

Теория толстых оболочек

ЛОКАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА ОСНОВЕ ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВАЛ. В. ФИРСАНОВ, *д-р техн. наук, профессор*

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» «МАИ»,
125993 Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4 k906@mai.ru*

Построены математические модели и алгоритмы расчета, позволяющие уточнить напряженно-деформированное состояние оболочек в зоне его искажения, т.е. в местах крепления, наличия соединений и стыков, действия локальных нагрузок. Решена краевая задача и проведены расчеты напряжений вблизи жесткозакрепленного края оболочки при осесимметричном нагружении.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: функционал Лагранжа, метод тригонометрических рядов, операторный метод, преобразование Лапласа, локальное напряженное состояние типа «погранслой».

Применение в различных отраслях техники композиционных материалов слоистой и волокнистой структуры, а также разработка новых методов расчета оболочечных конструкций из неоднородных материалов показали неправомерность, в той или иной степени, использования классической теории для этих материалов. Поэтому основные усилия исследователей были направлены на усовершенствование теорий типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера]. Например, задача о дополнительном (по отношению к классической теории) НДС вблизи защемленного края была решена [1, 2] в вариационной постановке методом Власова-Канторовича с помощью специально построенной полиномиальной аппроксимирующей функции. Показано, что дополнительное НДС типа «погранслой» прямоугольной пластинки и цилиндрической оболочки вблизи защемленного края вносит существенный вклад в общее напряженное состояние. Поэтому исследование НДС оболочек с целью оценки погрешности классической теории продолжает сохранять свою актуальность для повышения достоверности расчетов на прочность таких авиационных конструкций, как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и соединения, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле. В работах В.В. Васильева и С.А. Лурье [3] во главу угла ставится точное выполнение уравнений равновесия теории упругости и граничных условий, полученных с помощью вариационных принципов. При этом искомые перемещения раскладываются в ряды по нормальной координате и формулируются условия согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в разложениях перемещений по тангенциальным и поперечному направлениям.

1.1.2. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая оболочка, отнесенная к ортогональной системе криволинейных координат ξ , θ , z (рис. 1.), где здесь ξ представляет

собой относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ - центральный угол, а ось z направлена по внешней нормали к поверхности S . Толщина оболочки $2h$ - постоянная и $z = R$ соответствует срединной поверхности S .

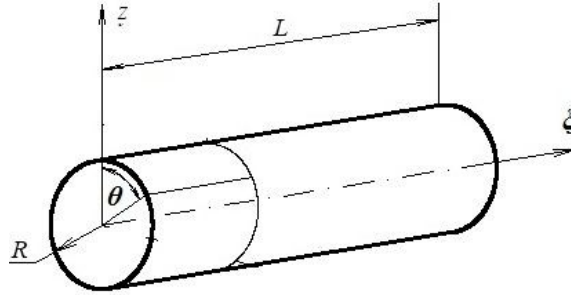


Рис.1. Цилиндрическая оболочка

Круговая цилиндрическая оболочка имеет замкнутый профиль поперечного сечения. Для описания ее НДС используются уравнения трехмерной теории упругости – уравнения равновесия, физические и геометрические, уравнения, имеющие вид, приведенный в работе [6].

Считаем, что на лицевых и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{13}(\pm h), \quad l = 1, 2, 3, \quad \sigma_{\alpha i} = q_{\alpha i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Будем предполагать в дальнейшем, что искомые упругие перемещения U_1 , U_2 , U_3 по аналогии с [3] допускают асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} U_1(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}, \\ U_2(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}, \\ U_3(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + w_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!} \end{aligned} \quad (1)$$

дающие погрешности в определении перемещений порядка h^4 . НДС оболочки, соответствующее разложениям (1), удовлетворяет условиям согласованности, сформулированным в [3].

