

Расчет тонких упругих оболочек

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕРАВНОМЕРНЫХ НАГРУЗОК

С.И. ТРУШИН *, д-р техн. наук, проф.

Е.В. СЫСОЕВА **, канд. техн. наук, доцент

Т.А. ЖУРАВЛЕВА *, аспирант

*Московский государственный строительный университет

129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; trushin2006@yandex.ru,
zhuravleva.tata@gmail.com

** Московский государственный академический художественный институт
им. В.И. Сурикова

109004, г. Москва, Товарищеский переулок, д. 30; sev4279@yandex.ru

В статье изложены результаты численного анализа устойчивости гибких пологих цилиндрических оболочек при несимметричном статическом нагружении. При построении расчетной модели использовались соотношения теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и геометрической нелинейности в квадратичном приближении. Для построения кривых равновесных состояний и исследования устойчивости форм равновесия оболочки был применен вариационно-разностный метод в сочетании с методом продолжения решения по параметру. Приведены результаты расчетов гибких пологих цилиндрических оболочек на квадратном плане при различных видах несимметричных нагрузок.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оболочка, устойчивость, геометрическая нелинейность, метод продолжения решения по параметру, кривые равновесных состояний, неравномерно распределенные поперечные нагрузки.

1. Исследование устойчивости оболочки при неравномерно распределенной поперечной нагрузке

1.1. Исходные данные

Проводится численный анализ устойчивости нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек на квадратном плане (рис. 1) при различных значениях эксцентриситета распределенной поперечной нагрузки (параметр e).

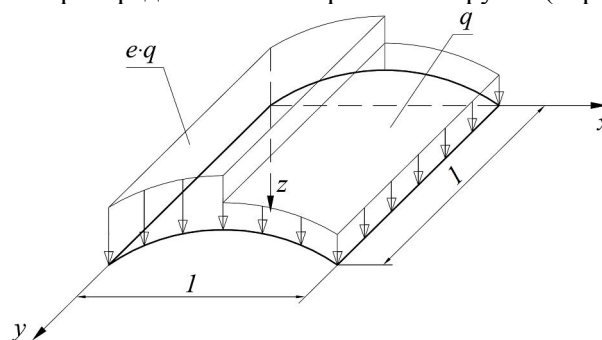


Рис. 1. Схема приложения неравномерной распределенной нагрузки к цилиндрической оболочке

Рассматриваются шарнирно-неподвижно опертые по контуру цилиндрические оболочки, изготовленные из ортотропного композиционного материала с низкой сдвиговой жесткостью. В качестве исходных геометрических соотноше-

ний принимались геометрические соотношения нелинейной теории пологих оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; & e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \\
 e_{12} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}; & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial x}; & \kappa_{22} &= \frac{\partial \theta_2}{\partial y}; \\
 \kappa_{12} &= \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}; & e_{13} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_1; & e_{23} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_2.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

В формулах (1) u и v – тангенциальные составляющие перемещения; w – нормальная составляющая; θ_1 и θ_2 – углы поворота поперечных сечений оболочки; R_1 – радиус кривизны в направлении оси x .

Нелинейная задача устойчивости решалась методом продолжения решения по параметру с использованием схемы Крисфилда, где в качестве ведущего параметра принимается длина дуги s кривой равновесных состояний исследуемой оболочки [1,2]. На каждом шаге по ведущему параметру решение уточнялось по методу Ньютона-Рафсона. Краевая задача решалась вариационно-разностным методом [3], с использованием разработанного программного обеспечения.

Схематичное изображение исследуемой оболочки на квадратном плане и конечно-разностная сетка на четверти оболочки приведены на рис. 2.

