2020 Vol. 24 No. 2 228–243
http://journals.rudn.ru/philosophy

Онтология и гносеология
Ontology and Gnoseology

DOI: 10.22363/2313-2302-2020-24-2-228-243

Научная статья / Research Article

Идея доказательства

А.М. Анисов

Институт философии РАН
Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1

Idea of the Proof

A.M. Anisov

Institute of Philosophy RAS
Russian Federation, 109240, Moscow, Goncharnay, 12/1

В статье исследуется неформальная сторона идеи доказательства. Слово «идея» используется в смысле, восходящем к Платону. Доказательство понимается как точно установленная связь точно сформулированных и объективно существующих идей. Эта связь идей относится к сфере возможного и может наличествовать в одних возможных мирах и отсутствовать в других. Критикуются попытки трактовать доказательство как процедуру убедительной аргументации. Показано, что доказательства не обязательно являются убедительными, и что убедительность может быть присуща внедоказательным формам аргументации. Кратко прослеживается генезис идеи доказательства от истоков до наших дней. Приводятся доводы в пользу тезиса о возникновении идеи доказательства в пифагорейской философии. Обсуждается вопрос о том, по каким причинам идея доказательства не переоткрывалась больше нигде и никогда. Рассматривается проблема временного разрыва между появлением доказательств и точным определением понятия доказательства в современной логике. На доступном примере обосновывается неотделимость идеи доказательства от ее формального представления в той или иной логике. Приводится перечень некоторых основных неформальных предикатов доказательств и дается их краткая характеристика.

Ключевые слова: идея, доказательство, вывод, логика, исчисление, аксиома, наука, аргументация

История статьи:
Статья поступила 09.12.2019
Статья принята к публикации 20.01.2020

Для цитирования: *Анисов А.М.* Идея доказательства // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Философия. 2020. Т. 24. No 2. С. 228—243. DOI: 10.22363/2313-2302-2020-24-2-228-243

The article explores the informal side of the idea of the proof. The word "idea" is used in a sense dating back to Plato. Proof is understood as a precisely established connection of precisely formulated and objectively existing ideas. This connection of ideas belongs to the realm of the possible and can be present in some possible worlds and absent in others. Attempts to interpret the proof as a procedure of convincing argumentation are criticized. It is shown that the proof is not necessarily convincing, and that persuasiveness may be inherent outside the proof-based forms of argument. The genesis of the idea of the proof is briefly traced from its origins to the present day. Arguments are made in favor of the thesis of the idea of the proof in Pythagorean philosophy. The question of why the idea of the proof has not been rediscovered anywhere and never is discussed. The problem of the time gap between the appearance of the proof and the exact definition of the concept of the proof in modern logic is considered. An accessible example substantiates the inseparability of the idea of the proof from its formal presentation in one or another logic. A list of some basic informal predicates of the proof is given and a brief description is given.

Keywords: idea, proof, conclusion, logic, calculus, axiom, science, argumentation

Article history:
The article was submitted on 09.12.2019
The article was accepted on 20.01.2020

For citation: Anisov A.M. Idea of the proof. *RUDN Journal of Philosophy*. 2020; 24 (2): 228—243. DOI: 10.22363/2313-2302-2020-24-2-228-243

Введение

Идея доказательства лежит в основании науки. Лишь доказательное знание является подлинно научным [1]. Поэтому интерес к феномену доказательства не иссякнет до тех пор, пока общество испытывает нужду в науке и хочет ее развития. Потребность в переосмысливании идеи доказательства обусловлена также впечатляющим прогрессом в области создания искусственных интеллектуальных систем, способных осуществлять в автоматическом режиме поиск, построение и проверку выводов и доказательств. Возникла проблема эпистемологического статуса компьютерных доказательств, недоступных для пошаговой проверки людьми [2]. Кроме того, необходимо устранить разрыв, образовавшийся между логической и культурологической трактовкой идеи доказательства. Попытки вписать идею доказательства в общекультурный контекст зачастую терпят неудачу по причине приписывания доказательствам субъективных характеристик вроде ясности, убедительности, обозримости и им подобных.

Слово «идея» здесь используется в смысле, восходящем к Платону: как не подверженное изменениям во времени и не занимающее место в физическом пространстве идеальное бытие.

Вряд ли можно оспорить факт отсутствия доказательств в мире материальных вещей. Другое дело — сознание, мир наших мыслей. Разве доказательства не там? Изучайте мышление, и тогда поймете, что такое доказательство. Тем более, что существует наука о правильном мышлении — *логика*, которая по факту и занимается вопросом о том, что является, а что не является доказательством. Проблема в том, что логика как раз не является наукой о мышлении [3]. В противном случае она была бы разделом психологии.

Одно время верили, что психология объяснит логику. Это точка зрения *психологизма* была разгромлена одним из создателей современной логики Готтлобом Фреге. Логика не занимается тем, как мы мыслим. Фреге утверждал: «Логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины» [4. С. 307]. Доказательство неразрывным образом связано с истиной и потому находится там же, где бытийствует истина — в мире идей.