Подставляя геометрические уравнения и разложения (1) в условие минимума функционала Лагранжа, получим уравнения равновесия в перемещениях и необходимое количество граничных условий следующего вида:

$$\begin{aligned} &\left(KI_0^{u_0} + KI_{11}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + KI_{22}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_0 + KI_{12}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_0 + KI_1^{w_0} \frac{\partial}{\partial \xi} w_0 + \left(KI_0^{u_1} + KI_{11}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + KI_{22}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_1 + \\ &+ KI_{12}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_1 + KI_1^{w_1} \frac{\partial}{\partial \xi} w_1 + \left(KI_0^{u_2} + KI_{11}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + KI_{22}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_2 + KI_{12}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_2 + KI_1^{w_2} \frac{\partial}{\partial \xi} w_2 + \\ &+ \left(KI_0^{u_3} + KI_{11}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + KI_{22}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_3 + KI_{12}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_3 = KI_0^{q_{13}^+} q_{13}^+ - KI_0^{q_{13}^-} q_{13}^-, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 & K i_{12}^{u_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_0 + \left(K i_0^{v_0} + K i_{11}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K i_{22}^{v_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_0 + K i_2^{w_0} \frac{\partial}{\partial \theta} w_0 + \left(K i_0^{u_1} + K i_{11}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K i_{22}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_1 + \\
 & + K i_{12}^{u_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_1 + K i_2^{w_1} \frac{\partial}{\partial \theta} w_1 + K i_{12}^{u_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_2 + \left(K i_0^{v_2} + K i_{11}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K i_{22}^{v_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_2 + K i_2^{w_2} \frac{\partial}{\partial \theta} w_2 + \\
 & + K i_{12}^{u_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_3 + \left(K i_0^{v_3} + K i_{11}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K i_{22}^{v_3} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_3 = K i_0^{q_{23}^+} q_{23}^+ - K i_0^{q_{23}^-} q_{23}^-, \\
 & K j_1^{u_0} \frac{\partial}{\partial \xi} u_0 + K j_2^{v_0} \frac{\partial}{\partial \theta} v_0 + \left(K j_0^{w_0} + K j_{11}^{w_0} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K j_{22}^{w_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_0 + K j_1^{u_1} \frac{\partial}{\partial \xi} u_1 + \left(K j_0^{v_1} + K j_{11}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \right. \\
 & + K j_{22}^{v_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left. \right) w_1 + K j_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial \theta} v_2 + K j_1^{u_2} \frac{\partial}{\partial \xi} u_2 + K j_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial \theta} v_2 + \left(K j_0^{w_2} + K j_{11}^{w_2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K j_{22}^{w_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_2 + \\
 & + K j_1^{u_3} \frac{\partial}{\partial \xi} u_3 + K j_2^{v_3} \frac{\partial}{\partial \theta} v_3 = K j_0^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K j_0^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad l = 1, 2, 3, 4; \quad i = 5, 6, 7, 8; \quad j = 9, 10, 11;
 \end{aligned}$$

