ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИСТИНЫ С ОПЕРАТОРОМ ИСТИННОСТИ*

С.А. Павлов

Сектор логики
Институт философии РАН
ул. Волхонка, 14, Москва, Россия, 119991

В статье предложена аксиоматическая теория истины, которая строится как логическая теория с операторами истинности и ложности, которые включены в язык теории и допускают итерацию. Т-эквивалентость в общем случае не имеет места, а условием её выполнения является выполнение принципа бивалентности. Область определения оператора истинности в теории истины расширена на универсум символьных выражений. Найдены условия применимости классической логики для формул ряда языков.

Ключевые слова: теория истины, семантика, метаязык, аксиоматика, язык.

В настоящее время в логической семантике имеется ряд концепций и теорий истины [1]. Понятия истинности и ложности рассматриваются в различных подходах и теориях по крайней мере в нескольких смыслах: как предикат, как оператор, как абстрактный предмет.

Высказывания различных видов: «Предложение n истинно», «Истинно, что S», «Предложение *n* означает истину», где *n* имя *S*, — об истинности предложений, а также само предложение *S*, подчиняющиеся классической логике, попарно эквивалентны друг другу.

Однако если для каких-либо предложений не имеют места принципы и положения классической логики, то нарушаются и вышеуказанные эквивалентности.

В общем случае логика для предложений может отличаться от логики для высказываний об истинности или ложности этих предложений. То есть можем говорить, по крайней мере, о двух уровнях рассмотрения, на каждом из которых выполняются законы различных логик.

Будем исходить из рассмотрения понятий истинности и ложности как предикатов вслед за Тарским, который полагал, что предикат ‘истинно’ относится к предложениям. Символически будем записывать соответствующие высказывания как формулы $T(q(S_1))$, $F(q(S_2))$, где ‘S_1’ и ‘S_2’ — предложения, q — оператор, преобразующий предложения в их имена, и ‘$q(S_1)$’ и ‘$q(S_2)$’ — имена этих предложений. Предикаты и операторы истинности и ложности тесно связаны друг с другом. Формулы с операторами истинности и ложности будем рассматривать как сокращения:

$\mathsf{T}(\mathrm{A})$ есть сокращение для $T(q(\mathrm{A}))$ и $\mathsf{F}(\mathrm{A})$ есть сокращение для $F(q(\mathrm{A}))$.

Имея дело с понятиями истинности и ложности, необходимо учитывать возможность встретиться с проблемами их применения и употребления в есте-

* Исследование выполнено при поддержке РГНФ, проект № 07-03-00242а.

ственном и формализованном языках. Эти проблемы связаны с семантическими парадоксами типа парадокса лжеца, с определением предиката истины, с определением предложения и высказывания. Они обсуждаются в [9]. Эти проблемы не возникают, если перейти к использованию операторов истинности и ложности [3]. Тогда нет выразительных возможностей для введения референции, а значит, и автореференции. В то же время связанные с этим ограничения не отбрасывают каких-либо содержательно значимых высказываний или положений.

На пути исследования понятия истинности А. Тарский пришёл к выводу о неопределимости предиката истинности для достаточно «богатых» языков. В случае невыполнения необходимого условия для удовлетворительного определения истины в метаязыке, состоящего в том, что метаязык должен «быть существенно богаче» объектного языка, он полагал, что термин «истинно» необходимо включить в список неопределяемых терминов метаязыка, а свойства понятия истины задавать аксиоматически. То есть А. Тарский указывал, что возможен аксиоматический подход к построению теории истины. Он писал: «можно установить способ последовательного и верного оперирования этим понятием, относясь к нему как первоначальному понятию особой науки — теории истины — и уточняя основные его свойства путем аксиоматизации» [12]. Исходя из этого, предикат и оператор истинности будем в данной работе рассматривать в качестве исходных логических понятий.

Известны трудности, связанные с определением того, что представляет собой высказывание и предложение: «Одно и то же выражение может быть истинным высказыванием в одном языке, а на основании другого оказаться ложным высказыванием или лишенным смысла выражением» [12]. На данное обстоятельство обращал внимание ещё Аристотель, который писал «Да и вообще всё, о чем говорится без какой-либо связи, не истинно и не ложно» [2].

Построение и исследование различных грамматик не привело к таким правилам образования предложений, которые гарантировали бы осмысленность всех полученных предложений. В общем случае проблема демаркации осмысленных предложений от бессмысленных до сих пор не решена. Поэтому имеет смысл не ограничиваться рассмотрением только предложений, а расширить область определения предиката истины. Так, А. Тарский говорил о новых возможностях применимости понятия истины: «тот факт, что нас прежде всего интересует понятие истины для предложений, не исключает возможности последующего расширения сферы применимости этого понятия на другие виды объектов» [13]. Расширим сферу применимости понятия истины до множества выражений языка. При этом всякое предложение есть выражение языка. Те же выражения языка, которые не являются предложениями, все тривиально не истинны и не ложны, как например, неправильно построенные формулы. В пользу такого расширения также говорит использование символьных выражений (слов в алфавите, строк, цепочек символов) в таких общих логических системах, как канонические исчисления над алфавитом Э. Поста, формальные системы Р. Смаллиана.