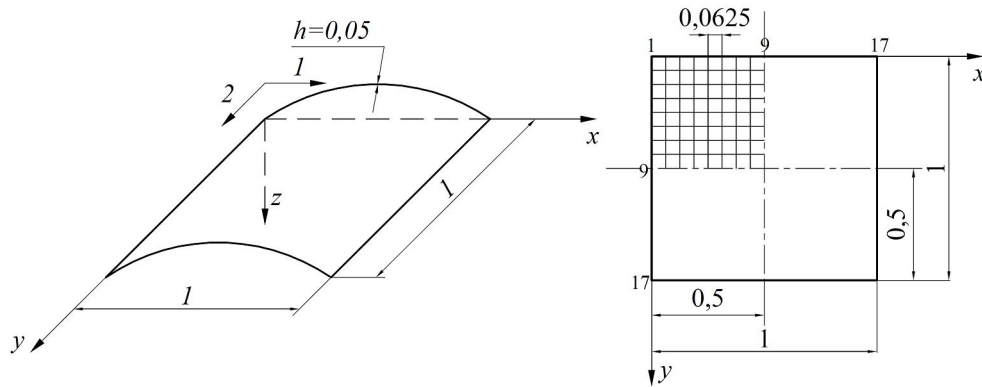


Рис. 2. Пологая цилиндрическая оболочка на квадратном плане

В качестве исходных данных для расчета выступали следующие величины: размеры оболочки в плане 1x1 м; толщина оболочки $h=0,005$ м; кривизна исследуемой оболочки по первому направлению $k_1=0,003$; сетка элементов 16x16; размер элемента в плане 0,0625x0,0625 м; физические характеристики материала оболочки, выполненной из композиционного ортотропного материала с низкой сдвиговой жесткостью [4], приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физические характеристики композиционного материала

$E_1, \text{Н/м}^2$	$E_2, \text{Н/м}^2$	$G_{12}, \text{Н/м}^2$	$G_{13}, \text{Н/м}^2$	$G_{23}, \text{Н/м}^2$	ν_{12}	ν_{21}
$6,393 \cdot 10^{10}$	$5,786 \cdot 10^{10}$	$0,8 \cdot 10^{10}$	$0,8 \cdot 10^{10}$	$0,8 \cdot 10^{10}$	0,15	0,1657

В качестве граничных условий выступало шарнирно-неподвижное закрепление по контуру оболочки. Приращение ведущего параметра (длина дуги кривой равновесных состояний оболочки) принято равным $\Delta s = 0,2$.

Нагрузка на одной половине оболочки превышала нагрузку на другой половине оболочки в заданное количество раз. Описанная схема нагружения пока-

зана на рис. 1, значение коэффициента e поочередно принималось равным 1,05; 1,2; 1,5; 2; 4. Для наглядности результатов и удобства их трактовки был также проведен расчет на устойчивость в геометрически-нелинейной постановке исследуемой оболочки, нагруженной равномерно распределенной по площади нагрузкой.

1.2. Результаты расчета

На рис. 3 представлена кривая равновесных состояний (график зависимости вертикального перемещения центрального узла оболочки от текущего значения величины поперечной равномерно распределенной нагрузки) для оболочки, неравномерно нагруженной поперечной распределенной нагрузкой по схеме на рис. 1 с коэффициентом $e=1,05$. Потеря устойчивости происходит при величине предельной нагрузки, составляющей 0,0078 МПа.

Критические точки на кривой равновесных состояний определялись по смене знака определителя матрицы системы алгебраических уравнений $Det(\nabla^2 W)$. Чтобы отделить предельные точки от точек бифуркации, и таким образом определить знак приращения параметра нагрузки, на каждом шаге m по ведущему параметру определяется значение параметра жесткости $S_p = U^T Q$ (рис.4), где вектор U определяется из решения уравнения $\nabla^2 W(u^k(s_m))U = Q$. Моменты одновременной смены знаков $Det(\nabla^2 W)$ и S_p определяют переход через предельную точку.