для торцов оболочки $\xi = \xi_0^{(1)}, \xi_0^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u_0^r \vee \frac{Eh}{15(1+\mu)(1-2\mu)} \left[h^2 \varepsilon_0^2 (1-\mu) \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + h^2 \varepsilon_0^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + 5(1-\mu) h \varepsilon_0 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \right. \\
 & + h \varepsilon_0 \mu (5-3\varepsilon_0^2) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 3h \varepsilon_0 \mu (5-\varepsilon_0^2) w_2 + 10(1-\mu) \varepsilon_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + 6\mu \varepsilon_0^4 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \\
 & \left. + 30(1-\mu) r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + 6r \mu (5-\varepsilon_0^4) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 6\mu (5+\varepsilon_0^4) w_1 + 6r \mu (5-\varepsilon_0^4) w_0 \right] = M_1^{\Gamma(0)}, \\
 u_1 &= u_1^r \vee \frac{h^3 E}{15(1+\mu)(1-2\mu)} \left[h \varepsilon_0 (1-\mu) \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + h \varepsilon_0 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + 3(1-\mu) \varepsilon_0^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \right. \\
 & \left. + 10\mu w_2 + 10r(1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + 10r \mu \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 20r \mu w_1 + 10(1-\mu) r^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right] = M_1^{\Gamma(1)}, \\
 u_2 &= u_2^r \vee \frac{Eh^3}{210(1+\mu)(1-2\mu)} \left[5(1-\mu) h^2 \varepsilon_0^2 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + 5\mu h^2 \varepsilon_0^2 \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \right. \\
 & + 21(1-\mu) h \varepsilon_0 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 3\mu h \varepsilon_0 (7-5\varepsilon_0^2) \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + 3\mu h \varepsilon_0 (21-5\varepsilon_0^2) w_2 + \\
 & + 42(1-\mu) \varepsilon_0^2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + 30\mu \varepsilon_0^4 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 10\mu (7+3\varepsilon_0^4) w_1 + 70(1-\mu) r \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \\
 & \left. + 10r \mu (7-3\varepsilon_0^4) \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + 10r \mu (7-3\varepsilon_0^4) w_0 \right] = M_1^{\Gamma(2)}, \\
 u_3 &= u_3^r \vee \frac{h^5 E}{630(1+\mu)(1-2\mu)} \left[5h \varepsilon_0 (1-\mu) \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + 5h \varepsilon_0 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + 15(1-\mu) \varepsilon_0^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \right. \\
 & \left. + 42\mu w_2 + 42r(1-\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + 42r \mu \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 84r \mu w_1 + 42(1-\mu) r^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right] = M_1^{\Gamma(3)},
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 v_0 &= v_0^r \vee \frac{\varepsilon_0 E}{30(1+\mu)} \left[h^3 \varepsilon_0 \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + h^3 \varepsilon_0 \frac{\partial v_3}{\partial \xi} + h^2 (5 - 3\varepsilon_0^2) \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 5h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \right. \\
 &\quad \left. + 6h\varepsilon_0^3 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 10h\varepsilon_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 6(5 - \varepsilon_0^4) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 30 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right] = M_{21}^{\Gamma(0)}, \\
 v_1 &= v_1^r \vee \frac{\varepsilon_0 h^2 E}{30(1+\mu)} \left[h^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) + 3h\varepsilon_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + 10 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + r \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) \right] = M_{21}^{\Gamma(1)}, \\
 v_2 &= v_2^r \vee \frac{\varepsilon_0 h^2 E}{30(1+\mu)} \left[5h^3 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) + 3h^2 (7 - 5\varepsilon_0^2) \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + 21h^2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \right. \\
 &\quad \left. + 30h\varepsilon_0^3 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 42h\varepsilon_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + 10(7 - 3\varepsilon_0^4) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + 70 \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right] = M_{21}^{\Gamma(2)}, \\
 v_3 &= v_3^r \vee \frac{\varepsilon_0 h^4 E \left[5h^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right) + 15h\varepsilon_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + 42 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + r \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) \right]}{1260(1+\mu)} = M_{21}^{\Gamma(3)}, \\
 w_0 &= w_0^r \vee \frac{hE}{6(1+\mu)} \left(h^2 u_3 + 2h\varepsilon_0 u_2 + h\varepsilon_0 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + 6u_1 + 2\varepsilon_0^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + 6r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) = Q_1^{\Gamma(0)}, \\
 w_1 &= w_1^r \vee \frac{h^3 E}{30(1+\mu)} \left[3h\varepsilon_0 u_3 + 3\varepsilon_0^2 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + 10 \left(u_2 + ru_1 + r \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + r^2 \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) \right] = Q_1^{\Gamma(1)}, \\
 w_2 &= w_2^r \vee \frac{h^3 E \left[3h \left(hu_3 + 2\varepsilon_0 u_2 + \varepsilon_0 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) + 10 \left(u_1 + r \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + 6\varepsilon_0^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right]}{60(1+\mu)} = Q_1^{\Gamma(2)},
 \end{aligned}$$

где выражения для коэффициентов Kl с цифровыми и числовыми индексами зависят от геометрических и упругих свойств оболочки, $r = 1/R$, $\varepsilon_0 = h/R$ - относительная полутолщина оболочки, μ - коэффициент Пуассона и E - модуль Юнга материала оболочки. Следует отметить, что в правых частях граничных условий (3) стоят усилия, выражения которых зависят от торцевых внешних нагрузок