В данной работе под аксиоматической теорией истины для некоторого языка будем понимать логическую теорию с операторами истинности и ложности, в которой аксиоматическим образом задаются условия истинности и ложности для формул этого языка, а также задаются различные возможные виды их семантических оценок.

Построение аксиоматической теории истины будет проводиться пошагово: на первом шаге сформулируем теорию истины с операторами истинности и ложности для языка элементарных высказываний, на втором обогатим исходный язык сентенциальными связками и, наконец, на последнем шаге расширим язык до универсума символьных выражений с операцией конкатенации.

1. Теория истины с операторами истинности и ложности

Построение теории истины начнём с аксиоматического задания свойств оператора истинности на множестве предложений. Эти предложения в общем случае не обязательно должны быть двузначными, то есть для исходного языка логика не обязательно классическая. Поэтому не выдвигается требование о соблюдении конвенции Тарского (или Т-эквивалентности). Нахождение условий принятия Т-эквивалентности является одной из задач, решаемых в рамках рассматриваемой теории истины.

Для высказываний об истинности предложений примем классическую логику. В этом состоят отличия разрабатываемой теории от теории истины Крипке [5], в которой исходный язык классический, предикат истины является частично определенным, а в метаязыке применяется неклассическая логика Клини.

Предложения и выражения любого языка принято оценивать не только на истинность, но и на ложность. Учтем при этом, что неистинность предложений в общем случае не всегда означает его ложность. Поэтому наряду с оператором истинности вводим в рассмотрение логически независимый от него оператор ложности F.

В область определения операторов истинности и ложности войдут как исходные предложения, так и высказывания об истинности (и ложности) предложений. При этом будем допускать итерацию операторов истинности и ложности. Этим данный подход отличается от подхода А.Тарского.

Язык исчисления TFT.

Алфавит TFT:

s, s_1, s_2, ... сентенциальные переменные;

$\neg$, $\supset$ логические константы, обозначающие отрицание и импликацию;

T, F, логические константы, обозначающие операторы истинности и ложности;

(,) технические символы.

Правила образования.

1.1. Если v есть сентенциальная переменная, то (v) есть правильно построенная формула (сокращенно ППФ).

1.2. Если A есть ППФ, то (TA) и (FA) есть ППФ.

Из всего класса ППФ выделим подкласс формул, которые образованы из префиксированных операторами истинности или ложности формул (называемыми в дальнейшем TF-формулами (TF-ф.)).

2.1. Если A есть ППФ, то (TA) и (FA) есть TF-ф.

2.2. Если P_1, P_2 есть TF-ф., то (TP_1), (FP_1), ($\neg P_1$) и ($P_1 \supset P_2$) есть TF-ф.

3. Ничто иное не является ППФ и TF-ф.

Метапеременные: A, B, C, ... для ППФ;

P, P_1, P_2, ... для TF-ф.

Принимаем обычные соглашения насчёт опускания скобок.

Определим ряд производных связок классическим образом.

D1.1.1. $(P_1 \wedge P_2) =_{df} \neg (P_1 \supset \neg P_2)$.

D1.1.2. $(P_1 \vee P_2) =_{df} (\neg P_1 \supset P_2)$.

D1.1.3. $(P_1 \veebar P_2) =_{df} ((P_1 \vee P_2) \wedge \neg (P_1 \wedge P_2))$.

D1.1.4. $(P_1 \supset\subset P_2) =_{df} ((P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1))$.

Схемы аксиом.

A1.1. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$.

A1.2. $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$.

A1.3. $((\neg P_1 \supset \neg P_2) \supset (P_2 \supset P_1))$.

К этим схемам аксиом добавим аксиомы, которые выражают условия истинности и ложности для TF-формул.

A1.4.1. $TP \supset\subset P$ (T-эквивалентность для TF-ф.).

A1.4.2. $FP \supset\subset \neg P$.

Здесь возникает вопрос: нужна ли унарная связка $\neg$? Отметим, что пока не ставится задача упрощения языка. Это будет сделано ниже в части **4**.

Правило вывода.

$$\frac{P_1, (P_1 \supset P_2)}{P_2} \ \text{MP}.$$

Условия истинности и ложности для отрицания $\neg$ получаем в качестве теорем:

T1.1.1. $T\neg P \supset\subset FP$.

T1.1.2. $F\neg P \supset\subset TP$.

Так же и для импликации $\supset$:

T1.1.3. $T(P_1 \supset P_2) \supset\subset (FP_1 \vee TP_2)$.

T1.1.4. $F(P_1 \supset P_2) \supset\subset (TP_1 \wedge FP_2)$.

Условия истинности и ложности для самих операторов истинности и ложности, теоремы сведения (редукции):

T1.2.1. $TTA \supset\subset TA$.

T1.2.2. $FTA \supset\subset \neg TA$.

T1.2.3. $TFA \supset\subset FA$.

T1.2.4. $FFA \supset\subset \neg FA$.

В то же время имеем теоремы о несводимости.

T1.2.5. Не имеет места $FTA \supset\subset FA$.