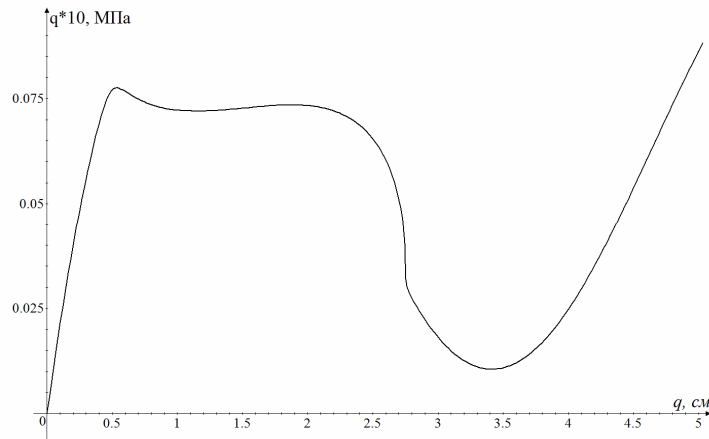


Рис. 3. Кривая равновесных состояний при $e = 1,05$

Для сравнения был проведен расчет оболочки, нагруженной равномерно-распределенной симметричной нагрузкой. Было получено значение предельной нагрузки для указанного случая, которое составило 0,0103 МПа.

Как и следовало ожидать, величина предельной нагрузки уменьшается с увеличением неравномерности ее приложения. Можно также заметить, что при существенных величинах упомянутого эксцентриситета e (1,5 и более) потеря устойчивости оболочки происходит при существенном снижении критических нагрузок и увеличении максимальных значений нормальных перемещений.

Значения предельной нагрузки и кривые равновесных состояний для цилиндрической оболочки на квадратном плане при различных соотношениях значений нагрузки на разных половинах оболочки, разделенных осью симметрии в направлении нулевой кривизны (параметр e), представлены соответственно в табл. 2 и на рис. 5.

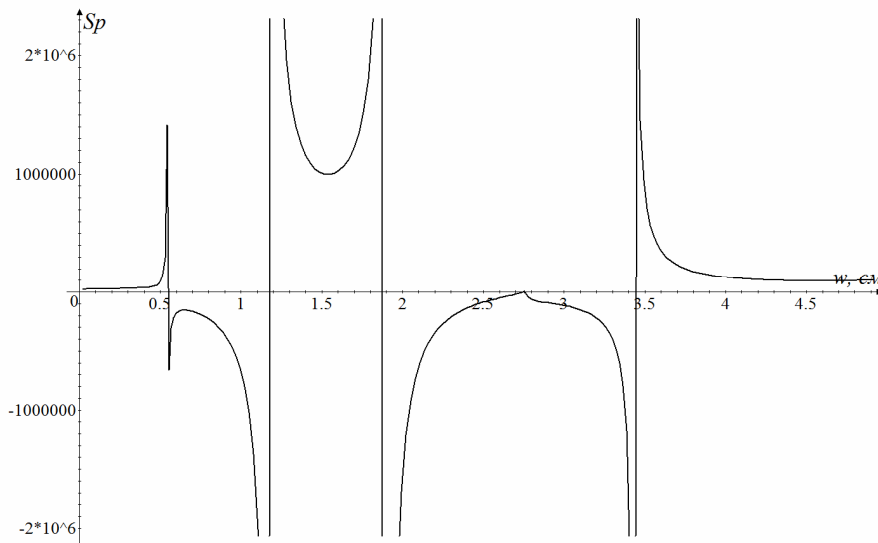


Рис. 4. Изменение значений параметра жесткости S_p при $e = 1,05$

Кривая равновесных состояний для исследуемой оболочки, нагруженной равномерно распределенной по всей площади поперечной нагрузкой, также представлена на рис. 5.