Уравнения (2) для определения упругих перемещений u_k , v_k , w_k приведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, используя тригонометрические ряды по окружной переменной θ . Представим $q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta)$, $i = 1, 2, 3$, как

$$\begin{aligned}
 q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= Q_{(0)13}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[Q_{(m)13}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + Q_{(m)13}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right], \\
 q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= Q_{(0)23}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[Q_{(m)23}^{(1)\pm}(\xi) \sin m\theta + Q_{(m)23}^{(2)\pm}(\xi) \cos m\theta \right], \\
 q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= Q_{(0)33}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[Q_{(m)33}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + Q_{(m)33}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

Будем искать упругие перемещения u_k , v_k , w_k в виде

$$\begin{aligned}
 u_k(\xi, \theta) &= U_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} [U_{km}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + U_{km}^{(2)}(\xi) \sin m\theta] \quad k = 0, 1, 2, 3, \\
 v_k(\xi, \theta) &= V_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} [V_{km}^{(1)}(\xi) \sin m\theta + V_{km}^{(2)}(\xi) \cos m\theta] \quad k = 0, 1, 2, 3, \\
 w_k(\xi, \theta) &= W_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} [W_{lm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + W_{lm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta] \quad l = 0, 1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя разложения (4) и (5) в дифференциальные уравнения (2) и краевые условия (3), находим дифференциальные уравнения для определения функций U_{k0} , V_{k0} , W_{b0} , $k = 0, 1, 2, 3$, $b = 0, 1, 2$. Эти разрешающие уравнения и соответствующие им граничные условия в виду их громоздкости здесь не приводятся.

Построив решение неоднородных дифференциальных уравнений, после определения произвольных постоянных из соответствующих краевых условий найдем функции U_{k0} , $U_{km}^{(n)}$, V_{k0} , $V_{km}^{(n)}$, W_{b0} , $W_{bm}^{(n)}$, $n = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$, $b = 0, 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, после чего отыскание упругих перемещений $u_k(\xi, \theta)$, $v_k(\xi, \theta)$, $w_k(\xi, \theta)$, $k = 0, 1, 2, 3$, $l = 0, 1, 2$, сведется к суммированию рядов (5).

Далее рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка, находящаяся под действием осесимметричной нагрузки. Параметры осесимметричной нагрузки, внутренних сил и перемещений при осесимметричной деформации находятся из первых рядов (4), (5) при $m = 0$.

Так как коэффициенты разрешающих обыкновенных дифференциальных уравнений постоянны, то согласно операторному методу [6] соответствующие однородные уравнения записываются как

$$\mathbf{D}[U_0, U_1, U_2, U_3, W_0, W_1, W_2]^T = \mathbf{0} \tag{6}$$

Здесь \mathbf{D} - квадратная матрица размером 7×7 коэффициентов уравнений (6), $\mathbf{0}$ - нулевой вектор.

Пусть $F_1(\xi)$ есть решение уравнения

$$\det(\mathbf{D})F_1(\xi) = 0, \tag{7}$$

где $\det(\mathbf{D})$ - определитель матрицы \mathbf{D} . Тогда U_i , W_j , $i = \overline{0, 3}$, $j = \overline{0, 2}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{1i} F_1, \quad U_1 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{2i} F_1, \quad U_2 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{3i} F_1, \quad U_3 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{4i} F_1, \\
 W_0 &= \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{5i} F_1, \quad W_1 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{6i} F_1, \quad W_2 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{7i} F_1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

дают решение однородного уравнения (6). Здесь $\det(\mathbf{D})_{ij}$ - минор определителя $\det(\mathbf{D})$, соответствующий элементу (i, j) матрицы \mathbf{D} .

Дифференциальное уравнение (6) имеет характеристическое уравнение, которое можно представить как

$$p^2 \sum_{n=0}^6 H_n^0 p^{2n} = p^2 \Delta_1 = 0, \tag{9}$$

где H_n^0 , $n = 1..6$ представляют собой постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических и упругих свойств оболочки.