В утверждении существования мира идей нет никакой мистики. Сфера реально существующего не исчерпывается бытием пространственно-временных физических вещей и длящихся во времени лишенных пространственных характеристик мыслей. Наряду с этими двумя видами реализовавшегося, *актуального* бытия есть еще бытие *потенциальное* или *возможное*. Этот третий вид бытия предшествует в онтологическом смысле двум другим. Прежде, чем что-то реализовать, надо иметь возможность реализации. Могли ли существовать Вселенная, жизнь, человек, будь они невозможны? Ответ очевиден. Менее очевидно, что сфера возможного обладает бытием, вообще говоря, независящим от того, что именно из возможного реализовалось (осуществилось), а что нет.

Именно постижением третьего универсума, — *универсума возможного*, — занимаются такие науки, как логика и математика. Это науки о возможных мирах, а не о конкретном реализовавшемся действительном мире. Поэтому истины логики и математики не требуют обоснования с помощью наблюдения и эксперимента. Однако действительный мир в его физической части есть лишь один из возможных миров, и потому логико-математическое описание именно этого возможного мира в то же время является описанием действительного мира. Отсюда ответ на вопрос о «непостижимой эффективности математики в естествознании».

Понятие доказательства принадлежит логико-математическому знанию. Там, где отсутствует точная фиксация идей, невозможны и точно определенные связи между ними. Но доказательство есть по роду не что иное, как *точно установленная связь точно сформулированных идей*. Как известно, естественный язык по своей природе строгостью и точностью не отличается. Отсюда неизбежность использования при строгом построении доказательств искусственных формальных языков. В них идеи фиксируются в *формулах*, а доказательства устанавливают *связи* между формулами в соответствии с точно определенными *правилами*. На практике упомянутая неизбежность смягчается употреблением полуформального языка, каковым является язык обычной математики. Однако доказательства в полуформальном языке получают оправдание лишь в том случае, когда они хотя бы в принципе могут быть превращены в формальные. В наше время не обязательно это делать вручную. На помощь приходят соответствующим образом запрограммированные компьютеры.

Доказательства устанавливают связи между идеями внутри каждого из различных возможных миров. В этом *онтологическая суть* доказательств. По этой онтологической сути доказательства существуют не только независимо от мышления как видового признака человека, но и от того, как рассуждает тот или иной индивидуум. Таким образом, доказательства релятивизированы только по отношению к возможным мирам: то, что доказуемо в одном мире, может быть недоказуемо в другом. Даже представляющаяся многим универсальной истина 2×2=4 доказуема отнюдь не во всех возможных мирах. Наборы доказуемых истин разные в разных возможных мирах. Это не означает, что понятие доказательства меняется от мира к миру. Напротив, оно едино для всего универсума возможных миров. Этот предельно общий универсум возможных миров задается *логикой*, которая определяет и понятие доказательства. Однако оказалось, что логика не единственна. Но если логика не единственна, то, стало быть, понятие доказательства тоже не единственно. Отсюда правильно говорить не о доказательстве вообще, а о *доказательстве в логике L* (конечно, после фиксации логики каждый раз упоминать о ней не обязательно).

Миф об убедительности доказательства

Намеченное во введении онтологическое понимание природы доказательства как объективной связи идей не единственное из возможных. Допустимо, например, рассматривать доказательства в рамках теории формализации рассуждений (мы так и поступили в книге [3]). В любом случае оказывается, что понятие доказательства соотносится с понятием истины, так как доказуемой должна быть только истина, но не ложь. Однако в подвергшейся разлагающему влиянию постмодернизма части современной философии идея истины была дискредитирована. Понятие объективной истины предлагается заменить понятием *коммуникации* между субъектами (развернутую критику коммуникативистской программы см. в [5]). Доказательство также превращается в средство коммуникации между людьми, пытающимися *убедить* друг друга. Поэтому главным критерием доказательства объявляется его убедительность. Поскольку в разных культурах и в разных эпохах убеждают поразному, никакого объективного понятия доказательства нет и быть не может.

«Основным общим критерием приемлемости доказательства представляется его убедительность — способность вызвать у адресата такое принятие данного утверждения, что он готов убеждать в нем других. Доказательство всегда погружено в социально-исторический контекст, поэтому общего для всех наук и всех времен понятия доказательства не только не существует, но и не может существовать» [6. С. 100].

В приведенной цитате единственная новация — утверждение, что доказательство имеет такую степень убедительности, что заставляет убежденного субъекта убеждать других. Получается, что если вас в чем-то убедили, но вы не горите желанием убеждать в этом других, то вам ничего не доказали. А если вы готовы убеждать других, то доказали. Например, проповедь превращается в доказательство, если вызывает желание у ее прослушавших броситься проповедовать не слышавшим.

В неплохой в целом книге [7], посвященной якобы изменчивым математическим доказательствам, автор выдает серию утверждений, относящих доказательство то к психологии, то к социологии, то к риторике. Основная мысль все та же — доказательство должно убеждать.

«*Доказательство* в математике — психологический инструмент, предназначенный для убеждения некоего лица или аудитории в том, что некоторое математическое утверждение истинно»; «В доказательстве есть и человеческий фактор, который нельзя игнорировать. Принятие новой математической истины — это социологический процесс»; «...доказательство — это такой инструмент риторики, который используется, чтобы один человек убедил другого, что некоторое математическое утверждение верно» [7. С. 5, 7, 19].

