(r/b)}{\ln(b/a)} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_1 J_0(k_n r) + C_2 Y_0(k_n r)] \exp(-k_n^2 c_w t).$$

Выразив при помощи первого равенства (11) C_2 через C_1 , а также воспользовавшись свойствами бесселевых функций [7], выпишем в общем виде выражение для функции влажности:

$$w(r, t) = \frac{w_b \ln(r/a) - w_a \ln(r/b)}{\ln(b/a)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_0(k_n r) \exp(-k_n^2 c_w t)}{J_0^2(k_n a) + Y_0^2(k_n b)} \times \left\{ \frac{\pi^2 k_n^2}{2} J_0(k_n b) \int_a^b r f(r) V_0(k_n r) dr - \pi J_0(k_n b) [w_b J_0(k_n a) - w_a Y_0(k_n b)] \right\},$$

где $V_0(k_n r) = J_0(k_n r)Y_0(k_n a) - J_0(k_n a)Y_0(k_n r)$, а $f(r)$ – функция начального распределения влажности. Так как в нашем случае $f(r) = w_b = const$, то функция влажности примет вид:

$$w(r, t) = \frac{w_b \ln(r/a) - w_a \ln(r/b)}{\ln(b/a)} + \pi (w_a - w_b) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k_n^2 c_w t) \times J_0^2(k_n b) \frac{J_0(k_n r)Y_0(k_n a) - J_0(k_n a)Y_0(k_n r)}{J_0^2(k_n a) + J_0^2(k_n b)}. \quad (13)$$

В программном комплексе Matlab R2010b было смоделировано распределение влажности вдоль радиуса во времени в виде поверхностей. Сетка разбиения включает в себя 30 разбиений вдоль радиуса и 20 шагов по времени, причем по времени расчет проводился с неравномерным шагом. Ниже приводятся результаты расчетов, полученные при следующих исходных данных: Для рассматриваемого типа глины [1, 9] $k_w = 5 \cdot 10^{-7}$ м/с, $k_f = 5 \cdot 10^{-7}$ м/с, $w_s = 0,363$, $i = 0$, $\alpha = 6,468$ кН/м², $e = 1$, $n = 0,5$, $\gamma_s = 26,95$ кН/м³. Отсюда получаем $c_w = 2,4 \cdot 10^{-7}$ м²/с.

На рис. 1 представлено распределение влажности вдоль радиуса в различные моменты времени при числе членов ряда, входящего в (13) $N=N_{\max}=100$. При $t = 10^7$ с распределение влажности практически устанавливается и совпадает с решением, соответствующим стационарной задаче [5].

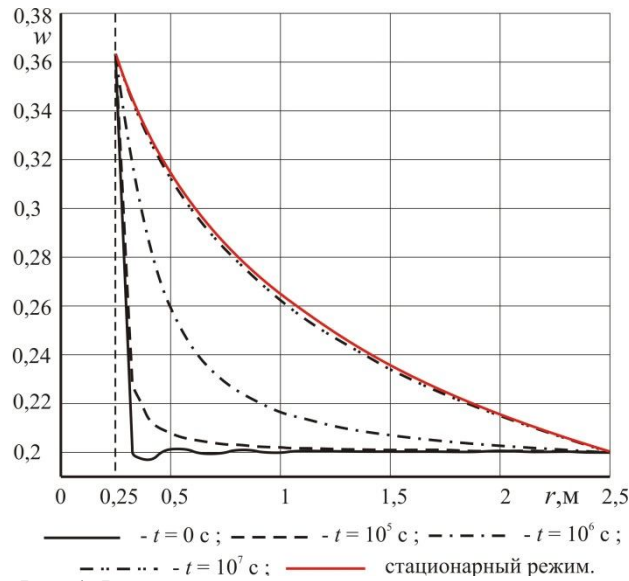


Рис. 1. Распределение влажности вдоль радиуса в различные моменты времени.