Кроме нулевых корней, уравнение (9) имеет следующие корни:

$$\pm p_1 \pm iq_1, \pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4.$$

Тогда Δ_1 в (9) можно представить в виде

$$\Delta_1 = H_6^0 \left[(p - p_1)^2 + q_1 \right] \left[(p + p_1)^2 + q_1 \right] \left[(p - p_2)^2 + q_2 \right] \times \\ \times \left[(p + p_2)^2 + q_2 \right] (p^2 - p_3^2)(p^2 - p_4^2).$$

Частное решение уравнения (7), соответствующее ненулевым корням (9), находится как

$$\bar{F}_1(\xi) = (C_1 \sin q_1 \xi + C_2 \cos q_1 \xi) e^{-p_1 \xi} + (C_3 \sin q_1 \xi + C_4 \cos q_1 \xi) e^{p_1 \xi} + \\ + (C_5 \sin q_2 \xi + C_6 \cos q_2 \xi) e^{-p_2 \xi} + (C_7 \sin q_2 \xi + C_8 \cos q_2 \xi) e^{p_2 \xi} + \\ + C_9 e^{-p_3 \xi} + C_{10} e^{p_3 \xi} + C_{11} e^{-p_4 \xi} + C_{12} e^{p_4 \xi}.$$

Заметим, что уравнение (6) имеет два очевидных решения, выпавших из рассмотрения в результате применения формул (8), вида

$$\left[U_0 = C_{13}, U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0, W_0 = 0, W_1 = 0, W_2 = 0 \right], \\ \left[U_0 = C_{14} \xi, U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0, W_0 = -C_{14} \mu, W_1 = -C_{14} \frac{\mu}{R}, W_2 = 0 \right].$$

Таким образом, общее решение уравнения (6) получается в виде

$$U_0 = C_{13} + C_{14} \xi + \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{1i} \bar{F}_1, U_1 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{2i} \bar{F}_1, U_2 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{3i} \bar{F}_1, \\ U_3 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{4i} \bar{F}_1, W_0 = -C_{14} \mu + \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{5i} \bar{F}_1, \\ W_1 = -C_{14} \frac{\mu}{R} + \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{6i} \bar{F}_1, W_2 = \sum_{i=1}^7 \det(\mathbf{D})_{7i} \bar{F}_1.$$

Найдем частное решение разрешающих уравнений для оболочки, находящейся под действием локальной внешней радиальной кольцевой нагрузки

$$Q_{33}^{\pm}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ Q_0, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ 0, & \text{при } \xi_2 \leq \xi \leq \xi_0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем ξ_0 обозначает относительную длину оболочки, определяем выражением $\xi_0 = L/R$, где L - длина оболочки.

Очевидно, что при осесимметричной радиальной нагрузке (10) перемещения $V_{i0} = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Для нахождения частного решения разрешающих уравнений используется преобразование Лапласа. В результате получим