Таблица 2

Значения предельной нагрузки и вертикального перемещения в момент потери устойчивости при различных величинах эксцентриситета задания распределенной нагрузки

Значение коэффициента e	Перемещение w , см	Предельная нагрузка $q_{пред}$, МПа	Номер шага по ведущему параметру в момент потери устойчивости
1,05	0,53	0,0078	29
1,2	0,57	0,0064	32
1,5	2,18	0,0059	92
2,0	2,33	0,0048	99
4,0	2,56	0,0029	111

2. Исследование оболочки, нагруженной по схеме распределения снеговой нагрузки согласно СНиП 2.01.07-85* [5]

2.1. Исходные данные

Описанная выше нелинейно деформируемая квадратная цилиндрическая оболочка также исследовалась на устойчивость под действием нагрузки, приложенной по схеме распределения снеговой нагрузки для зданий со сводчатыми и близкими к ним по очертанию покрытиями согласно СНиП 2.01.07-85* «Нагрузки и воздействия».

Исходные данные, касающиеся условий закрепления, геометрических, механических и физических характеристик оболочки, полностью совпадают с характеристиками и граничными условиями, приведенными в п. 1.1. Схема приложения неравномерно распределенной нагрузки на исследуемую оболочку, а также ступенчатое представление нагрузки на профиль оболочки, соответствующее использованной конечно-разностной сетке, приведены на рис. 6.

Как и в предыдущем случае, нелинейная задача устойчивости решалась методом Ньютона-Рафсона. Для процедуры метода использовалась схема Крис-

фила, где в качестве ведущего параметра принимается длина кривой s равновесных состояний исследуемой оболочки. Приращение ведущего параметра принято равным $\Delta s=0,2$.

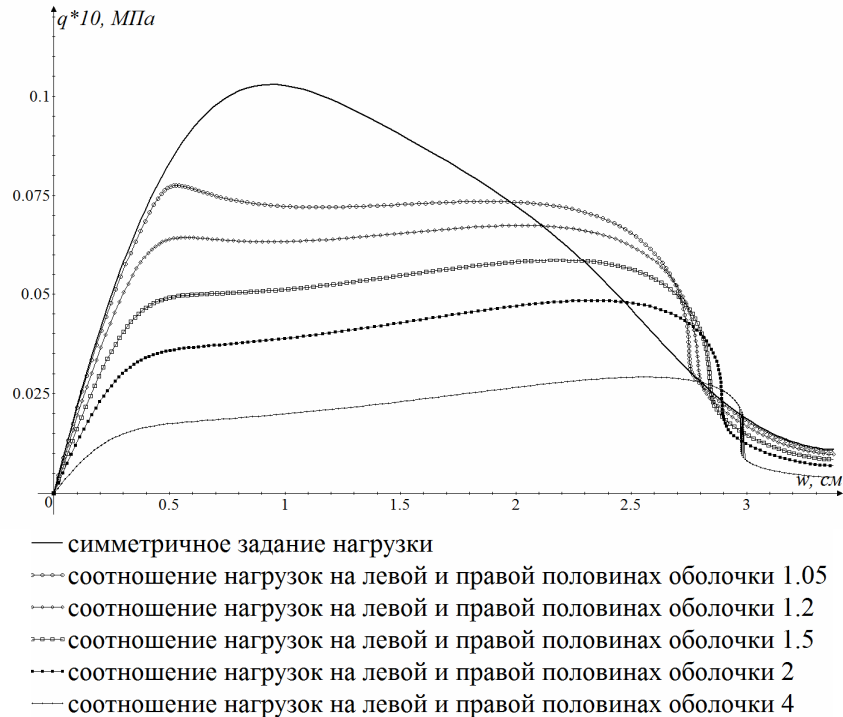


Рис. 5. Кривые равновесных состояний цилиндрической оболочки при различных условиях задания неравномерной нагрузки

2.2. Результаты расчета

На рис. 7 представлена кривая равновесных состояний для цилиндрической оболочки на квадратном плане, неравномерно нагруженной в соответствии со схемой на рис. 6. Потеря устойчивости происходит при величине параметра предельной нагрузки $q = 0,0176$ МПа.