Если допустить, что эти утверждения верны, то ничего удивительного в изменчивости математических доказательств нет. Ведь и психология людей, и социальные структуры, и приемы риторики исторически изменчивы. И то, что было убедительным в одной культуре, может перестать быть таковым в другой. Тогда должен наблюдаться феномен принятия и отбрасывания одних и тех же математических доказательств. Скажем, что-то доказанное древними должно перестать считаться доказанным ныне. Или что-то из доказанного греками должно отвергаться, например, китайцами. Однако факты говорят об обратном. Тот же автор, не замечая, что противоречит сам себе и что факты не согласуются с мифом об убедительности, констатирует: «Еще одна особенность математики в ее вневременности. Теоремы, которые тысячи лет назад доказали Евклид и Пифагор, до сих пор верны. Мы пользуемся ими с уверенностью, поскольку знаем, что они так же верны сейчас, как верны были тогда, когда впервые их открыли великие мастера. В других науках все иначе. К медицинской или компьютерной литературе даже трехлетней давности обращаются редко, так как то, что казалось верным всего несколько лет назад, уже изменилось и преобразовалось. А математика с нами всегда» [7. С. 35—36].

А логика тоже с нами всегда? Увы, логика, оказавшаяся способной сказать, что такое доказательство, существует всего лишь столетие с небольшим. Аристотелевская логика на эту роль не способна: это конечная и примитивная логическая система, которая совершенно не пригодна для осуществления реальных математических доказательств. Можно сказать, что в этом отношении эта логика устарела уже в момент ее возникновения в IV в. до н.э., тогда как математические доказательства существовали уже два столетия до ее появления.

По сравнению с двумя с половиной тысячелетиями существования доказательной математики это ничтожный срок. Получается, что веками математики успешно доказывали теоремы, не зная, что такое доказательство? Именно так! Объяснить данный удивительный факт мифом об убедительности не получится. Здесь более поучительной будет аналогия с законами физики: не умея формулировать эти законы, люди следовали им в своей деятельности. Для того, чтобы избежать падения, не обязательно читать Ньютона. Так и находить доказательства можно было и до Фреге и Рассела. Возможно это благодаря объективному существованию нефизической идеальной реальности, с которой имеет дело математика. В этой реальности такие же твердые углы, как и в физической. Только если физические углы оставляют синяки и шишки, идеальные углы не наносят ран телу, лишь заставляя ум неуклонно следовать их форме. Люди, способные при помощи доказательств двигаться в идеальной реальности, во все времена и всюду составляли абсолютное меньшинство. А процедура убеждения известна так или иначе всем и каждому. Веками убеждали и убеждают кого угодно и в чем угодно. Причем здесь доказательства?

Попробуем продемонстрировать несостоятельность тезиса об убедительности доказательств на простом примере. Рассмотрим следующее рассуждение.

1. Не верно, что я тебя не уважаю — *допущение*;
2. *следовательно*,
3. Я тебя уважаю — *заключение*.

Обозначим заключение буквой A. При таком сокращении допущение утверждает «Неверно, что не A». Условимся, что слова «неверно» и «не» означают одно и то же — операцию *логического отрицания* или *негации*. Это позволяет ввести для негации специальный знак $\neg$. Тогда рассуждение перепишется в следующей форме.

1. $\neg\neg A$ — *допущение*;
2. *следовательно*,
3. A — *заключение*.

Образует ли оно доказательство? Ответ по наитию не годится. Необходимо продемонстрировать *связь* между допущением и заключением. Для этого потребуются *правила логики*. В классической логике принимается следующее правило *удаления отрицания* (сокращенно $\neg$ у).

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Применяя это правило, получим следующий вывод.

1. $\neg\neg A$ — *допущение*;
2. *следовательно*, — по правилу ¬ у,
3. A — *заключение*.

Теперь шаги 1—3 образуют нужное нам (полуформальное) доказательство[1]. Насколько оно убедительно? С позиции классической логики это настоящее, не вызывающее сомнений, доказательство. Но с точки зрения интуиционистской логики, эти шаги не образуют доказательства. Дело в том, что в интуиционистском исчислении высказываний и предикатов (см., напр., [8] или [9]) правило снятия двойного отрицания (т.е. правило ¬ у) отбрасывается. А в построенном выводе используется это неприемлемое для интуиционистов правило. Поэтому в классической логике из $\neg\neg A$ выводимо A, но в интуиционистской логике это не верно[2].

В первой половине XX в. шел бескомпромиссный спор, какая логика, — классическая или интуиционистская, — должна использоваться в математической науке. В числе аргументов в этой дискуссии фигурировали ссылки на интуицию, убедительность, понимаемость (в частности, интуиционисты могли притворяться, что не понимают доказательств с использованием закона исключенного третьего или правила снятия двойного отрицания) и тому подобные субъективные аспекты, сопровождающие математическое познание. По прошествии десятилетий острота спора сошла практически на нет. Вместо бесплодного выяснения, какая разновидность доказательства «доказательнее», стали просто фиксировать, в какой конкретной логике осуществляется доказательство.