Расчет напряженного состояния

Поскольку скорость распространения поля влажности существенно меньше скорости распространения упругих волн в рассматриваемой среде, а порождающим фактором НДС является только поле влажности, то можно считать, что частицы среды в каждый момент времени перемещаются мгновенно. Это означает, что для вывода разрешающего уравнения можно использовать уравнения статики, а время t будет входить в него как параметр. Разрешающее уравнение осесимметричной задачи теории упругости неоднородных тел в цилиндрических координатах (плоское деформированное состояние) при наличии вынужденных деформаций ϵ_b для случая, когда коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$, имеет вид [8]:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{E' 1 - 2\nu}{E 1 - \nu} \frac{\sigma_r}{r} = - \frac{E}{r} \frac{1}{1 - \nu} \epsilon_b'. \quad (14)$$

В рассматриваемой задаче вынужденные деформации, обусловленные набуханием, при постоянном значении коэффициента линейного расширения β_{sw} равны $\epsilon_b = \beta_{sw} \Delta w$, где $\Delta w(r, t) = w(r, t) - w_b$.

Подставляя это выражение в (14), получим:

$$\frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{E' 1 - 2\nu}{E 1 - \nu} \frac{\sigma_r}{r} = - \frac{E}{r} \frac{1}{1 - \nu} \beta_{sw} \frac{d(\Delta w)}{dr}.$$

Считая приближенно, что давление грунтового массива на рассматриваемый толстостенный цилиндр постоянно и равно γH , где H – глубина расположения отверстия, запишем граничные условия для напряжений

$$\sigma_r(a) = 0; \quad \sigma_r(b) = -\gamma H.$$

Принимая $\gamma = 26,95 \text{ кН/м}^3$, $H = 10 \text{ м}$, получим, что $\gamma H = 0.2695 \text{ МПа}$. Как и в задачах, рассмотренных в [4,5], примем коэффициент Пуассона равным $\nu = 0,4$, а зависимость модуля упругости от влажности, определяющую неоднородность задачи, в виде $E = 19,88(w/w_a)^{-2,4}$ (аппроксимация экспериментальных данных, приведенных в [2, 3]). Входящие в (14) отношение E'/E и $(d(\Delta w)/dr)$ равны:

$$\frac{E'}{E} = -2,4 \frac{w'}{w}; \quad \frac{\partial(\Delta w)}{\partial r} = w'.$$

В этих соотношениях:

$$w' = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{w_b - w_a}{r \ln(b/a)} + \pi(w_a - w_b) \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-k_n^2 c_w t) \times \\ \times J_0^2(k_n b) k_n \frac{J_0(k_n a) Y_0(k_n r) - J_0(k_n r) Y_0(k_n a)}{J_0^2(k_n a) - J_0^2(k_n b)}.$$

Кольцевые напряжения находятся из известного в теории упругости соотношения для осесимметричных задач: $\sigma_\theta = \sigma_r + r \cdot \sigma_r'$.

На рис. 2 и 3 представлены графики распределения напряжений вдоль радиуса в различные моменты времени при $N_{max} = 100$. Так же как и при рассмотрении в первой части статьи задачи о распределении влажности, в момент времени $t = 10^7 \text{ с}$ напряженное состояние практически не отличается от состояния в установившемся режиме.

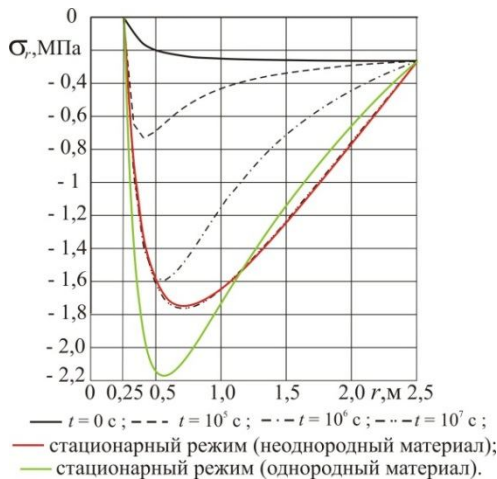


Рис. 2. Распределение напряжений σ_r вдоль радиуса в различные моменты времени.