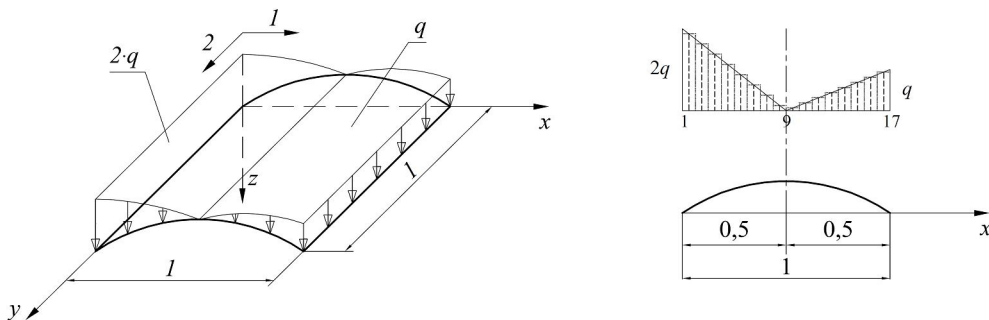


Рис. 6. Схема приложения неравномерной нагрузки на цилиндрическую оболочку по СНиП 2.01.07-85*.

Для сравнения на рис. 8 приведены кривые равновесных состояний той же оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, а также распределенной нагрузкой, заданной несимметрично по схеме на рис. 1, с коэффициентом $e=2,0$.

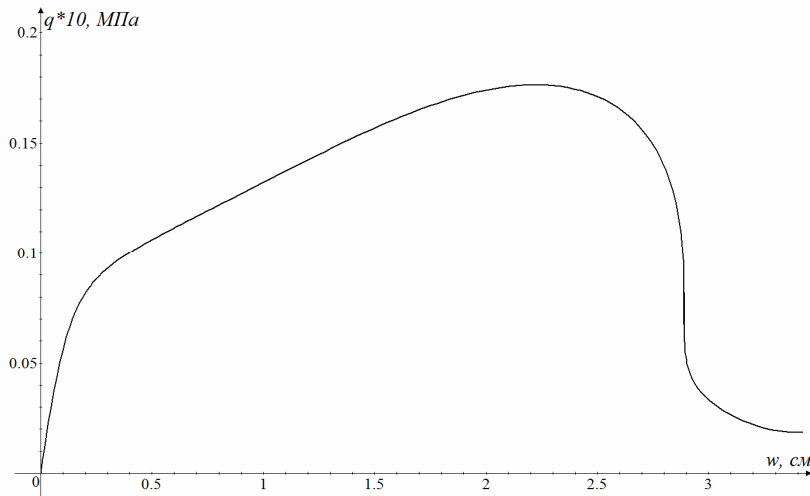


Рис. 7. Кривая равновесных состояний при схеме нагружения, соответствующей схеме распределения снеговых нагрузок для зданий со сводчатыми и близкими к ним по очертанию покрытиями по СНиП 2.01.07-85*

Как видно из рис. 8 параметр предельной нагрузки q для оболочки, нагруженной в соответствии со схемой распределения снеговой нагрузки по СНиП 2.01.07-85*, составляет 0,0176 МПа, что существенно превышает предельную нагрузку для равномерно нагруженной оболочки, составляющую 0,0103 МПа. При этом суммарная предельная нагрузка на оболочку по схеме рис. 6 на 28% выше суммарной нагрузки при равномерном нагружении. Полученный результат является весьма предсказуемым, учитывая, что при действии на оболочку неравномерной поперечной нагрузки в соответствии со схемой СНиП 2.01.07-85*, основная нагрузка сосредотачивается у опорных закреплений, а центральная часть оболочки оказывается мало нагруженной.