Самое существенное здесь то, что формализация идеи доказательства избавила ее от психологизма, социологизма, коммуникативизма — вообще от любой формы субъективизма. После того, как логика зафиксирована и превращена в формальную систему, проверка того, является ли некоторая конструкция в этой логике доказательством, может быть перепоручена компьютеру. А компьютер, как вы понимаете, не озабочен вопросами убедительности, ясности, интуитивности, красоты и прочими в том же духе. Более того, как оказалось, компьютеры способны находить доказательства, а не только проверять имеющиеся.

История про убедительность как чуть ли не главную или даже главную характеристику доказательств оказалась мифом. К сожалению, это не превратившийся в фантазию миф прошлого, а действующий миф, ложно выдающий себя за подлинную реальность. Убедительность как искажающая идею доказательства мысль не должна фигурировать ни в определении доказательства,

---

[1] Точнее говоря, это не доказательство, а вывод. Доказательства являются частным случаем выводов. Но эти логические нюансы сейчас не существенны.

[2] В интуиционистской логике не действует общий принцип снятия двойного отрицания, но в частных случаях он применим. Например, если в интуиционистской логике доказуемо А, то можно легко построить интуиционистски приемлемый вывод из ¬¬А выражения А.

ни в теории доказательств. За указанной границей убедительность может быть важной в процессах обучения, коммуникации, аргументации. Собственно, чем мы занимались до сих пор? — Поиском убедительных аргументов в пользу тезиса о необходимости устранения убедительности из идеи доказательства! Эти аргументы мы не сможем превратить в доказательства. Но такова общая ситуация: в философии мало что доказывают, больше пытаются убедить.

Истоки идеи доказательства

До окончательного формирования современной логики в начале XX в. не было точно определенного понятия доказательства. Ничего не оставалось, как полагаться на убедительность в построении и оценке доказательств. Однако убедительность как таковая вовсе не предполагает построения доказательств. Не нуждавшаяся в доказательствах древневосточная математика также могла достигать убедительности, руководствуясь принципом: «Гляди, смотри!». Проведи соответствующие измерения и вычисления — и убедись!

Например, рассмотрим ныне известную каждому школьнику теорему Пифагора. Согласно Ван дер Вардену, сама формулировка этой теоремы появилась на Древнем Востоке в клинописных текстах примерно за 1200 лет до Пифагора [10. С. 139]. Но, разумеется, без каких-либо доказательств. Ведь и не было нужды в доказательстве, поскольку каждый, проведя с надлежащим старанием необходимые построения и измерения, мог убедиться, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника. Равна с *практической* точностью, достаточной для хозяйственной деятельности. О существовании абсолютной *теоретической* точности не знали, да ее никто и не искал.

Дело не только в опоре на очевидность и прагматизме древневосточной математики. В Древнем мире существовали своего рода культурные запреты на саму возможность открытия доказательств. Существовала мотивация, вектор действия которой делал открытие доказательств поистине невозможным. Первую разновидность такой отрицательной мотивации назовем *вектором легитимности*. Понятно, что первые доказательства должны были быть простейшими. Можно ли представить себе преисполненного достоинства древнего китайского мудреца, тратящего драгоценное время своей жизни на какие-то малопонятные манипуляции с давно известными фактами из школьной математики? Крайне маловероятно. Даже если бы и нашелся такой чудак, он потерял бы свою легитимность в глазах окружающих, утратил бы свой культурный статус. Его подняли бы на смех или попросту игнорировали бы. Китайские мудрецы предпочитали размышлять о судьбах народов и государств, о человеке и его должном поведении, об устройстве и взаимоотношениях Земли и Неба…

Вторая разновидность — *вектор лояльности*. На примере того же Древнего Китая можно показать, что на убедительные рассуждения, если они вели к неприемлемым выводам, налагался культурный запрет. Разумеется, тем самым не запрещались доказательства — нельзя запретить то, что не существует. Зато перекрывался путь совершенствования уровня строгости рассуждений, что исключало появление доказательств. В докторской диссертации крупнейшего знатока древнекитайской аргументации А.А. Крушинского рассматривается одно примечательное древнее рассуждение, иллюстрирующее коллизию между безупречностью аргументации и явной неприемлемостью полученного в результате вывода.

«В царстве Ци был один слуга. Когда тот, кому он служил, попал в трудные обстоятельства, то слуга не умер за него. Как-то он встретил на дороге знакомого и тот воскликнул: “Так ты и в самом деле не умер!” Слуга ответствовал ему: “Это верно. Ведь каждый, кто служит, имеет в виду некоторую пользу. Но умереть — вещь бесполезная. Потому-то я и не умер”. Знакомый произнес: “И [после этого] ты все же можешь смотреть людям в глаза?” В ответ было сказано: “А если бы я умер, то смог бы тогда смотреть им в глаза?”»

«История заключается следующим знаменательным выводом: “Не умереть за своего господина и вышестоящего — это серьезное нарушение своего долга. Но при этом его рассуждения выглядят неоспоримыми. Таким образом, ясно, что слова не могут быть критерием для разрешения дел”» [11. С. 297—298] (здесь и в след. ссылке нумерация дается по электронному тексту диссертации).