T1.2.6. Не имеет места $FFA \supset\subset TA$.

Отметим, что эти теоремы отличаются от аксиом **A2** $F(t) \leftrightarrow F(T(t))$ и **A4** $T(t) \leftrightarrow F(F(t))$ теории истины **KFG** (Крипке—Фефермана—Гилмора) [15].

T1.2.7. Не имеет места $\mathsf{F}A \supset\subset \neg\mathsf{T}A$, что говорит о логической независимости операторов истинности и ложности.

Пусть $\Phi(P_1, ..., P_n)$ формула, в которую входят TF-формулы $P_1, ..., P_n$ и k_i — индекс, указывающий число итераций. Имеем следующие метатеоремы о сводимости итерированных формул.

MT1.1. $\Phi(\mathsf{T}^{k1}P_1, ..., \mathsf{T}^{km}P_n) \supset\subset \Phi(P_1, ..., P_n)$.

MT1.2. $\Phi(\mathsf{T}^{k1}A_1, ..., \mathsf{T}^{km}A_n) \supset\subset \Phi(\mathsf{T}A_1, ..., \mathsf{T}A_n)$.

Эти метатеоремы говорят о том, что множество формул теории можно разбить на два подмножества, соответствующих двум уровням (в отличие бесконечного числа уровней языков в теории Тарского). Пользуясь метафорой Куайна, можно сказать, что семантическое восхождение, состоящее в переходе от предложения A к высказыванию о его истинности $\mathsf{T}A$, приводит от неклассической логики для A к классической логике для $\mathsf{T}A$.

T1.3.1. $(\mathsf{T}A \veebar \neg\mathsf{T}A)$.

T1.3.2. $(\mathsf{F}A \veebar \neg\mathsf{F}A)$.

Вышеприведенные дилемма истинности и дилемма ложности приводят к тетралемме истинности и ложности или закону исключенного пятого.

Определим n-местную исключающую дизъюнкцию $\veebar^n$ (даем в связи с n-местностью исключающей дизъюнкции):

D1.2. $\veebar^n(P_1, P_2, ..., P_n) =_{df} (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... \neg P_n) \vee$
$\vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge ... \neg P_n) \vee ... \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge ... P_n)$.

T1.4. $\veebar^4(\mathsf{T}A \wedge \neg\mathsf{F}A, \neg\mathsf{T}A \wedge \mathsf{F}A, \mathsf{T}A \wedge \mathsf{F}A, \neg\, \mathsf{T}A \wedge \neg\mathsf{F}A)$.

Всякое предложение либо истинно и не ложно, либо ложно и не истинно, либо истинно и ложно, либо не истинно и не ложно.

В соответствии с этой тетралеммой все множество предложений можно разбить на четыре непересекающиеся подмножества. Каждому члену тетралеммы сопоставим область (подмножество), обозначаемую ***T***, ***F***, ***B*** или ***N***, в которой выполняется соответствующая ему по порядку членства формула.

MT1.3. Только 4 области замкнуты относительно оператора T: ***TFBN***, ***TFB***, ***TFN*** и ***TF***.

Определим операторы строгой истинности $\ulcorner$ и строгой ложности $\urcorner$, соответствующие первым двум членам тетралеммы:

D1.3.1. $\ulcorner A =_{df} (\mathsf{T}A \wedge \neg\mathsf{F}A)$.

D1.3.2. $\urcorner A =_{df} (\neg\mathsf{T}A \wedge \mathsf{F}A)$.

Оператор строгой истинности $\ulcorner$ сильнее оператора истинности T, что усматривается из следующих теорем:

T1.5.1. $\ulcorner A \supset \mathsf{T}A$.

T1.5.2. Не имеет места, что $\mathsf{T}A \supset \ulcorner A$.

Эти операторы эквивалентны в области ***TFN***.

T1.5.3. $\neg(\mathsf{T}A \wedge \mathsf{F}A) \supset\subset (\mathsf{T}A \supset\subset \ulcorner A)$.

Исходя из модифицированной семантики Фреге, суть которой состоит в наличии только одного денотата истина вместо двух, построим значения, подходящие для четырёхзначной интерпретации языка исчисления. Возьмём одноэлементное множество {истина} [10] и, пользуясь методом Данна, образуем из него множество его подмножеств. Затем отождествим упорядоченные пары множеств со значениями следующим образом:

T = <{истина}, {}>, F = <{}, {истина}>, B = <{истина}, {истина}>, N = <{}, {}>.

Выделенное значение — T. Содержательный смысл этих значений следующий: истинно и неложно; ложно и неистинно; истинно и ложно; не истинно, не ложно; соответственно. Интерпретации, с так построенными значениями, назовем T-интерпретациями, а логики, которым они адекватны, T-логиками.

Отметим, что ранее в [7; 8] два последних значения назывались «противоречивость» C и «индифферентность» I. В связи с тем что в дальнейшем оказалось возможным рассматривать несколько видов противоречий, автор предпочел более нейтральные обозначения Н. Белнапа.