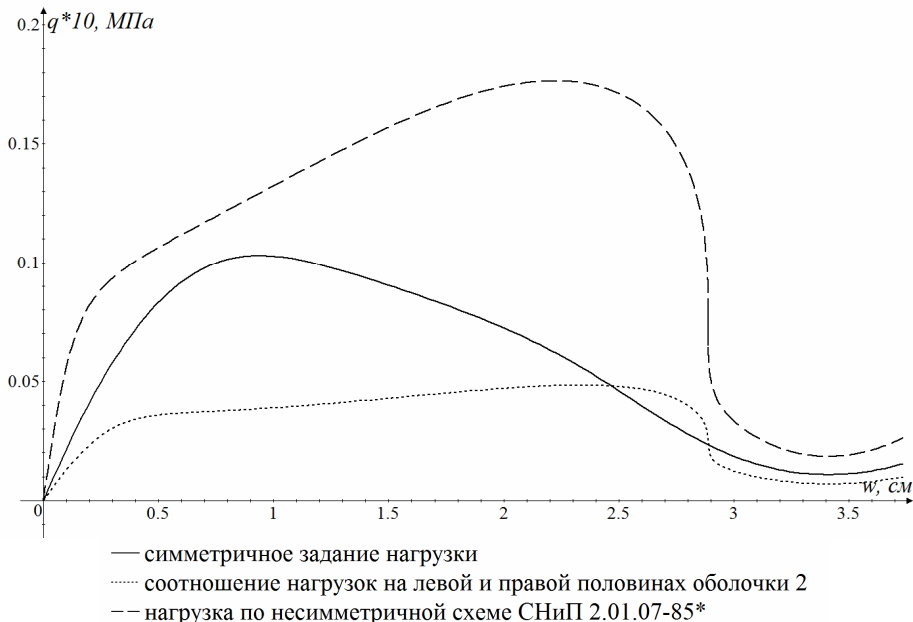


Рис. 8. Кривые равновесных состояний для квадратной в плане цилиндрической оболочки при различных условиях задания нагрузки

На рис. 9 и 10 представлены картины изополей перемещений исследуемой оболочки в момент потери устойчивости под воздействием рассматриваемых нагрузок: равномерно распределенной нагрузки, одинаковой по всей площади оболочки и неравномерной нагрузки, заданной в соответствии со схемой распределения снеговых нагрузок по СНиП 2.01.07-85*.

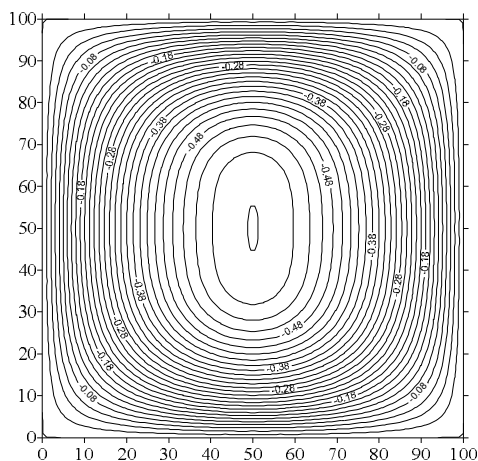


Рис. 9. Изополя перемещений (см) оболочки в момент потери устойчивости под действием равномерно распределенной нагрузки

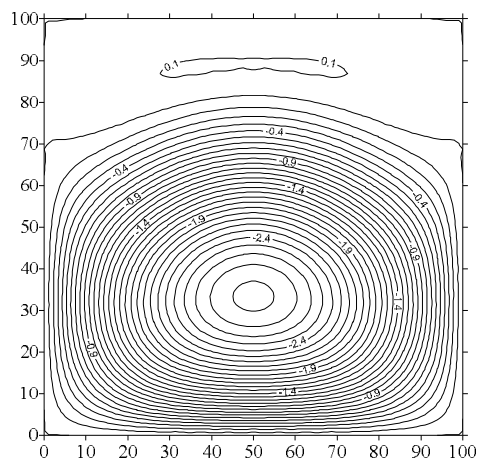


Рис. 10. Изополя перемещений (см) оболочки в момент потери устойчивости под действием неравномерной нагрузки согласно СНиП 2.01.07-85*