И это было не частное мнение случайных лиц. Убедительная речь без ясно выраженной позитивной ценностной составляющей внушала подозрения в нелояльности. Такие основанные на очевидной правильности рассуждения не только не приветствовались.

«...Они воспринимались как удобное средство маскировки различных софистических уловок, нацеленное на придание речи мнимой убедительности. К подобному софистическому красноречию, не только лишенному какой-либо практической ценности, но и прямо дезориентирующему правителя, полководца — вообще любого практика — отношение в господствующей конфуцианской традиции с самого начала было отчетливо негативным. Конфуций прямо заявлял о своей ненависти к тому, как “умело говорящие (буквально — обладающие “умелым ртом”) опрокидывают царства и [разрушают] семьи”. По его словам, “искусные слова (цяо янь) расстраивают нравственность”» [11. С. 297].

Надо ли после сказанного удивляться, что в достигшей высочайших высот китайской цивилизации доказательства так и не появились. Более того, и появиться не могли ввиду отмеченных культурных препятствий и запретов. Примечательно, что приведенные цитаты из диссертации Андрея Андреевича исчезли в его итоговой книге [12]. По-видимому, из-за их явной антилогической направленности, затрудняющей обоснование тезиса автора о существовании особой, обходящейся без доказательств, древнекитайской логики.

Некоторые историки считают, что Фалес (учивший, что первоначалом всего сущего является вода) был первым человеком на Земле, который стал доказывать математические теоремы (в их числе упоминается теорема о том, что диаметр делит круг пополам, теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника и другие). Никаких достоверных свидетельств в пользу данной точки зрения нет. Но суть даже не в этом. Какие причины могли побудить материалиста Фалеса доказывать совершенно очевидные с точки зрения здравого смысла утверждения? Другие ученые (например, Б. Рассел) полагают, что первым стал доказывать математические теоремы Пифагор. Ответ на аналогичный вопрос — почему? — можно попытаться найти в философии Пифагора.

Как известно, главная и исключительная особенность философии Пифагора состояла в том, что для него основой всего существующего были *числа*. Пифагор провозглашает, что «числу все вещи подобны». Значит, изучая числа, мы постигаем, как устроено мироздание. Между прочим, учение Пифагора совсем не нелепое: ведь в реальной жизни мы постоянно сталкиваемся с определенными числовыми закономерностями в поведении вещей и процессов. Но что такое число? Первоначально пифагорейцы трактовали числа как доступные чувственному восприятию структурированные схемы, составленные из точек. Зададимся вопросом: много ли можно узнать о числах, если трактовать их наглядным образом? Лишь в самых простых случаях наглядность облегчает понимание. Достигнуть нетривиальных истин о числах таким путем невозможно. Ведь числа, в отличие от чувственно воспринимаемых вещей, в природе не встречаются.

По-видимому (здесь мы вступаем в область догадок из-за неимения соответствующих исторических фактов) настойчивое стремление пифагорейцев к познанию чисел заставляло их искать новый метод работы со столь сложными объектами, что и натолкнуло кого-то из них (возможно, самого Пифагора) на идею отказа от наглядности в пользу *рассуждений* о числах. Это была верная идея, т.к. числа являются абстрактными объектами, свойства и отношения которых систематически постигаются лишь рассуждениями. Но это должны быть рассуждения особого рода, которые нельзя проверить по принципу восточных математиков: «гляди, смотри». На что смотреть, если объекты изучения находятся за границами возможностей органов чувств? Остается один выход: строить рассуждения о числах таким образом, чтобы раскрыть истинную природу чисел. Это и была *первоначальная идея доказательства*.

Надо ли добавлять, что пифагорейцы с увлечением бросились доказывать математические теоремы. С чего они начали? Естественно, первоначально доказывали те уже известные математические утверждения, которые требовали самых простых доказательств. Но это не меняло сути дела: на свет появилась первая наука — доказательная или дедуктивная математика. При этом никакого стремления убеждать других или пропагандировать свою философию пифагорейцы, по имеющимся сведениям, не обнаруживали. Наоборот, их деятельность носила закрытый для окружающих характер. А когда в связи с открытием теоремы о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата возникла угроза самой сути пифагорейской философии, они пытались засекретить доказательство этой теоремы, но ничего не могли поделать с обнаружившимися неприемлемыми для них свойствами математической реальности.

Итак, желая изучать скрытые от непосвященных числовые законы, пифагорейцы не могли опираться при их обосновании на чувственный опыт, мистическую интуицию или что-либо подобное. Оставалось искать иные способы обоснования. На этом пути они, следуя философии Пифагора, пришли к открытию математических доказательств. Вполне возможно, что это открытие совершил сам Пифагор. Подобная мотивация не могла возникнуть у Фалеса и других представителей милетской школы, исходивших из материалистических представлений о первоначале всего сущего. В противном случае без ответа остается вопрос: чего ради в математике доказывать то, что и так известно и всеми признано? Единственный вариант ответа, который мы можем предложить, состоит в том, что идея доказательства возникла как ответ на внутренние проблемы пифагорейской философии. Никакими эстетическими, экономическими, политическими или общекультурными соображениями объяснить появление этой идеи нельзя. Даже религиозная одержимость числами объясняет лишь упорство пифагорейцев, но не те результаты, к которым они пришли. Если бы Пифагор и его последователи стремились только к вере, их ждала бы участь представителей всех религиозных учений, для которых вера превыше знания. Сама возможность строгих рассуждений о числах ставила пифагореизм на твердую почву, которой были лишены другие философские течения. Ни о воде, ни о воздухе, ни об апейроне, ни об огне (разные варианты первоначала в ранней греческой философии) рассуждать подобным образом не умели. Открытие процедуры доказательства было для пифагорейцев величайшим достижением, подтверждающим правоту всего учения в целом.