Таблицы значений для исходных и производных связок:

P	$\neg$ P
T	F
F	T

$\supset$	T	F
T	T	F
F	T	T

A	TA	FA	$\ulcorner$A	$\urcorner$A
T	T	F	T	F
F	F	T	F	T
B	T	T	F	F
N	F	F	F	F

Исчисление **TFT** непротиворечиво и семантически полно относительно предложенной интерпретации.

Несмотря на семантическую полноту построенной теории, оно не является абсолютно полным [14]. Следовательно, допустимо присоединять к нему дополнительные аксиомы, о чём говорит следующая метатеорема, в которой перечисляются возможные виды семантических оценок предложений.

MT1.4. Три класса формул, эквивалентных следующим: (TA $\veebar$ FA), (TA $\vee$ FA) либо ($\neg$TA $\vee$ $\neg$FA), могут быть присоединены в качестве аксиом к **TFT**.

2. Теория истины для языка с отрицанием и импликацией

Перейдём к сложным предложениям, то есть построенным из других предложений с помощью связок.

Язык исчисления TFT(Λ).

К алфавиту языка исчисления **TFT** добавляем символы логических констант ~, → для отрицания и импликации. Пусть Λ = {~, →}.

Правила образования*

1.3. Если A, B есть ППФ, то (~A), (TA), (FA), (A → B), есть ППФ.

2.3. Если P_1, P_2 есть TF-ф., то ($\sim P_1$), ($P_1 \to P_2$), есть TF-ф.

Д. Гильберт, В. Аккерман вводят для выражения логической связи высказываний ряд знаков, среди которых ~ и →, и задают условия истинности и ложности для них: «~X обозначает высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно» [4]. Последние соответствуют следующим аксиомам для отрицания ~:

A2.1. $\mathsf{T}{\sim}A \supset\subset \mathsf{F}A$.

A2.2. $\mathsf{F}{\sim}A \supset\subset \mathsf{T}A$

и для импликации →: «X → Y ... обозначает высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда X истинно, а Y ложно» [4].

A2.3. $\mathsf{T}(A \to B) \supset\subset (\mathsf{F}A \vee \mathsf{T}B)$.

A2.4. $\mathsf{F}(A \to B) \supset\subset (\mathsf{T}A \wedge \mathsf{F}B)$.

Отметим, что в **A2.1—4** реализуется замечание Д. Гильберта и В. Аккермана: «Особую важность имеет ещё то общее замечание, что в силу нашего определения основных логических связей *истинность или ложность сложного высказывания зависит только от истинности и ложности составляющих высказываний*» [4].

Имеем теоремы соответствия связок ~ и → и связок ¬ и ⊃ для TF-формул.

Теорема для отрицаний ~ и ¬:

T2.1.1. $\sim P \supset\subset \neg P$.

Теорема для импликаций → и ⊃:

T2.1.2. $(P_1 \to P_2) \supset\subset (P_1 \supset P_2)$.

Для операторов T, F и связок ~, → имеются следующие соотношения.

T2.2.1. $\mathsf{T}A \to {\sim}\mathsf{F}A$ (соответствует аксиоме **DIS** теории истины **KFG** [15]).

T2.2.2. ${\sim}\mathsf{F}A \to \mathsf{T}A$ (отсутствует в **KFG**).

А также

D2.1. $f =_{df} \neg(\mathsf{T}(s) \to \mathsf{T}(s))$.

T2.2.3. $\mathsf{T}{\sim}A \supset\subset \mathsf{T}(A \to f)$.

T2.2.4. $\mathsf{F}A \supset\subset \mathsf{T}(A \to f)$.

Отметим, что на этом этапе не ставится цель минимизации числа исходных связок и выбор независимых аксиом.

Конъюнкцию, дизъюнкцию и эквиваленцию определяем классически:

D2.2.1. $(A \,\&\, B) =_{df} {\sim}(A \to {\sim}B)$.

D2.2.2. $(A \vee B) =_{df} ({\sim}A \to B)$.

D2.2.3. $(A \leftrightarrow B) =_{df} (A \to B) \,\&\, (B \to A)$.

* Будем записывать далее только те правила образования, которые отличаются от ранее приведенных.

Имеем следующие условия истинности для конъюнкции и отрицания.

T2.3.1. $\mathsf{T}(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}) \leftrightarrow (\mathsf{T}\mathrm{A} \wedge \mathsf{T}\mathrm{B})$.

T2.3.2. $\mathsf{T}{\sim}(\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B}) \leftrightarrow (\mathsf{T}{\sim}\mathrm{A} \vee \mathsf{T}{\sim}\mathrm{B})$.

T2.3.3. $\mathsf{T}{\sim}{\sim}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathsf{T}\mathrm{A}$.

Эти теоремы являются аксиомами в исходной логике истины фон Вригта [17], которую он называет «core system» **CS**. Отметим, что в ней отсутствует правило удаления строгой истинности, а также тавтология ($\mathsf{T}\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{P}$) не является выводимой в **CS**.

В ***T***-области (на множестве истинных и неложных предложений), а также в ***F***-области (на множестве ложных и неистинных предложений) имеет место классическая логика.

Для операторов строгой истинности и строгой ложности имеет место соотношение

T2.4. $(\rceil\mathrm{A} \supset\subset \lceil{\sim}\mathrm{A}$.