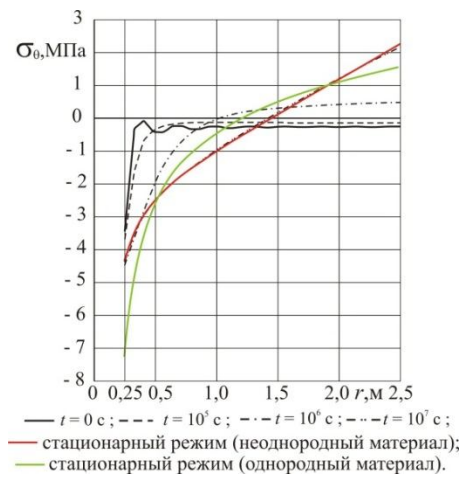


Рис. 3. Распределение напряжений σ_θ вдоль радиуса в различные моменты времени.

Для проверки достоверности результатов проведем статическую проверку, заключающуюся в равновесии половины цилиндра. Данная проверка заключается в выполнении равенства:

$$\int_a^b \sigma_{\theta}(r) dr = a \sigma_r(a) + b \sigma_r(b). \quad (15)$$

Правая часть (15) равна (-0,6738) МПа·м. Левая часть равенства (15) в различные моменты времени при $N_{max} = 100$ равна соответственно:

| t , сек | $\int_a^b \sigma_{\theta}(r) dr$, МПа · м |
|--------------------|--|
| 0 | -0.7673 |
| 10^5 | -0,6763 |
| 10^6 | -0,6793 |
| 10^7 | -0,6802 |
| стационарный режим | -0,6801 |

Выводы

По рис. 1-3 можно судить о том, что для адекватного приближения к точному решению (13) необходимо использовать большое количество членов ряда бесселевых функций, содержащихся в решении, так как ряд медленно сходится. Наибольшее расхождение точного решения и приближений к нему наблюдаются в начальные моменты времени, когда вклад в решение ряда бесселевых функций наиболее велик. Из рис. 1 следует, что при $t = 10^7$ с распределение влажности практически устанавливается. Медленная скорость процесса (10^7 с \approx 115 дней) обусловлена тем, что глина имеет малую пропускную способность, несмотря на большую величину пористости. Также из рис. 2, 3 видно как меняются напряжения во времени. При выполнении статической проверки погрешности составляют менее 1% кроме случая, когда $t = 0$. В этот момент времени функция σ_{θ} носит очень резкий характер, особенно при малом значении радиуса. А так как для решения используется всего 30 точек вдоль радиуса, то возникает довольно большая погрешность в 14%. Особенно следует обратить внимание на различие в значениях напряжений для однородного и неоднородного материалов, которое для напряжений σ_{θ} составляет около 40%.

Л и т е р а т у р а

1. *Тер-Мартirosян З.Г.* Механика грунтов. М.: Изд-во АСВ, 2005. - 488 с.
2. *Давыдов В.А.* Особенности изысканий и проектирования автомобильных дорог в районах вечной мерзлоты. Омск: Омский ПИ, 1979. - С. 44—56.
3. ОДН 218.046—01. Проектирование нежестких дорожных одежд. - 2000. - 93 с.
4. *Андреев В.И., Авершьев А.С.* Об учете механической неоднородности при решении задач влагопереноса в грунтах// XXI Russian - Slovak - Polish Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering», 2012. - С. 87-92.
5. *Андреев В.И., Авершьев А.С.* Стационарная задача влагоупругости для неоднородного толстостенного цилиндра// *Вестник МГСУ*. - 2012. - № 10. - С. 56-61.
6. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены// *Высшие трансцендентные функции*. - М.: Наука, 1974. - Т. 2. - 296 с.
8. *Андреев В.И.* Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. - М.: Изд-во АСВ, 2002. - 286 с.
9. *Леонтьев Н.Е.* Основы теории фильтрации. - М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2009. - 88 с.
10. *G.H. dos Santos, Mendes N.* Heat, air and moisture transfer through hollow porous blocks// *International Journal of Heat and Mass Transfer*. - **52**, 2009, pp. 2390–2398.
11. *Voelker C., Hoffmann S., Kornadt O.* Heat and moisture transfer through clothing// *Proc. XI International IBPSA Conference "Building Simulation"* Glasgow, Scotland July 27-30, 2009, pp.1361-1366.