Доказательства с неформальной точки зрения

В данной статье мы следуем за Платоном еще в одном отношении. Подобно тому, как Платон описывал мир идей неформальным образом, попробуем охарактеризовать идею доказательства тоже неформально в том смысле, что будем пользоваться при этом естественным языком. Точное определение понятия доказательства в современной логике основано на использовании искусственных языков логических исчислений. Выделяют три основных типа таких исчислений: аксиоматический, секвенциальный и натуральный[3]. Самым простым является определение доказательства в аксиоматических исчислениях, представляющих из себя набор аксиом и правил логического вывода. В естественном языке оно может быть выражено следующим образом.

[3] Все три основных типа формализации доказательства обстоятельно исследованы В.А. Смирновым в книгах [13] и [14]. На исчислении секвенций построена фундаментальная работа Г. Такеути [15]. Изучению натуральных исчислений посвящена монография Д. Правица [16]. Предложенная автором натуральная система обсуждается в [3] и [17].

Доказательством в аксиоматической системе ***A*** называется *конечная последовательность утверждений, каждое из которых есть либо* ***аксиома*** *из* ***A****, либо получается из предыдущих утверждений последовательности по одному из* ***правил логического вывода*** *из* ***A***.

Простота приведенного определения может вызвать недоумение: получается, что две с половиной тысячи лет, — с VI в. до н.э. до начала XX в. н.э., — люди доказывали теоремы, не умея определить, что же такое доказательство, хотя идея такого определения лежит на поверхности? На самом деле проблема заключается в том, чтобы, во-первых, точно сформулировать аксиомы и правила вывода, и, во-вторых, привести их исчерпывающий список, если это вообще возможно[4]. Трудности с первым аспектом иллюстрирует история логики. Аристотелевская силлогистика, веками лежавшая в основе логики, оказалась слишком слабой логической системой, совершенно недостаточной для построения реальных математически доказательств. Лишь на рубеже XIX и XX вв. удалось построить логические системы, способные шаг за шагом не только воспроизводить уже полученные математические доказательства, но и обеспечить неограниченный рост доказательного знания.

Сложности возникали и со вторым аспектом. Наиболее известна в этой связи судьба *пятого постулата* Евклида. Можно ли его вывести из остальных? Если ответ утвердительный, нет необходимости включать его в список исходных постулатов. В итоге прошли века, прежде чем доказали, что вывести пятый постулат таким образом невозможно. В подобных случаях говорят, что данное утверждение *независимо* от остальных. В наше время результаты о независимости тех или иных принципиальных утверждений составляют важную часть достижений современной науки. Понятно, что результаты о независимости не могли быть получены, если бы не было точного определения доказательства.

Сразу оба рассматриваемых аспекта ярко проявились в истории *аксиомы выбора*. Ее применяли в математике неявно, и лишь затем было осознано, что это особая аксиома, без которой доказать многие важные для математики теоремы нельзя. Кроме того, аксиома выбора оказалась независимой от остальных аксиом теории множеств ZF (теории множеств Цермело-Френкеля), которая наиболее широко применяется в математической практике (подробнее см. [18–20]).

Еще одним вопросом фундаментальной значимости была проблема *непротиворечивости* используемых теорий. Появление парадоксов в самих основаниях математической науки (парадокса Б. Рассела и других) потребовало разработки *теории доказательств*, в которой проблема непротиворечивости находится в центре внимания [15; 21; 22]. Исторически теория доказательств началась с программы Д. Гильберта по обоснованию математики, по которой нанесли сокрушающий удар ограничительные теоремы К. Гёделя.

[4] Теорема о неполноте К. Гёделя продемонстрировала, что это возможно не всегда.

Разумеется, без точного ответа на вопрос, что такое доказательство, построение этой теории было бы неосуществимо.

Наконец, идея доказательства лежит в фундаменте современной логики как неотъемлемой части философии. В конце концов, именно логика отвечает на вопрос, что такое доказательство и какова его природа. А природа эта оказалась непостижимой вне методов формализации, разработанных логической наукой. Расплывчатые и туманные представления о доказательстве остались в прошлом. Отныне любое неформальное обсуждение проблемы доказательства должно иметь под собой твердую основу в виде современного логического понятийного аппарата, позволяющего в любой момент переходить от общих слов к формальным логическим конструкциям.

Перечислим лишь некоторые (за не имением места) основные неформальные свойства доказательств, учитывая, что в таком содержательном ракурсе исчезает, например, различие между доказательствами и выводами.