Для этих областей имеет смысл задать правила введения и удаления оператора строгой истинности.

Правила введения и удаления оператора строгой истинности

Введение — Удаление

R2.1. $\dfrac{\mathrm{A}}{\lceil\mathrm{A}}$. **R2.2.** $\dfrac{\lceil\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$.

Отметим, что в дефляционной теории принимаются следующие правила для оператора истинности.

R2.3. $\dfrac{\mathrm{A}}{T\mathrm{A}}$ $\dfrac{T\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$.

Правило введения оператора истинности является выводимым в **TFT(Λ)** в отличие от правила удаления оператора истинности, которое невыводимо в теории **TFT(Λ)**. Принятие последнего неприемлемо, так как это приведет к противоречиям (для выяснения этого достаточно рассмотреть область ***B***).

Существенной особенностью теории **TFT(Λ)** является то, что в ней не выполняются законы классической логики, сформулированные с помощью связок &, $\vee$ и $\leftrightarrow$ (см. [7]).

T2.5.1—3. Не имеют места $\sim(\mathrm{A} \,\&\, {\sim}\mathrm{A})$, $(\mathrm{A} \vee {\sim}\mathrm{A})$, $(\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A})$.

А также:

T2.5.4. Не имеет места $(\mathsf{T}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A})$.

Из того, что Т-эквивалентость не имеет места, следует, что оператор истинности в общем случае не элиминируем, так что дефляционизм в данном случае не «работает».

Поэтому возникает вопрос: в каких случаях имеет место Т-эквивалентость? Ответ на данный вопрос можно извлечь из следующей группы теоремных схем.

Центральная теорема:

T2.6.1. $(\mathsf{T}\mathrm{A} \,\underline{\vee}\, F\mathrm{A}) \supset\subset \lceil(\mathsf{T}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A})$.

$(\mathsf{T}\mathrm{A} \,\underline{\vee}\, F\mathrm{A}) \supset\subset (\mathsf{T}(\mathsf{T}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}) \wedge \neg\mathsf{F}(\mathsf{T}\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{A}))$ (в частично сокращенном виде).

То есть принцип бивалентнтности (двузначности) равнозначен истинности и неложности Т-эквивалентности.

К ней примыкает ряд близких ей теорем.

T2.6.2. $(\mathsf{T}A \underline{\vee} \mathsf{F}A) \leftrightarrow \lceil(\mathsf{T}A \leftrightarrow A)$.

T2.6.3. $(\mathsf{T}A \underline{\vee} \mathsf{F}A) \rightarrow (\mathsf{T}A \leftrightarrow A)$

T2.6.4 Не имеет места $(\mathsf{T}A \leftrightarrow A) \rightarrow (\mathsf{T}A \underline{\vee} \mathsf{F}A)$

T2.6.5 Не имеет места $(\mathsf{T}A \underline{\vee} \mathsf{F}A) \leftrightarrow (\mathsf{T}A \leftrightarrow A)$

Таблицы значений для исходных связок:

A	~A
T	F
F	T
B	B
N	N

→	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	T	T	T	T
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

Отметим, что, несмотря на традиционные условия истинности для импликации и отрицания, заданные в [4], интерпретация языка теории не двузначная.

Таким образом, рассмотрена теория истины **TFT(Λ)** для сентенциального языка со связками ~, →. Так же как **TFT**, она не является абсолютно полной. Следовательно, допустимо присоединять к ней дополнительные аксиомы, в качестве которых будем использовать формулы из **MT1.4**.

Как теория истины неотделима от логики, так и ряд сентенциальных логик (Т-логик) неотделим от теории истины и является её следствием.

У. Куайн писал «я рассматриваю логику как результирующую двух компонент — истины и грамматики» [6]. Следуя этой идее, можно рассматривать теорию истины как логику, а логики как следствия из теории истины.

Так, из **TFT**(Λ) следует логика **FL4**. При присоединении к **TFT**(Λ) в качестве аксиомы формулы $(\neg\mathsf{T}A \vee \neg\mathsf{F}A)$ полученная система дедуктивно эквивалентна логике **FL3N**. Далее, при присоединении к **TFT**(Λ) в качестве аксиомы формулы $(\mathsf{T}A \vee \mathsf{F}A)$ полученная система дедуктивно эквивалентна логике **FL3B**, а при присоединении к **TFT**(Λ) в качестве аксиомы формулы $(\mathsf{T}A \underline{\vee} \mathsf{F}A)$ полученная система **FL2** дедуктивно эквивалентна классической логике **CL**. **FL4**, **FL3N**, **FL3N** и **FL2** соответствуют 4-м областям, замкнутым относительно оператора T (см. **MT1.3**). Эти логики рассмотрены в [9].

3. Условия применимости классической логики в философских рассуждениях

Классическая логика не всегда применима в философских рассуждениях, в которых встречаются не только двузначные, но и противоречивые (антиномичные или парадоксальные, одновременно истинные и ложные) высказывания, а также бессмысленные (ни истинные, ни ложные) или недоказуемые предложения. Поэтому необходимо исследовать условия применимости классической логики, а также других логик к философским (и не только философским) рассуждениям.