$$\bar{U}_0(\xi) = \frac{Q_0 R}{2E} \sum_{j=1}^2 \left[(-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[\mathcal{G}_{U_0}^{1i}(Z_{1i}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \mathcal{G}_{U_0}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{U_0}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \mathcal{G}_{U_0}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \right] + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{U_0}^{0i}}{p_i^2} \sinh^2 \frac{p_i(\xi - \xi_j)}{2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{2\kappa_{U_0}^{1i}}{p_i} \sinh p_i(\xi - \xi_j) \right\rangle + 2\kappa_{U_0}^{03}(\xi - \xi_j) \right\} \right] \left[\begin{matrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \end{matrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_k(\xi) = & \frac{Q_0 R^{1-k}}{2E} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)} \left[\gamma_{U_k}^{li} Z_{li}(\xi, \xi_j) + \right. \right. \\
 & + \gamma_{U_k}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \gamma_{U_k}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \gamma_{U_k}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \\
 & + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{\kappa_{U_k}^{0i}}{p_i} \sinh [p_i (\xi - \xi_j)] + \kappa_{U_k}^{1i} \cosh [p_i (\xi - \xi_j)] \right\rangle \Bigg|, \quad k = 1, 2, 3, \\
 \bar{W}_l(\xi) = & \frac{Q_0 R^{1-l}}{2E} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \eta(\xi - \xi_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{p_i q_i (p_i^2 + q_i^2)^2} \left[\vartheta_{W_l}^{li} (Z_{li}(\xi, \xi_j) - 1) + \right. \right. \\
 & + \vartheta_{W_l}^{2i} Z_{2i}(\xi, \xi_j) + \vartheta_{W_l}^{3i} Z_{3i}(\xi, \xi_j) + \vartheta_{W_l}^{4i} Z_{4i}(\xi, \xi_j) \left. \right] + \\
 & + \sum_{i=3}^4 \left\langle \frac{4\kappa_{W_l}^{0i}}{p_i^2} \sinh^2 \frac{p_i (\xi - \xi_j)}{2} + \frac{2\kappa_{W_l}^{1i}}{p_i} \sinh p_i (\xi - \xi_j) \right\rangle \Bigg|, \quad l = 0, 1, 2,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где $\eta(\xi - \xi_j)$ - функция Хевисайда и Z_{li}, \dots, Z_{4i} - гиперболотригонометрические функции.

Коэффициенты ϑ и γ с буквенными и цифровыми индексами, входящие в выражения (11) зависят от корней характеристического уравнения (9).

Коэффициенты κ , также отмеченные буквенными и числовыми индексами в соотношениях (11), (12), находятся путём сравнения коэффициентов при комплексной переменной в соответствующих выражениях для изображений каждого перемещения.

Для сравнения результатов расчета НДС оболочки по разным теориям в таблице приведены значения корней характеристического уравнения при различных значениях относительной полутолщины ε_0 . В таблице аббревиатура «Кл. теория» соответствует результатам, полученным по классической теории [4], $K = 2$ - результатам, полученным в работах [5-8], $K = 3$ - результатам, полученным в данной работе.

Анализ результатов показывает, что при расчете цилиндрических оболочек корни характеристического уравнения (9) разделяются на две группы: асимптотически малые $\pm p_1 \pm iq_1$ и большие $\pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4$ корни. Асимптотически малым корням соответствуют основные НДС, определяемые по классической теории оболочек и асимптотически большим корням $\pm p_2 \pm iq_2, \pm p_3, \pm p_4$ соответствуют напряженные состояния оболочки, которые называются дополнительными краевыми эффектами типа «погранслой».

Таблица. Результаты расчета корней характеристического уравнения по разным теориям

$\mu = 0,3$						
p_1	ε_0	1/40	1/60	1/80	1/100	1/200
q_1	$K = 3$	5,797	7,080	8,163	9,119	12,875
p_2	$K = 2$	5,499	6,720	7,752	8,661	12,233
q_2	Кл. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
	$K = 3$	5,702	7,002	8,096	9,059	12,833

	$K = 2$	5,431	6,665	7,704	8,618	12,203
	Кл. теория	5,749	7,040	8,130	9,089	12,854
	$K = 3$	90,979	136,469	181,959	227,449	454,898
	$K = 2$	90,988	136,475	181,963	227,453	454,900
	$K = 3$	37,692	56,532	75,373	94,215	188,426
	$K = 2$	37,686	56,528	75,371	94,213	188,425
	$K = 3$	159,481	239,219	318,957	398,696	797,390
	$K = 3$	207,701	311,549	415,397	519,245	1038,488

Можно отметить, что значения p_3, p_4 приблизительно в два раза больше чем значения p_2 . На рис. 2 - 3 показаны результаты расчета НДС оболочки, имеющей следующие параметры: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0,1$ м, относительная полутолщина $\varepsilon_0 = h/R = 0,005$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Оболочка жестко защемлена на двух концах. Локальная нагрузка приложена в середине оболочки и имеет следующие параметры: $\xi_1 = 1, \xi_2 = 3$. На данных рисунках аббревиатура «Gol» обозначает результаты расчета по классической теории. Анализируя графики на рис. 2–3, можно установить