1. Верифицируемость. Доказательства обязаны быть проверяемыми. Значительное число пропущенных шагов (под предлогом их очевидности) или хотя бы один пропуск нетривиального шага превращает рассуждение в бездоказательное. К сожалению, доведение рассуждений до приемлемого для доказательств вида практикуется лишь в логике и математике. В остальных областях науки реальные рассуждения сплошь и рядом содержат пропуски, всякого рода умолчания, неявные допущения и т.п. Этим обстоятельством обусловлен тот факт, что применение критериев доказательности для проверки рассуждений в нематематизированных науках весьма затруднительно.

2. Фальсифицируемость. Если в доказательстве имеется ошибка, то она должна быть однозначно определяемой с точностью до шага доказательства. Вообще, в доказательствах возможны троякого рода ошибки. Во-первых, это ошибки-опечатки. Во-вторых, ошибки-недосмотры. В-третьих, ошибки в выводе. Даже школьник может найти ошибку в доказательстве академика, и последний обязан ее признать. На практике такое бывает довольно редко и касается, как правило, первой или второй разновидности ошибок. Однако опечатки можно исправить, а пропущенное по недосмотру восстановить. Сложнее с третьей разновидностью. Ошибка в самом выводе может быть неустранимой, что обесценивает рассуждение. Но даже устранимые ошибки в выводе бывают на деле трудно устранимыми, требующими существенных и нетривиальных изменений и добавлений в отношении исходного рассуждения.

3. Принудительность. Доказательства для вменяемого субъекта обладают принудительной силой. Такой субъект будет вынужден признать доказанную теорему, даже если она ему очень не нравится (как вызывавшая ненависть пифагорейцев теорема о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата). Принудительность не влечет убедительность. Например, из аксиомы выбора принудительно следует теорема о возможности вполне упорядочить континуум. Однако многие математики не считают эту теорему убедительной, т.к. никто не смог предложить конкретный способ упорядочения.

4. Вечность. Однажды полученные доказательства, если они правильны, т.е. действительно являются доказательствами, остаются нетленными и непреходящими во веки веков. В этом смысле они вечны. Формальным выражением вечности доказательств является свойство *монотонности* выводимости и логического следования [3], в силу которого никакое новое знание не отменяет прежних доказанных утверждений. Например, математические доказательства древних греков признаются нами и поныне, и появление, скажем, теории множеств и квантовой физики ничего здесь изменить не могут.

5. Формализуемость. Любое подлинное доказательство может быть трансформировано из неформального в формальное, а проверка формального варианта возможна на соответствующим образом запрограммированном компьютере. Если содержательные рассуждения такой трансформации не поддаются, то они вообще не являются доказательствами. Поэтому верно сказано: «Неформальные и формальные доказательства различаются по стилю, а не по строгости» [23. P. 49].

6. Переносимость. Если та или иная культура способна к восприятию доказательств, то любое доказательство, даже полученное в совершенно других культурных условиях, будет воспринято в этой культуре именно как доказательство. В этом смысле признак доказательности не зависит от культуры. Поэтому не бывает национальных наук. Не существует английской или немецкой, русской или французской, итальянской или испанской арифметики или физики, логики или геологии, ботаники или кристаллографии. Доказательное знание, т.е. наука, не признает ни культурных, ни национальных границ. Хотя при этом вклад тех или иных культур в науку может весьма отличаться.

Заключение

Идея доказательства возникла в пифагорейской философии из попыток обоснования основополагающего тезиса о фундаментальной роли чисел в мироздании. Никогда и нигде больше эта идея не переоткрывалась. Будучи формальной по сути, идея доказательства может быть представлена неформальным образом. Среди содержательных предикатов доказательств можно выделить верифицируемость, фальсифицируемость, принудительность, вечность, формализуемость, переносимость и ряд других. Однако, вопреки расхожему современному мифу, в этом перечне нет такой характеристики, как убедительность.

Список литературы

[1] *Анисов А.М.* Что такое наука? // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Философия. 2011. № 3. С. 120—130.

[2] *Анисов А.М.* Понимание математических доказательств и ЭВМ // Вопросы философии. 1987. № 3. С. 29—40.

[3] *Анисов А.М.* Современная логика. М.: ИФ РАН, 2002.