Одной из важных задач, решаемых в рассматриваемой теории истины, является нахождение условий применимости классической логики к правильно построенным формулам из некоторого множества ППФ.

Понятно, что условия применимости логики L_1 должны быть сформулированы в рамках языка логики L_2, более слабой, чем L_1.

Пусть L_1 и L_2 есть две стандартно определяемые сентенциальные логики, такие, что язык логики L_1 есть подъязык логики L_2. Пусть Λ есть множество связок логики L_1. Введем определение понятия применимости некоторой логики к правильно построенной формуле A со связками, совпадающими со связками из Λ.

D3.4. Будем говорить, что *логика* L_1 *со связками из* Λ ***применима*** *к* ППФ A *языка логики* L_2 (*символически* $Ap(L_1(\Lambda), A, L_2)$), *если и только если для любой теоремы* T *логики* L_1 *всякая формула* T_i, *являющаяся результатом подстановки* A *вместо всех вхождений любой из сентенциальных переменных в* T, *доказуема в* L_2.

Таким образом, условия применимости некоторой логики L_1 к некоторой ППФ A формулируются относительно логики L_2, в рамках языка которой можно выразить и обосновать эти условия. Необходимо отметить, что сопоставление языков L_1 и L_2 проводится на синтаксическом уровне, в то время как содержательная интерпретация связок и формул в разных языках может существенно отличаться.

Найдем условия применимости сентенциальной классической логики CL (с исходными связками отрицанием и импликацией) к некоторому множеству M языка теории **TFT(Λ)**. В этом случае CL будет играть роль логики L_1, а **TFT**(Λ) будет играть роль логики L_2. В данном случае $\Lambda = \{\sim, \rightarrow\}$.

Основная метатеорема (условия применимости классической логики к некоторым формулам языка теории **TFT**(Λ)).

MT2.1. *Если* ($\mathsf{T}A \veebar \mathsf{F}A$) *доказуема в* **TFT**(Λ), *то* Ap(CL(Λ), A, **TFT**(Λ)).

MT2.2. *Если* ($\mathsf{T}A \leftrightarrow A$) *доказуема в* **TFT**(Λ), *то* Ap(CL(Λ), A, **TFT**(Λ)).

Содержательно эти теоремы означают, что условиями применимости классической логики к формуле A в рамках теории **TFT**(Λ) являются принцип бивалентности или T-эквивалентность для этой формулы A.

Примерами таких ППФ, для которой соблюдаются условия применимости, могут служить как префиксированные формулы вида $\mathsf{F}B$, так и смешанные вида $((\mathsf{F}B \wedge \mathsf{FT}B) \rightarrow B)$.

4. Расширение области определения предикатов и операторов истинности и ложности

С учётом аргументов, приведенных в начале, расширим область определения предикатов и операторов истинности и ложности до универсума символьных выражений языка. Под символьным выражением будем понимать конечную линейную последовательность символов некоторого языка. Пусть **Σ** есть множество переменных для символьных выражений $s, s_1, \ldots$, то есть $\Theta = \{s, s_1, \ldots,\}$.

Перейдём к формулировке исчисления (теории истины и ложности) **TFT(Σ)** с итерируемыми операторами истинности и ложности, заданных на множестве символьных выражений.

Теория истины с операторами истинности и ложности TFT(Σ).

Алфавит TFT(Σ):

s, s_1, s_2, ... переменные для символьных выражений языка;

c, c_1, c_2, ... константы для символьных выражений языка;

T, F логические константы, обозначающие операторы истинности и ложности.

Язык теории TFT(Σ).

Правила образования.

1.4. Если S есть переменная или константа для символьных выражений, то S есть символьное выражение (сокр.: S-выражение).

2.1.⁺ Если S есть S-выражение, то $\mathsf{T}(S)$, $\mathsf{F}(S)$ есть TF-ф.

Остальные как в **TFT**.

Метапеременные: S, S_1, S_2, ..., для символьных выражений.

Тетралемма, расширенная на универсум символьных выражений была приведена в [7, 16].

T4.5. $\underline{\vee}^4(\mathsf{T}(S) \wedge \mathsf{FF}(S), \mathsf{FT}(S) \wedge \mathsf{F}(S), \mathsf{T}(S) \wedge \mathsf{F}(S), \mathsf{FT}(S) \wedge \mathsf{FF}(S))$.

MT4.2. $\Phi(\mathsf{T}(S_1), ..., \mathsf{T}(S_n)) \supset\subset \Phi(\mathsf{T}^{k1}(S_1), ..., \mathsf{T}^{km}(S_n))$.

Обогащение языка кванторами.

Исчисление с оператором истинности, обогащенное кванторами всеобщности и существования, сводимо к предыдущему исчислению **TFT(Σ)**. При этом имеет смысл принять подстановочную интерпретацию кванторов (см. [3]).

Условия истинности и ложности для кванторов

A1.3.1. $\mathsf{T}\forall s\, S \supset\subset \forall s\, \mathsf{T}S$.