–максимальные нормальные напряжения σ_{11} , определяемые по уточненной теории « $K = 3$ », превышают величину этих же напряжений, соответствующих классической теории, на 35%, что подтверждается результатами работ [1,2], полученными другим методом;

–максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33} , достигающие значений порядка 40% от σ_{11} , отличаются друг от друга по обеим уточненным теориям примерно на 13%;

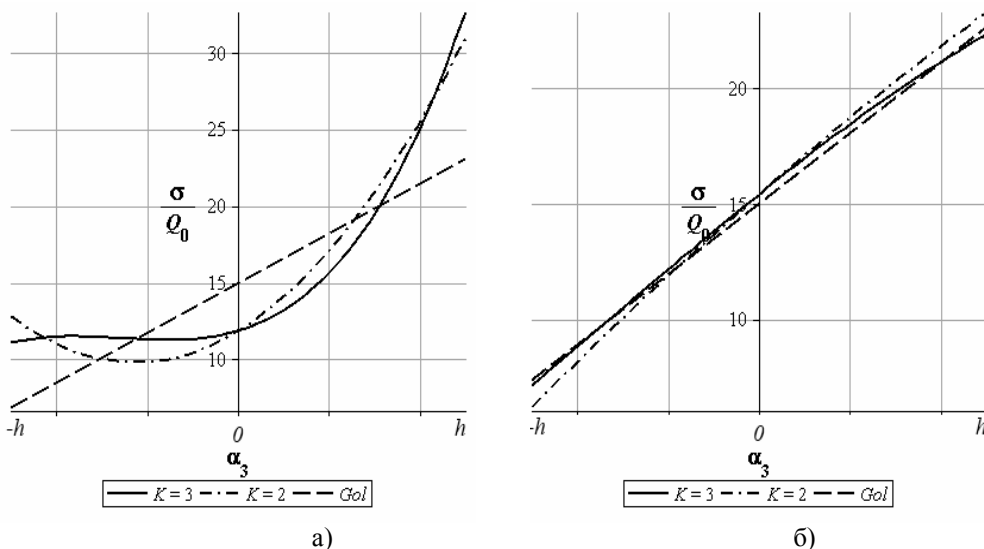


Рис. 2. Изменение продольных нормальных напряжений σ_{11} по толщине: а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки

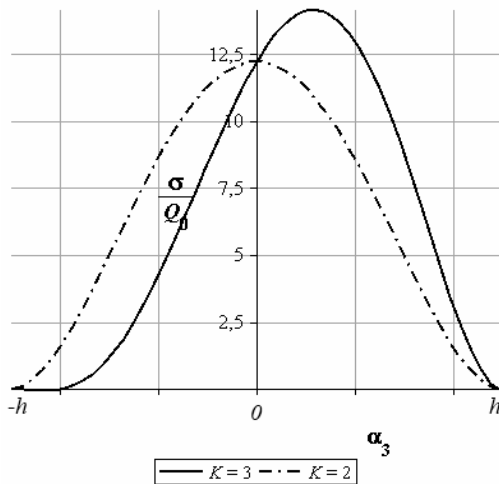


Рис. 3,а

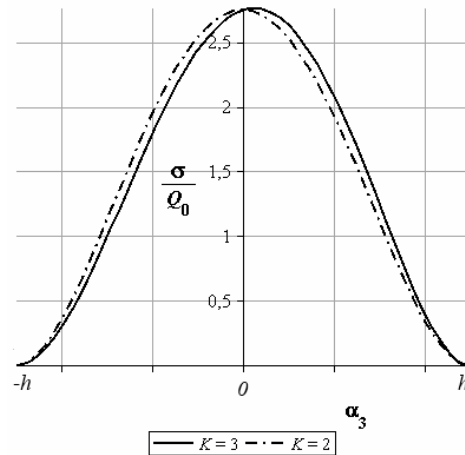


Рис.3,б

Рис.3. Изменение поперечных нормальных напряжений σ_{33} по толщине:
а) на краю оболочки; б) на расстоянии $\xi = \varepsilon_0/2$ от края оболочки

По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

– На основании анализа характеристических уравнений доказано, что по отношению к классической теории оболочек уточненная теория дает возможность получить большие и сверхбольшие корни, которые соответствуют двум типам быстро затухающих от линии искажения НДС типа «погранслои».