3. Выводы

В соответствии с графиком, приведенным на рис. 5, возрастание неравномерности приложения нагрузки, выраженное в увеличении соотношения величин нагрузок на левой и правой половинах оболочки, ведет к стремительному уменьшению значения предельной нагрузки и более ранней потере устойчивости. Уже при превышении нагрузки на одной половине оболочки на 5% ($e=1,05$) величина предельной нагрузки по сравнению с оболочкой, загруженной равномерно, уменьшается на четверть. Учитывая, что в инженерной практике довольно часто встречаются оболочки, подверженные действию неравномерно приложенной распределенной нагрузки, таких как вес снегового покрова или нагрузки от оборудования, указанное обстоятельство еще раз подтверждает важность учета неравномерности приложения нагрузок при расчете на устойчивость пологих оболочек. По результатам проведенных численных исследований устойчивости нелинейно-деформируемой оболочки, загруженной в соответствии со схемой распределения снеговой нагрузки по СНиП 2.01.07-85*, следует отметить, что для нее параметр предельной нагрузки существенно выше даже по сравнению с равномерно загруженной оболочкой, не говоря уже об оболочке с соотношением величин нагрузок на разных половинах, равным 2. Из проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что для пологих оболочек, а также сводчатых и близким к ним по очертаниям покрытий, с точки зрения потери устойчивости одними из наиболее опасных являются равномерно распределенные нагрузки, действующие с эксцентриситетом в соответствии с рис. 1.

Л и т е р а т у р а

1. *Lindgaard E., Lund E.* A unified approach to nonlinear buckling optimization of composite structures// Computers & Structures, 2011, vol. 89, issues 3–4, pp. 357–370.

2. *Alamatian J.* Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with Dynamic Relaxation method // *Computers & Structures*, 2013, vol. 114–115, pp. 84–97.
3. *Mileikovskii I.E., Trushin S.I.* Analysis of Thin-Walled Structures. – Rotterdam: A.A. Balkema Publishers, 2007. - 187 p.
4. Композиционные материалы: Справочник/ Под общ. ред. В.В.Васильева, Ю.М.Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
5. СНиП 2.01.07-85* «Нагрузки и воздействия». - М.: ОАО ЦПП, 2011. – 78 с.

References

1. *Lindgaard, E., Lund, E.* (2011). A unified approach to nonlinear buckling optimization of composite structures, *Computers & Structures*, vol. 89, issues 3–4, pp. 357–370.
2. *Alamatian, J.* (2013). Displacement-based methods for calculating the buckling load and tracing the post-buckling regions with Dynamic Relaxation method, *Computers & Structures*, vol. 114–115, pp. 84–97.
3. *Mileikovskii, I.E., Trushin, S.I.* (2007). *Analysis of Thin-Walled Structures*, Rotterdam: A.A. Balkema Publishers, 187 p.
4. *Vasiliev, V.V., Tarnopolskiy, Yu.M.* (1990). *Composed Materials: Reference book*, Moscow: Mashinostroenie, 512 p.
5. *SNIP 2.01.07-85* «Nagruzki i vozdeystviya»*, М.: ОАО TsPP, 2011, 78 p.

**THE STABILITY OF NONLINEAR DEFORMABLE CYLINDRICAL
COMPOSITE SHELLS UNDER NON-UNIFORM LOADS**

Trushin S.I.*, Sysoeva E.V.***, Zhuravleva T.A.*

* *Moskovskiy Gosudarstvenniy Stroitelnyy Universitet, Moscow*

*** *Moskovskiy Gosudarstvenniy Akademicheskiy Hudozhestvenniy Institute im. B.I. Surikova*

The numerical analysis results of flexible cylindrical shells stability in static unsymmetrical loading cases are given in the article. Geometrically nonlinear shell theory relations were used in computational model development. Equilibrium paths are derived using finite difference energy method and arch-length continuation procedure. Some results of flexible shallow cylindrical square shells analysis with various non-uniform out-of-plane load types are presented in the article.

KEY WORDS: shallow cylindrical shell, stability, geometrical nonlinearity, arch-length method, equilibrium curve, non-uniform out-of-plane load.