A1.3.2. $\mathsf{F}\forall s\, S \supset\subset \exists s\, \mathsf{F}S$.

A1.3.3. $\mathsf{T}\exists s\, S \supset\subset \exists s\, \mathsf{T}S$.

A1.3.4. $\mathsf{F}\exists s\, S \supset\subset \forall s\, \mathsf{F}S$.

О теории истины для языка S-выражений с конкатенацией.

Подобно тому, как мы от элементарных предложений перешли к сложным, имеет смысл рассмотреть и сложные символьные выражения. Роль связок при этом будет играть операция конкатенации (сочленения). Здесь мы ограничимся тем, что выделим несколько положений этой теории.

По Р. Смальяну, «Под алфавитом K мы понимаем упорядоченное конечное множество элементов, называемых символами, знаками или буквами алфавита K. Любая конечная линейная последовательность (упорядоченная n-ка) символов из K называется словом, или выражением, или строкой в K», «Операция конкатенации, очевидно, ассоциативна, но не коммутативна» [11].

Правило образования: если S_1, S_2 есть S-выражения, то S_1^S_2 есть S-выражение.

Таким образом, появляются сложные выражения вида: S_1^S_2^...^S_n в частности, например c^s_1^s_2 и, соответственно, формулы: $\mathsf{T}(S_1$^S_2^...^$S_n)$, $\mathsf{T}($c^s_1^$s_2)$.

Для удобства рассмотрения некоторых T-формул с вхождением нескольких переменных как многоместных введём следующее сокращение в метаязыке.

Пусть S_1^S_2^...^S_n есть S-выражение. Тогда $\mathsf{T}(S_1, S_2, ..., S_n) =_{\mathrm{df}} \mathsf{T}(S_1$^$S_2$^...^$S_n)$.

Предыдущие формулы, взятые в качестве примеров, будут иметь вид:

$$\mathsf{T}(S_1, S_2, ..., S_n), \mathsf{T}(\mathrm{c}, s_1, s_2).$$

Имеет смысл рассмотреть введение кванторов по всем переменным, входящим в состав S-выражений. В этом случае получаем исчисление, напоминающее исчисление предикатов первого порядка.

В частном случае трехместных формул с двумя переменными имеем теорему о несводимости: $\neg\exists s_1\forall s_2$ $(\mathsf{T}(\mathrm{c}, s_1, s_2)) \supset\subset \neg\mathsf{T}(\mathrm{c}, s_2, s_2))$, которую можно сравнить теоремой исчисления предикатов первого порядка с предикатом $\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3)$: $\neg\exists x\forall y$ $(\mathrm{R}(a, x, y) \leftrightarrow \neg\mathrm{R}(a, y, y))$. Следствием этих теорем является отсутствие взаимнооднозначного соответствия между множеством одноместных формул и множеством формул с одной переменной.

Отметим, что теория истины для языка с конкатенацией предшествует построению исчисления предикатов, выходящего за рамки исчисления предикатов первого порядка. Такой порядок построения позволяет предотвратить появление ряда парадоксов.

Теория $\mathbf{TFT_4(\Sigma, \sim, \rightarrow)}$.

В завершение сформулируем теорию $\mathbf{TFT_4(\Sigma, \sim, \rightarrow)}$ с операторами истинности и ложности. К предыдущей теории добавляются символы логических констант $\sim, \rightarrow$. Эту формулировку приведем полностью.

Язык теории $\mathbf{TFT(\Sigma, \sim, \rightarrow)}$.

Алфавит:

s, s_1, s_2, ... переменные для символьных выражений языка;

$\mathrm{c}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2$, ... константы для символьных выражений языка;

Т логическая константа, обозначающая оператор истинности.

$\sim, \rightarrow$ логические константы для отрицания и импликации.

Правила образования.

1.4. Если S есть переменная или константа для символьных выражений, то S есть S-выражение.

1.5. Если S_1 и S_2 есть S-выражение, то $(\sim S_1)$, $(S_1 \rightarrow S_2)$, $\mathsf{T}(S)$ есть S-выражение.

2.1.⁺ Если S есть S-выражение, то $\mathsf{T}(S)$ есть Т-ф.

2.2.⁺ Если P_1, P_2 есть Т-ф., то $(\sim\mathrm{P}_1)$, $(\mathrm{P}_1 \rightarrow \mathrm{P}_2)$, $(\mathsf{T}\mathrm{P}_1)$ и $(\mathrm{P}_1 \supset \mathrm{P}_2)$ есть Т-ф.

3.⁺ Ничто иное не является S-выражением и Т-ф.

Метапеременные: $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$, ... для Т-ф.

В теории $\mathbf{TFT_4(\Sigma, \sim, \rightarrow)}$ используем ряд сокращений, основанных на ранее доказанных тождествах.

D4.1.1. $\mathsf{F}(S) =_{\mathrm{df}} \mathsf{T}(\sim S)$ (см. **A2.1**).

D4.1.2. $\neg\mathrm{P} =_{\mathrm{df}} \mathsf{F}\mathrm{P}$ (см. **A1.4.2**).

D4.1.3. $\ulcorner S =_{\mathrm{df}} (\mathsf{T}(S) \wedge \neg\mathsf{F}(S))$ (см. **D1.3.1**).