– Установлено, что в зоне искажения напряженного состояния, соизмеримой с толщиной оболочки, поперечные напряжения имеют один и тот же порядок с основными напряжениями, определяемыми по классической теории, которые также существенно уточняются.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-08-01243.

Л и т е р а т у р а

1. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций / Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т. 8. №1. С. 28-64.
2. Фирсанов В.В. Погранслои и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. Т. 17. № 5. С. 212-218.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МГТ. 1990. № 2. С. 158-167.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 1. С. 194 – 207.
6. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан. Замкнутая цилиндрическая оболочка под действием локальной нагрузки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2011. Т. 17. № 1. С. 91 – 106.
7. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Ле Чунг Хиеу. Исследование напряженно – деформированного состояния цилиндрических оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 2. С. 98 – 105.

8. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан, Ле Чунг Хиеу. Исследование напряженно – деформированного состояния цилиндрической оболочки по уточненной теории // Вестник МАИ. 2012. Т. 19. № 5. .

References

1. Firsanov V.V. (2002). Ob utochnenii klassicheskoy teorii pryamougol'nyh plastinok iz kompozitsionnykh materialov, *Mehanika kompozitsionnykh materialov i konstrukcij*, Izd. IPRIM RAN, T. 8, №1, 28-64.
2. Firsanov V.V. (2010). Pogransloj i ego vliyanie na prochnost' cilindricheskoy obolochki perezmennoj tolshhiny, *Vestnik Moskovskogo aviazionnogo instituta*, Vol. 17, № 5, 212-218.
3. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. (1990). K probleme postroeniya neklassicheskoy teorii plastin, *Izv. AN. MTT*, № 2, 158-167.
4. Gol'denvejzer A.L. (1976). *Teoriya uprugih tonkih obolochek*, M.: Nauka, 512 p.
5. Firsanov V.V., Chan Ngok Doan (2011) Energeticheski soglasovannyj podhod k issledovaniyu uprugih obolochek proizvol'noj geometrii, *Vestnik MAI*, Vol. 18, № 1, 194 – 207.
6. Firsanov V.V., Chan Ngok Doan (2011). Zamknutaya cilindricheskaya obolochka pod dejstviem lokal'noj nagruzki, *Mehanika kompozitsionnykh materialov i konstrukcij*, Vol. 17, № 1, 91 – 106.
7. Firsanov V.V., Chan Ngok Doan, Le Chung Hieu (2012). Issledovanie napryazhenno – deformatsionnogo sostojaniya cilindricheskikh obolochek na osnove trekhmernykh uravnenij teorii uprugosti, *Problemy mashinostroeniya i avtomatizacii*, № 2, 98 – 105.
8. Firsanov V.V., Chan Ngok Doan, Le Chung Hieu (2012). Issledovanie napryazhenno – deformatsionnogo sostojaniya cilindricheskoy obolochki po utochnennoj teorii, *Vestnik MAI*, Vol. 19. № 5.

THE LOCAL STRESS-STRAIN STATE OF A CYLINDRICAL SHELL ON THE BASIS OF THE THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE THEORY OF ELASTICITY

V. Firsanov

Moskovskiy aviazionnyy institut, Moscow

Mathematical models and calculation's algorithms of the stress-strain state of a cylindrical shell in a zone of its distortion are developed. In places of fixing, presence of connections and joints, actions of local loadings arise additional in relation to the classical theory quickly damped stresses. The boundary value problem is solved and calculations of stresses near rigidly mounted shell edge at axisymmetrical loading are carried out.

KEYWORDS: Lagrange functional, a method of trigonometrical series, a symbolical method, Laplace transformation, a local stress state of type "boundary layer".