12. Damle R., Lehmkuh O., Rigola J. Combined Heat and Moisture Transfer in Building Systems// *International Conference "High Performance Buildings"*, Purdue, July 16-19, 2012. pp. 1-8.

References

1. Ter-Martirosyan, Z.G. (2005). *Mehanika Gruntov*, Moscow: Izd-vo ASV, 488 p.
2. Davydov, V.A. (1979). Ocobennosti izyskaniy i proektirovaniya avtomob. dorog v rayonah vechnoy merzloti, Omsk: Omskiy PI, pp. 44-56.
3. ODN 218.046—01 (2000).. Proektirovanie Nejestkih Dorozhnih Odezhd, 93 p.
4. Andreev, V.I., Avershyev, A.S. (2012). Ob uchete mehanicheskoy neodnorodnosti pri reshenii zadach vlagoperenosa v gruntah, *XI Russian - Slovak – Polish Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering»*, 2012, pp. 87-92.
5. Andreev, V.I., Avershyev, A.S. (2012). Statsionarnaya zadacha vlagouprugosti dlya neodnorodnogo tostostennogo tsilindra, *Vestnik MGSU*, № 10, pp. 56-61.
6. Lykov, A.V. (1967). *Teoriya Teploprovodnosti*, Moscow, Visshaya shkola, 600 p.
7. Baytman, G., Erdeyi, A. (1974), *Funksii Besselya, Funksii Parabolicheskodo Tsilindra, Ortogonalnie Mnogochleny*, Bisshie transtsendentnie funksii, Moscow: Nauka, Vol. 2, 296 p.
8. Andreev, V.I. (2002). *Some Problems and Methods of Mechanics of heterogeneous bodies*, Moscow: Izd-vo ASV, 286 p.
9. Leontiev, N.E. (2009). *Osnovi Teorii Filtratsii*, Moscow: Izd-vo Tsentra prikl. issledovaniy pri meh.-mathem. fakultete MGU, 88 p.
10. G.H. dos Santos, Mendes N. (2009). Heat, air and moisture transfer through hollow porous blocks, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**, pp. 2390–2398.
11. Voelker, C., Hoffmann, S., Kornadt, O. (2009). Heat and moisture transfer through clothing, *Proc. XI International IBPSA Conference "Building Simulation" Glasgow*, Scotland July 27-30, 2009, pp. 1361-1366.
12. Damle, R., Lehmkuh, O., Rigola, J. (2012). Combined Heat and Moisture Transfer in Building Systems, *International Conference "High Performance Buildings"*, Purdue, July 16-19, 2012, pp. 1-8.

MOISTURE ELASTICITY OF THICK-WALLED INHOMOGENEOUS CYLINDER UNDER NONSTATIONARY HUMIDITY CONDITIONS

Andreev V.I., Avershyev A.S.

Moskovskiy Gosudarstvenniy Stroitelniy Universitet, Moscow

There is presented a solution of the problem of unsteady axisymmetric moisture transfer in a thick-walled tube, modeling part of ground mass, with the propagation of the moisture from the inner surface to periphery. At the second stage in mined the slow moisture transfer is solved quasistationary problem of moisture elasticity for heterogeneous body because of uneven changing the deformation characteristics of the soil by saturated it with moisture. The term "moisture elasticity" is used by analogy with the term thermoelasticity since the presence of moisture in the material induce forced deformations which is similar to the temperature deformations and problems of heat and mass transfer use the same mathematics.

KEY WORDS: heat and mass transfer, moisture elasticity, inhomogeneity, nonstationary problem, ground, clay, thick-walled shell.