Определим импликацию $\supset$ (которую назовем D-импликацией, так как для неё имеет место теорема дедукции):

D4.1.4. $(S_1 \supset S_2) =_{\mathrm{df}} (\lceil S_1 \to \lceil S_2)$.

Схемы аксиом.

A1.1.1. $(\mathrm{P}_1 \supset (\mathrm{P}_2 \supset \mathrm{P}_1))$.

A1.1.2. $(\mathrm{P}_1 \supset (\mathrm{P}_2 \supset \mathrm{P}_3)) \supset ((\mathrm{P}_1 \supset \mathrm{P}_2) \supset (\mathrm{P}_1 \supset \mathrm{P}_3))$.

A1.1.3. $((\neg \mathrm{P}_1 \supset \neg \mathrm{P}_2) \supset (\mathrm{P}_2 \supset \mathrm{P}_1))$.

A1.1.4. $\mathsf{T}\mathrm{P} \supset\subset \mathrm{P}$.

Правило вывода.

$$\frac{S_1, (S_1 \supset S_2)}{S_2} \quad \mathrm{MP}.$$

Отметим, что правило удаления строгой истинности здесь является производным.

Центральная теорема:

T4.6.1. $(\mathsf{T}S \veebar FS) \supset\subset \lceil(\mathsf{T}S \leftrightarrow S)$.

T4.6.6. $\neg(\mathsf{T}S \wedge \mathsf{F}S) \supset\subset \lceil(\mathsf{T}S \to S)$.

T4.6.7. $\neg(\mathsf{T}S \wedge \mathsf{F}S) \to (\mathsf{T}S \to S)$.

Отсюда следует, что предикат или оператор истины можно элиминировать только в области ***T*** и ***F***, а в области ***B*** возможно применение правила удаления оператора истинности.

Использование символьных выражений в построении теории истины позволило построить логику с нестандартными формулами [10].

В заключение кратко скажем о некоторых особенностях построенной аксиоматической теории истины. Понятие истины в этой теории одно и не расщепляется в зависимости от уровня рассмотрения. Теория истины строится как логическая теория с операторами истинности и ложности, которые включены в язык теории и допускают итерацию. Т-эквивалентость в общем случае не имеет места, а условием её выполнения является выполнение принципа бивалентности. Отсюда следует, что понятие истины неустранимо (неэлиминируемо) из языка неклассической логики. Область определения оператора истинности в теории истины расширена на универсум символьных выражений, что увеличивает выразительные возможности языка логик, которые являются следствиями этой теории. Найдены условия применимости классической логики в философских рассуждениях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Анисов А.М.* Истина // Новая Российская энциклопедия. — М., 2009.

[2] *Аристотель.* Категории // Сочинения. — М., 1978. — Т. 2. — С. 51—90.

[3] *Бессонов А.В.* Истина внутри языка выразима // Язык и логическая теория. — М., 1987. — С. 54—61.

[4] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. — М., 1947.

[5] *Крипке С.* Очерк теории истины // Язык, истина, существование. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 2002. — С. 151—183.

[6] *Куайн У.* Философия логики. — М., 2008.
[7] *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности // Логический анализ естественных языков. 2-й советско-финский коллоквиум по логике. — М., 1979. — С. 70—73.
[8] *Павлов С.А.* Некоторые условия двузначности в исчислении предикатов истинности и ложности // Системные методы анализа научного знания. — М., 1986. — С. 152—154.
[9] *Павлов С.А.* Логика с операторами истинности и ложности. — М., 2004.
[10] *Павлов С.А.* Теория истины с оператором истины для классической сентенциальной логики и её расширение на область неправильно построенных формул // Труды членов Российского философского общества. — М., 2008. — Вып. 15. — С. 82—92.
[11] *Смальян Р.* Теория формальных систем. — М., 1981.
[12] *Тарский А.* Понятие истины в языках дедуктивных наук // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. — М., 1999. — С. 19—155.
[13] *Тарский А.* Семантическая концепция истины // Аналитическая философия: Становление и развитие. — М., 1998.
[14] *Чёрч А.* Введение в математическую логику. — М., 1960.
[15] *Turner R.* Logics of Truth // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1990. — Vol. 31. — N 2. — P. 308—329.
[16] *Pawlow S.A.* Einige nichttraditionelle Ideen in der Logik // Philosophie und Naturwissenschaften in Vergangenheit und Gegenwart. Heft 5: Philosophishe Probleme der Logik. — Berlin, 1978.
[17] *Wright G.H. von* Truth-Logics // Logique et analyse. Nouvelle serie. — 1987. — Vol. 120. — P. 311—334.

BASIS STATEMENTS OF THE TRUTH THEORY WITH THE TRUTH OPERATOR

S.A. Pavlov

Department of logic
Institute of philosophy of RAS
Volkhonka Str., 14, Moscow, Russia, 119991

This paper proposes the axiomatic theory of truth with the truth operator. The truth operator is included in language of this theory that permits iteration of such operator.

Key words: truth theory, semantics, metalanguage, axiomatic, language.