[4] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сборник трудов. М.: Аспект Пресс, 2000.
[5] *Павленко А.Н.* Пределы интерсубъективности (критика коммуникативной способности обоснования знания). СПб.: Алетейя, 2012.
[6] *Кузина Е.Б.* О понятии доказательства // Логические исследования 2018. Т. 24. № 2. С. 100—107.
[7] *Кранц С.* Изменчивая природа математического доказательства. Доказать нельзя поверить. М.: Лаборатория знаний, 2016.
[8] *Драгалин А.Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. М.: Едиториал УРСС, 2003.
[9] *Плиско В.Е., Хаханян В.Х.* Интуиционистская логика. М.: Изд. мех-мат. ф-та МГУ, 2009.
[10] *Ван дер Варден*. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. М., 1959.
[11] *Крушинский А.А*. Логика древнего Китая. Дисс. на соиск. уч. ст. доктора филос. наук (Специальность 09.00.07 — логика). М., 2006.
[12] *Крушинский А.А*. Логика Древнего Китая. М.: ИДВ РАН, 2013.
[13] *Смирнов В.А*. Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука, 1972.
[14] *Смирнов В.А*. Теория логического вывода. М.: РОССПЭН, 1999.
[15] *Такеути Г.* Теория доказательств. М.: Мир, 1978.
[16] *Правиц Д.* Натуральный вывод. Теоретико-доказательственное исследование. М.: ЛОРИ, 1997.
[17] *Анисов А.М*. Онтологический статус доказательств сведением к абсурду // Ложь как проблема формальной онтологии / А.Н. Павленко, А.М. Анисов, В.Л. Васюков, С.А. Павлов. СПб.: Алетейя, 2019. С. 123—187.
[18] *Медведев Ф.А*. Ранняя история аксиомы выбора. М.: Наука, 1982.
[19] *Moore G.H*. Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence. New York: Springer-Verlag, 1982. XIV, 412 p.
[20] Jech T. Set Theory. New York: Springer. 2003. XIII. 769 p.
[21] Справочная книга по математической логике: в 4 ч / под ред. Дж. Барвайса. Ч. IV. Теория доказательств и конструктивная математика: пер. с англ. М.: Наука, 1983.
[22] *Troelstra A.S*., *Schwichtenberg H*. Basic Proof Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. XI, 343 p.
[23] *Barker-Plummer D*., *Barwise J*., *Etchemendy J*. Language, proof, and logic. — 2nd ed. CSLI Publications, 2011. XIII. 606 p.

References

[1] Anisov AM. Chto takoe nauka? *RUDN Journal of Philosophy*. 2011; (3): 120—130.
[2] Anisov AM. Ponimanie matematicheskih dokazatel'stv i EVM. *Voprosy filosofii*. 1987; (3): 29—40.
[3] Anisov AM. *Sovremennaya logika*. Moscow: IF RAN; 2002.
[4] Frege G. *Logika i logicheskaya semantika: Sbornik trudov*. Moscow: Aspekt Press, 2000.
[5] Pavlenko AN. *Predely intersub'ektivnosti (kritika kommunikativnoi sposobnosti obosnovaniya znaniya)*. SPb.: Aleteiya, 2012.
[6] Kuzina EB. O ponyatii dokazatel'stva. *Logicheskie issledovaniya* 2018. T. 24. № 2. S. 100—107.
[7] Krants S. *Izmenchivaya priroda matematicheskogo dokazatel'stva. Dokazat' nel'zya poverit'*. Moscow: Laboratoriya znanii, 2016.
[8] Dragalin AG. *Konstruktivnaya teoriya dokazatel'stv i nestandartnyi analiz.* Moscow: Editorial URSS, 2003.

[9] Plisko VE, Hahanyan VH. *Intuitsionistskaya logika*. Moscow: Izd. meh-mat. f-ta MGU, 2009.
[10] Van der Varden. *Probujdayuschayasya nauka. Matematika Drevnego Egipta, Vavilona i Gretsii*. Moscow; 1959.
[11] Krushinskii AA. *Logika drevnego Kitaya*. Diss. na soisk. uch. st. doktora filos. nauk (Spetsial'nost' 09.00.07 — logika). Moscow; 2006.
[12] Krushinskii AA. *Logika Drevnego Kitaya*. Moscow: IDV RAN; 2013.
[13] Smirnov VA. *Formal'nyi vyvod i logicheskie ischisleniya*. Moscow: Nauka; 1972.
[14] Smirnov VA. *Teoriya logicheskogo vyvoda*. Moscow: ROSSPEN; 1999.
[15] Takeuti G. *Teoriya dokazatel'stv*. Moscow: Mir, 1978.
[16] Pravits D. *Natural'nyi vyvod. Teoretiko-dokazatel'stvennoe issledovanie*. Moscow: LORI; 1997.
[17] Anisov AM. *Ontologicheskii status dokazatel'stv svedeniem k absurdu. Loj' kak problema formal'noi ontologii.* AN Pavlenko, AM Anisov, VL Vasyukov, SA Pavlov. St. Petersburg: Aleteiya; 2019. P. 123—187.
[18] Medvedev FA. *Rannyaya istoriya aksiomy vybora*. Moscow: Nauka, 1982.
[19] Moore GH. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer-Verlag; 1982. XIV. 412 p.
[20] Jech T. *Set Theory*. New York: Springer; 2003. XIII. 769 p.
[21] Spravochnaya kniga po matematicheskoi logike: in 4 parts. Dj. Barvais (ed.). Part IV. *Teoriya dokazatel'stv i konstruktivnaya matematika*. Trans. from Eng. Moscow: Nauka; 1983.
[22] Troelstra AS, Schwichtenberg H. *Basic Proof Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 1996. XI. 343 p.
[23] Barker-Plummer D, Barwise J, Etchemendy J. *Language, proof, and logic*. 2nd ed. CSLI Publications, 2011. XIII. 606 p.

Сведения об авторе:
Анисов А.М. — доктор философских наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института философии РАН (e-mail: anisov@land.ru)

About the author:
Anisov A.M. — Doctor of Philosophy, professor, leading researcher at the Institute of philosophy of the Russian Academy of Sciences (e-mail: anisov@land.ru)